

Statistische Physik

Präsenzübungen

Leibniz Universität Hannover, Wintersemester 2018/19

Vorlesung: PROF. DR. O. LECHTENFELD

Übungsaufgaben: DR. TILL BARGHEER

Inhaltsverzeichnis

1 Blatt 1	3
2 Blatt 2	5
3 Blatt 3	7
4 Blatt 4	9
5 Blatt 5	11
6 Blatt 6	13
7 Blatt 7	15
8 Blatt 8	17
9 Blatt 9	19
10 Blatt 10	21
11 Blatt 11	23
12 Blatt 12	25
13 Blatt 13	27
14 Blatt 14	29
15 Nummernkarten	31

[P1] Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Betrachten Sie ein System von N Spins, welche sich jeweils im Zustand „up“ oder „down“ befinden können. Da nichts weiteres über den Zustand bekannt ist, haben alle Zustände die gleiche Wahrscheinlichkeit $p = 2^{-N}$.

Angenommen, man misst jetzt die Differenz zwischen der Anzahl der „up“ und der Anzahl der „down“ Spins (zum Beispiel durch Messung des Magnetfeldes), und findet dass die Differenz den festen Wert $2s$ annimmt. Welche Wahrscheinlichkeit muss man jeder Konfiguration des Systems mit dieser neuen Information zuweisen?

[P2] Einzelne Spins

Betrachten Sie nun eine große Anzahl N von Spins, welche sich wiederum jeweils im Zustand „up“ oder „down“ befinden können. Sei $2s$ die Differenz zwischen der Anzahl der „up“ und der Anzahl der „down“ Spins. In der Gegenwart eines externen magnetischen Feldes B ist die Gesamtenergie des Systems

$$U = -2smB \quad (1)$$

für eine Konstante m .

Angenommen, alle möglichen Konfigurationen sind gleich wahrscheinlich. Geben Sie die ungefähre Wahrscheinlichkeit dafür an, dass man einen bestimmten Spin im Zustand „up“ findet, unter der Bedingung, dass die Gesamtenergie U beträgt.

[P3] Shannon-Entropie

Die *Shannon-Entropie* $S(P)$ einer Wahrscheinlichkeitsverteilung $P = \{p_1, \dots, p_n\}$ mit $p_i > 0$ und $\sum_i p_i = 1$ ist definiert als

$$S(P) = \sum_i p_i \ln \frac{1}{p_i} = - \sum_i p_i \ln p_i. \quad (2)$$

- (a) Wie hoch ist die Shannon-Entropie im Fall gleichverteilter Wahrscheinlichkeiten?
- (b) Finden Sie das Minimum und das Maximum von S bei vorgegebener Anzahl n möglicher Ergebnisse. Für welche Wahrscheinlichkeitsverteilungen werden Minimum und Maximum erreicht?

Hinweis: Der Logarithmus ist eine konkave Funktion.

- (c) Zeigen Sie, dass die Entropie einer Wahrscheinlichkeitsverteilung von zwei unabhängigen Systemen gleich der Summe der Entropien der einzelnen Systeme ist.
- (d) Die Eigenwerte eines Quantenzustands ρ (Dichtematrix) bilden eine Wahrscheinlichkeitsverteilung. Die Shannon-Entropie $S(\rho)$ einer solchen Verteilung heißt *von-Neumann-Entropie* von ρ . Wie kann $S(\rho)$ kompakt durch ρ ausgedrückt werden?

[P4] Ideales Gas

Die Anzahl möglicher Zustände eines idealen Gases von N Teilchen mit Gesamtenergie im Intervall $[U, U + \epsilon]$ beträgt

$$g(N, U) \simeq \epsilon f(N) U^{3N/2}. \quad (1)$$

Das Gas befinde sich im thermischen Gleichgewicht mit Temperatur T . Welches ist die wahrscheinlichste Gesamtenergie U des Gases?

[P5] Van-der-Waals-Gas

In einem realistischeren Modell eines Gases, welches die endliche Teilchengröße sowie eine attraktive Wechselwirkung berücksichtigt, beträgt die Gesamtenergie im thermischen Gleichgewicht mit Temperatur τ

$$U = \frac{3}{2} N\tau - \frac{aN^2}{V}. \quad (2)$$

Hierbei ist N die Anzahl der Teilchen, V das Volumen des Gases und a eine Konstante. Leiten Sie aus dieser Gleichung eine allgemeine Formel für die Entropie $\sigma(N, V, U)$ ab.

[P6] Quantenmechanischer Harmonischer Oszillator

Betrachten Sie N identische quantenmechanische harmonische Oszillatoren mit Eigenfrequenz ω . Die Energie-Eigenwerte eines einzelnen Oszillators sind $n_1 \hbar \omega$, $n_1 = 0, 1, 2, \dots$. (Die Nullpunktenergie spielt keine Rolle, darum ignorieren wir sie.) Alle Eigenwerte haben Multiplizität Eins. Wenn die N Oszillatoren sich auf den Energieniveaus (n_1, \dots, n_N) befinden, dann ist die Gesamtenergie des Systems

$$U = n \hbar \omega, \quad \text{mit} \quad n = \sum_{i=1}^N n_i. \quad (3)$$

- (a) Gesucht ist die Anzahl $g(N, n)$ zugänglicher Zustände für N Oszillatoren mit Gesamtenergie $U = n \hbar \omega$. Natürlich entspricht $g(N, n)$ der Anzahl an Möglichkeiten, mit der sich N nicht-negative ganze Zahlen zu n addieren können. Diese Zahl direkt zu bestimmen ist schwierig, darum benutzen wir einen Trick. Betrachten Sie die Funktion

$$f(t) := (1 - t)^{-N} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} t^n \right)^N = \sum_{n_1, \dots, n_N=0}^{\infty} t^{\sum_i n_i}. \quad (4)$$

Zeigen Sie durch geeignetes Anordnen der Terme in der Summe, dass

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} g(N, n) t^n. \quad (5)$$

Zeigen Sie jetzt durch wiederholtes Differenzieren, dass

$$g(N, n) = \frac{(N + n - 1)!}{n!(N - 1)!}. \quad (6)$$

- (b) Nehmen Sie an, dass sowohl $N \gg 1$ als auch $n \gg 1$ gilt. Finden Sie eine Näherung für die Entropie $\sigma(N, n)$ mit Hilfe der Stirling-Formel $\ln N! \simeq N \ln N - N$.
- (c) Zeigen Sie mit Hilfe obiger Näherung, dass für die Gesamtenergie $U = n \hbar \omega$ als Funktion der Temperatur τ gilt

$$U = \frac{N \hbar \omega}{e^{\hbar \omega / \tau} - 1}. \quad (7)$$

[P7] Zweizustandssystem

Gegeben sei ein System mit zwei Zuständen. Einer der Zustände habe Energie 0, der andere Energie ϵ . Das System befinde sich in thermischem Kontakt mit einem großen Reservoir der Temperatur τ . Drücken Sie die freie Energie F , den Erwartungswert der Energie U und die Entropie σ des Systems als Funktion von τ aus.

[P8] Energiefluktuation

Betrachten Sie ein System, das sich in thermischem Kontakt mit einem großen Reservoir der Temperatur τ befindet. Sei ϵ der Energieeigenwert des Systems, und sei $U = \langle \epsilon \rangle$ der Mittelwert der Energie. Zeigen Sie, dass

$$\langle (\epsilon - \langle \epsilon \rangle)^2 \rangle = \tau^2 C, \quad (1)$$

wobei

$$C = \frac{dU}{d\tau} \quad (2)$$

die Wärmekapazität des Systems ist.

[P9] Zustandssumme für unabhängige Systeme

- (a) Zeigen Sie für $x, y \in \mathbb{R}$, dass $e^{x+y} = e^x e^y$ gilt. Benutzen Sie dazu die Reihenentwicklung

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n. \quad (3)$$

Hinweis: Benutzen Sie die Relation

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k, \quad \text{mit} \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad (4)$$

- (b) Seien A und B Matrizen. Zeigen Sie, dass gilt

$$\text{tr}(A \otimes B) = \text{tr} A \text{tr} B. \quad (5)$$

- (c) Für ein Quantensystem mit Hamiltonoperator H bei Temperatur τ ist die Zustandssumme $Z = \text{tr} e^{-H/\tau}$. Betrachten Sie zwei unabhängige Quantensysteme mit Hamiltonoperatoren H_1 und H_2 , so dass der Hamiltonoperator des Gesamtsystems $H = H_1 \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes H_2$ ist. Die Zustandssummen der Einzelsysteme seien Z_1 und Z_2 . Zeigen Sie, dass für die Zustandssumme Z des Gesamtsystems gilt

$$Z = Z_1 Z_2. \quad (6)$$

Hinweis: Verallgemeinern Sie (a) auf geeignete Weise und verwenden Sie (b).

[P10] Differentialformen

Betrachten Sie die Mannigfaltigkeit $\Omega = \{(T, V) \in \mathbb{R}^2 \mid T, V > 0\}$ sowie die Funktion

$$p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad p(T, V) = \alpha \frac{T}{V}, \quad (1)$$

wobei $\alpha > 0$ eine Konstante ist. Sei $U : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Wir möchten U in den beiden Koordinatensystemen (T, V) und (T, p) auf Ω untersuchen, also $U(T, V)$ und $\tilde{U}(T, p) := U(T, V(T, p))$, wobei wir im weiteren $\tilde{U} = U$ schreiben.

- (a) Drücken Sie die Differentialformen dT und dV in den Koordinaten (T, p) aus, also in der Form $F_1 dT + F_2 dp$, wobei F_1 und F_2 Funktionen von T und p sind.
- (b) Schreiben Sie die partiellen Ableitungen $(\partial U / \partial T)_V$ und $(\partial U / \partial V)_T$ in den Koordinaten (T, p) , also als Kombinationen von $(\partial U / \partial T)_p$ und $(\partial U / \partial p)_T$ sowie Funktionen von T und p .
- (c) Schreiben Sie die Differentialform $\delta Q := dU + p dV$ in beiden Koordinatensystemen.

[P11] Teilchenerzeugung

Betrachten Sie Teilchen, die frei erzeugt und vernichtet werden. Jedes existierende Teilchen habe eine Masse M , eine Ruheenergie Mc^2 sowie eine (nicht-relativistische) kinetische Energie, wobei c die Lichtgeschwindigkeit ist. Das System befinde sich im thermischen Gleichgewicht bei Temperatur τ . Berechnen Sie den Erwartungswert der Teilchendichte $n = N/V$.

Bitte wenden

[P12] Zwei-Level Fermionen

Gegeben sei ein System unabhängiger, nicht unterscheidbarer Teilchen, bei dem jedes der Teilchen sich in einem von zwei Zuständen befinden kann. Einer der Zustände habe Energie 0, der andere Energie ϵ . Das System befinde sich im thermischen und diffusiven Gleichgewicht bei Temperatur τ und chemischem Potential μ . Das System habe weiter die Eigenschaft, dass keine zwei Teilchen denselben Zustand besetzen können.

- (a) Zeigen Sie durch Summation der Gibbs-Faktoren, dass die großkanonische Zustandssumme

$$\mathcal{Z} = (1 + \lambda)(1 + \lambda e^{-\epsilon/\tau}) \quad (2)$$

mit $\lambda = e^{\mu/\tau}$ ist.

- (b) Zeigen Sie durch Summation über alle Zustände, dass für den Erwartungswert der Teilchenzahl N gilt:

$$\langle N \rangle = \frac{\lambda(1 + e^{-\epsilon/\tau} + 2\lambda e^{-\epsilon/\tau})}{\mathcal{Z}}. \quad (3)$$

Verifizieren Sie die Beziehung

$$\langle N \rangle = \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \ln \mathcal{Z}. \quad (4)$$

- (c) Zeigen Sie auf die gleiche Weise, dass für den Erwartungswert der Energie U gilt

$$\langle U \rangle = \frac{\epsilon \lambda}{e^{\epsilon/\tau} + \lambda}. \quad (5)$$

Verifizieren Sie die Beziehung

$$\langle U \rangle = \tau^2 \frac{\partial}{\partial \tau} \ln \mathcal{Z}. \quad (6)$$

- (d) Die Zustandssumme \mathcal{Z} hat die Form $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_1 \mathcal{Z}_2$, mit $\mathcal{Z}_1 = 1 + \lambda$ und $\mathcal{Z}_2 = 1 + \lambda e^{-\epsilon/\tau}$. Dies legt die Identifikation zweier unabhängiger Systeme mit Zustandssummen \mathcal{Z}_i nahe. Welche Systeme sind dies?

[P13] Füllung von Orbitalen

Gegeben sei ein ideales Gas nicht unterscheidbarer fermionischer Teilchen bei Temperatur τ und chemischem Potential μ . Die Wahrscheinlichkeit $f(\epsilon)$ dafür, dass ein Energieniveau ϵ von einem Teilchen besetzt wird, ist durch die Fermi–Dirac Funktion

$$f(\epsilon) = \frac{1}{1 + e^{(\epsilon-\mu)/\tau}} \quad (1)$$

gegeben.

- (a) Geben Sie eine exakte Form für $f(\epsilon)$ im Limes $\tau \rightarrow 0$ an, und beweisen Sie, dass Ihre Antwort richtig ist.
- (b) Die Anzahl an Einteilchen-Energieniveaus unterhalb einer beliebigen Energie ϵ sei

$$G(\epsilon) = \epsilon \mathcal{D}, \quad (2)$$

wobei \mathcal{D} eine Konstante ist. Drücken Sie das chemische Potential μ bei Temperatur $\tau = 0$ als Funktion der Teilchenzahl N aus.

[P14] Integration einer Differentialform

In einem klassischen idealen Gas sei die Teilchenzahl N konstant. Gesucht ist die Entropie $\sigma(\tau, V)$ als Funktion der Temperatur τ und des Volumens V . Verwenden Sie die differentielle Beziehung

$$d\sigma(U, V) = \frac{1}{\tau} dU + \frac{p}{\tau} dV \quad (3)$$

sowie die Zustandsgleichung $pV = N\tau$ und den Ausdruck für die Energie $U = \frac{3}{2}N\tau$. Drücken Sie zuerst $d\sigma$ in den Koordinaten (τ, V) aus. Integrieren Sie dann den gewonnenen Ausdruck entlang eines Weges, um $\sigma(\tau, V)$ bis auf einen konstanten Term zu bestimmen. Verifizieren Sie, dass das Differential Ihres Ergebnisses tatsächlich (3) ergibt, $d\sigma$ darum geschlossen und die Wegintegration wohldefiniert ist.

[P15] Zustandsdichte in ein und zwei Dimensionen

Berechnen Sie die Zustandsdichte eines einzelnen freien Elektrons mit Spin $1/2$, Masse m und Energie ϵ für die folgenden beiden Fälle:

- (a) Das Elektron befinde sich in einem eindimensionalen Intervall der Länge L .
- (b) Das Elektron befinde sich in einem zweidimensionalen Quadrat der Fläche A .

[P16] Bosonen in zwei Dimensionen

Betrachten Sie ein ideales Gas spinloser Bosonen in einem zweidimensionalen Quadrat der Fläche A im großkanonischen Ensemble. Berechnen Sie die Fugazität λ als Funktion der Temperatur τ und der Teilchendichte $n = N/A$. Zeigen Sie, dass bei $\tau = 0$ gilt: $\lambda(\tau) = 1$, und alle Ableitungen von λ nach τ verschwinden.

[P17] Relativistisches Fermi-Gas

Für ein relativistisches Elektron mit Impuls p , dessen Energie ϵ groß ist gegenüber seiner Ruheenergie mc^2 , gilt

$$\epsilon \simeq pc. \quad (1)$$

Wenn sich solche relativistischen Elektronen in einem würfelförmigen Behälter mit Volumen $V = L^3$ befinden, dann sind ihre Impulse genauso quantisiert wie bei nicht-relativistischen Elektronen. Das heißt, die Eigenwerte der Impulskomponenten p_i sind weiterhin

$$p_i = \frac{\pi\hbar}{L}n_i, \quad n_i \in \mathbb{Z}_{>0}. \quad (2)$$

Berechnen Sie die Fermi-Energie ϵ_f eines Gases von N relativistischen Elektronen in solch einem Würfel. Nehmen Sie an, dass die Energie jedes einzelnen Elektrons die relativistische Form (1) hat. Zeigen Sie, dass für die Energie U_0 des Gases bei Temperatur Null gilt

$$U_0 = \frac{3}{4}N\epsilon_f. \quad (3)$$

[P18] Elektromagnetische Moden

- (a) Geben Sie die Energie-Eigenwerte des quantisierten elektromagnetischen Feldes in einem würfelförmigen Behälter der Seitenlänge L an. Vernachlässigen Sie die Nullpunktsenergie. Diskutieren Sie auch die Multiplizitäten der Eigenwerte.
- (b) Berechnen Sie für $\epsilon \gg \hbar c \pi / L$ die Zustandsdichte $D(\epsilon)$ je Energieeinheit, deren Integral von 0 bis ϵ die Anzahl erlaubter Moden mit Frequenz kleiner als $\omega = \epsilon / \hbar$ ergibt (multipliziert mit einem Faktor 2 für die beiden erlaubten transversalen Polarisierungen).

[P19] Strahlungsfeld der Sonne

Das Plancksche Strahlungsgesetz besagt, dass im thermischen Gleichgewicht bei Temperatur τ die Energie des elektromagnetischen Feldes je Volumeneinheit und je Frequenzeinheit

$$u_\omega = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3}{e^{\hbar\omega/\tau} - 1} \quad (1)$$

beträgt. Integration über die Frequenz ω ergibt für die Energiedichte

$$u = \int_0^\infty u_\omega d\omega = \frac{\pi^2}{15 \hbar^3 c^3} \tau^4. \quad (2)$$

Nehmen Sie an, dass sich das elektromagnetische Feld an der Sonnenoberfläche im thermischen Gleichgewicht befindet, und dass die resultierende Energie durch in zufällige Richtungen laufende Photonen abgestrahlt wird.

- (a) Bestimmen Sie das Maximum von u_ω als Funktion der Temperatur τ . Das Maximum der Strahlungsintensität der Sonne liegt bei

$$\omega_0 \simeq 2,14 \cdot 10^{15} \text{ Hz}. \quad (3)$$

Leiten Sie hieraus die ungefähre Oberflächentemperatur T_S in Kelvin ab.

Hinweis: Die Lösungen der Gleichung $1 - e^{-x} = x/3$ sind $x = 0$ und $x \simeq 2.82$.

- (b) Nehmen Sie an, die Energiedichte u verteile sich auf Photonen, welche sich mit Lichtgeschwindigkeit geradlinig in zufällige Richtungen fortbewegen. Zeigen Sie, dass für den Energiefluss (Leistung je Flächeneinheit) J , welcher die Sonnenoberfläche als thermische Strahlung verlässt, gilt

$$J = \frac{cu}{4}. \quad (4)$$

Hinweis: Stellen Sie sich ein Photonengas mit flacher Grenzfläche vor. Berechnen Sie, wie viele Photonen die Grenzfläche je Zeiteinheit passieren, wenn sie sich mit Lichtgeschwindigkeit geradlinig in zufällige Richtungen bewegen.

- (c) Berechnen Sie die Strahlungsleistung P_{S} der Sonne, also die Gesamtleistung, welche durch die Oberflächenstrahlung abgegeben wird.

Hinweis: Die Sonne hat einen Radius von $R_{\text{S}} \simeq 7 \cdot 10^8$ m.

- (d) Nehmen Sie an, die Erde absorbiere die Energie aller Photonen, die auf ihrer Oberfläche eintreffen. Welche Oberflächentemperatur muss die Erde haben, um dieselbe Leistung als thermische Strahlung wieder abzugeben?

Hinweis: Die Sonne befindet sich in einem Abstand $d \simeq 1,5 \cdot 10^{11}$ m von der Erde. Dies ist weit genug, um die Sonne als Punktquelle zu behandeln.

[P20] Thermodynamik Schwarzer Löcher

Wenn die Ausdehnung eines Systems mit Energie $E = Mc^2$ seinen Schwarzschild-Radius

$$R = \frac{2GM}{c^2} \quad (1)$$

unterschreitet, dann wird es zu einem Schwarzen Loch. Hierbei ist G die Newtonsche Gravitationskonstante. Die Oberfläche der Kugel mit Radius R heißt *Ereignishorizont*. Die Allgemeine Relativitätstheorie besagt, dass keine Materie oder Information aus dem Ereignishorizont austreten kann. Materie oder Information, welche durch den Ereignishorizont eintritt, kann das Schwarze Loch also nicht wieder verlassen.

Laut quantenfeldtheoretischen Rechnungen in der Schwarzschild-Raumzeit emittiert der Ereignishorizont eines Schwarzen Loches Schwarzkörperstrahlung der *Hawking-Unruh-Temperatur*

$$\tau = \frac{\hbar c^3}{8\pi GM} \quad (2)$$

- (a) Basierend auf seiner Energie und der Strahlungstemperatur lässt sich einem Schwarzen Loch eine Entropie σ zuordnen. Finden Sie einen Ausdruck für diese Entropie als Funktion des Radius R des Ereignishorizonts. Überraschenderweise ist die Entropie nicht proportional zum Volumen des Schwarzen Lochs, sondern zum Flächeninhalt des Ereignishorizonts.
- (b) Wie lange dauert es, bis ein Schwarzes Loch der Masse M zu Photonen zerfallen ist?

[P21] Irreversible Ausdehnung eines Fermi-Gases

Wenn der Sonne ihr Brennstoff für die Fusion ausgeht, wird sie unter ihrer eigenen Gravitationskraft kollabieren, bis diese Kraft durch den Entartungsdruck (Fermi-Druck) kompensiert wird. Sterne in diesem Zustand heißen „weiße Zwerge“. Der Entartungsdruck entsteht, weil keine zwei Elektronen (als Fermionen) denselben Quantenzustand besetzen können. Der weiße Zwerg wird seine verbleibende Wärmeenergie langsam abstrahlen. Am Ende dieses Prozesses wird er ein „Schwarzer Zwerg“. Letzterer Zustand werde als Fermi-Gas von Elektronen bei Nulltemperatur modelliert, mit einer Elektronendichte von $n = 10^{36} /\text{m}^3$.

Nehmen Sie an, die Gravitationskraft würde plötzlich abgestellt. Was wird mit dem Elektronengas passieren? Vernachlässigen Sie die Atomkerne sowie die Wechselwirkung der Elektronen untereinander. Gegen welche Grenztemperatur wird das System streben? Nehmen Sie an, es finde keinerlei Austausch mit einem anderen System statt. Die Masse eines Elektrons beträgt $m_e \simeq 9 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$. Weiter ist $\hbar \simeq 10^{-34} \text{ J s}$ sowie $k_B \simeq 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$.

[P22] Teilchen-Antiteilchen-Gleichgewicht

Das Positron p ist das Antiteilchen des Elektrons e . Beide haben Spin $1/2$ und dieselbe Masse M ; ihre elektrischen Ladungen haben denselben Absolutwert, aber entgegengesetzte Vorzeichen. Um ein Elektron-Positron-Paar im Vakuum zu erzeugen, wird eine Energie Δ benötigt (kinetische Energie nicht mitgerechnet). Gesucht ist der Erwartungswert der Elektronendichte n im thermischen Gleichgewicht als Funktion von Δ , M und der Temperatur τ , unter Vernachlässigung aller Wechselwirkungen.

- (a) Bestimmen Sie n mit Hilfe des Massenwirkungsgesetzes.
- (b) Wir möchten n direkt aus fundamentalen Prinzipien ableiten, beginnend mit der Boltzmann-Verteilung des Gesamtsystems bei Temperatur τ . Drücken Sie die großkanonische Zustandssumme \mathcal{Z} des Gesamtsystems als Summe über die Anzahl an Teilchenpaaren aus, unter der Annahme dass es sich um freie Teilchen in einem kubischen Volumen $V = L^3$ handelt.

Hinweis: Die Zustandssumme für ein freies Teilchen im Volumen $V = L^3$ ist

$$\int_{\mathbb{R}_+^3} d\vec{n} e^{-T(\vec{n})/\tau} = V n_Q, \quad n_Q = \left(\frac{2\pi\hbar^2}{M\tau} \right)^{-3/2}. \quad (1)$$

Hierbei ist \vec{n} der Wellenzahlvektor, $T(\vec{n}) = \vec{p}^2/2m$, $\vec{p} = \hbar\pi\vec{n}/L$, und das Integral faktorisiert in drei Gauß-Integrale $\int_0^\infty e^{-ax^2} dx = \sqrt{\pi/4a}$.

- (c) Nehmen Sie an, dass in der Boltzmann-Summe Terme mit vielen Teilchenpaaren dominieren, und benutzen Sie die Stirling-Formel für $N!$ um zu zeigen, dass

$$Z \simeq \cosh(4V e^{-\Delta/2\tau} n_Q). \quad (2)$$

- (d) Berechnen Sie mit Hilfe der Zustandssumme aus (c) die Elektronendichte n im Grenzwert $V \rightarrow \infty$ großen Volumens.

[P23] Thermodynamik der Supraleitung

Ein supraleitendes Metall wird zum Normalleiter, wenn seine Temperatur über die kritische Temperatur τ_c steigt, oder falls bei Temperatur $\tau < \tau_c$ ein Magnetfeld angelegt wird, welches die kritischer Feldstärke $B_c(\tau)$ übersteigt. Die Differenz der freien Energie pro Volumeneinheit zwischen der normalleitenden und der supraleitenden Phase eines Supraleiters beträgt

$$\frac{F_N(\tau) - F_S(\tau)}{V} = \frac{B_c^2(\tau)}{2\mu_0}, \quad (3)$$

wobei μ_0 die Vakuumpemreabilität ist (eine Naturkonstante aus der Theorie des Elektromagnetismus). Bei der Übergangstemperatur τ_c verschwindet die Differenz der freien Energien.

- (a) Berechnen Sie die Differenz der Entropien der beiden Phasen bei der Übergangstemperatur $\tau = \tau_c$. Zeigen Sie, dass die Energien der beiden Phasen bei der Übergangstemperatur übereinstimmen.
- (b) Für $\tau < \tau_c$ hat die supraleitende Phase die niedrigere Energie. In Abwesenheit eines Magnetfeldes ist der Übergang bei $\tau = \tau_c$ frei von latenter Wärme. Wie groß ist die latente Wärme des Phasenübergangs von der supraleitenden in die normalleitende Phase in Gegenwart eines Magnetfeldes?
- (c) Finden Sie die Differenz $C_S - C_N$ der Wärmekapazitäten pro Volumeneinheit der beiden Phasen. Die Wärmekapazität kann experimentell gemessen werden. Man findet, dass $C_S \ll C_N$ bei $\tau \ll \tau_c$. Zeigen Sie mit Hilfe des „dritten Hauptsatzes der Thermodynamik“ ($\sigma = 0$ bei $\tau = 0$), dass für $\tau \ll \tau_c$ gilt:

$$C_N \simeq -\frac{\tau}{\mu_0} \left(B_c \frac{d^2 B_c}{d\tau^2} \right)_{\tau=0}. \quad (4)$$

[P24] Ginsburg–Landau Theorie der Supraleitung

Die Ginsburg–Landau Theorie (aufgestellt 1950 von Witali Ginsburg und Lew Landau, Nobelpreis für Ginsburg 2003) ist ein phänomenologisches Modell der Supraleitung. In diesem Modell wird der lokale Zustand eines (dreidimensionalen) Supraleiters durch einen ortsabhängigen Ordnungsparameter $\psi(x) \in \mathbb{C}$ beschrieben. Der Parameter $\psi(x)$ hat Ähnlichkeit mit einer quantenmechanischen Wellenfunktion, ist aber kein reiner Quantenzustand. Sein Betragsquadrat $|\psi(x)|^2$ kann als lokale Dichte mikroskopischer Träger der Supraleitung aufgefasst werden. Der normalleitende Zustand ist durch $\psi(x) = 0$ für alle x gegeben.

Das Landau-Funktional für die freie Energie bei Temperatur τ in Abhängigkeit der Funktion $\psi(x)$ und des elektromagnetischen Potentials $\vec{A}(x)$ (einem reellen Vektorfeld) ist

$$F(\psi, \vec{A}) = F_0 + \alpha(\tau)\|\psi\|^2 + \frac{\beta}{2}\|\psi^2\|^2 + \frac{1}{2m}\|(-i\hbar\vec{\nabla} + q\vec{A})\psi\|^2 + \frac{1}{2\mu_0}\|\vec{\nabla} \times \vec{A}\|^2. \quad (1)$$

Hierbei sind

$$\|\psi\|^2 := \int d^3x |\psi(x)|^2 \quad \text{und} \quad \|\vec{v}\|^2 := \int d^3x \sum_{i=1}^3 |v_i(x)|^2 \quad (2)$$

die (quadrierten) Normen für (komplexe) Skalarfelder $\psi(x)$ und Vektorfelder $\vec{v}(x)$. Der Integrationsbereich ist jeweils das gesamte Volumen V des Materials. Weiter ist $\vec{\nabla}$ („nabla“) der Gradientenoperator, und $\vec{\nabla} \times \vec{A}$ ist die Rotation des Vektorfeldes \vec{A} . Die Parameter m und q sind die effektive Masse und die Ladung der mikroskopischen Träger der Supraleitung. Außerdem ist

$$\alpha(\tau) = \alpha_0(\tau - \tau_c) \quad \text{mit} \quad \alpha_0 > 0 \quad \text{und} \quad \tau_c > 0, \quad (3)$$

und $\beta > 0$ ist *nicht* die inverse Temperatur, sondern eine phänomenologische Konstante. F_0 ist die (von τ unabhängige) freie Energie der normalleitenden Phase.

Der Gleichgewichtszustand von $\psi(x)$ ist derjenige Zustand, welcher die freie Energie $F(\psi)$ minimiert.

Bitte wenden

- (a) Betrachten Sie den Fall ohne elektromagnetisches Potential ($\vec{A}(x) = 0$ für alle x). Charakterisieren Sie alle homogenen (im Raum konstanten) Gleichgewichtszustände ψ als Funktion von α_0 und τ .
- (b) Nehmen Sie triviale (Dirichlet) Randbedingungen an. Zeigen Sie, dass F stationär gegenüber Variationen von ψ ist falls

$$0 = \alpha(\tau)\psi(x) + \beta|\psi(x)|^2\psi(x) + \frac{1}{2m}(-i\hbar\vec{\nabla} + q\vec{A})^2\psi. \quad (4)$$

Hierbei steht $(-i\hbar\vec{\nabla} + q\vec{A})^2$ für die zweimalige Hintereinanderausführung des Differentialoperators $(-i\hbar\vec{\nabla} + q\vec{A})$.

- (c) Es sei ψ_∞ eine der in (a) gefundenen nichttrivialen Gleichgewichtslösungen für $\tau < \tau_c$. Betrachten Sie kleine Störungen

$$\psi(x) = \psi_\infty(1 - g(x)) \quad (5)$$

dieser Lösung, wobei $g(x)$ reell ist. Zeigen Sie durch Linearisieren von (4), dass $g(x)$ für $\vec{A} = 0$ die Helmholtz-Gleichung

$$\Delta g(x) \equiv (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla})g(x) = -\frac{4m\alpha}{\hbar^2}g(x) \quad (6)$$

erfüllen muss.

- (d) Betrachten Sie die supraleitende Phase in der linearisierten Form wie in (c), und nehmen Sie an, dass g nur entlang der Richtung $x = (0, 0, z)$ variiert, ansonsten aber konstant ist. Zeigen Sie, dass

$$g(0, 0, z) = g(0) e^{-\sqrt{2}z/\xi} \quad (7)$$

eine Lösung ist, und bestimmen Sie die *Kohärenzlänge* ξ .

- (e) Nehmen Sie an, ψ sei homogen (also konstant), und zeigen Sie, dass $F(\psi, \vec{A})$ stationär gegenüber lokalen Variationen des elektromagnetischen Potentials $\vec{A}(x)$ ist, falls

$$\vec{j} \equiv \frac{\vec{\nabla} \times B}{\mu_0} \equiv \frac{\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times A)}{\mu_0} = -\frac{q^2}{m}|\psi|^2\vec{A}. \quad (8)$$

Dies ist die *London-Gleichung*. Sie beschreibt das Potential \vec{A} innerhalb des Supraleiters und erklärt, warum Supraleiter Magnetfelder abschirmen: Weil Ströme im ungehindert (ohne Widerstand) fließen können, werden eindringende Magnetfelder durch kompensierende Ströme ausgeglichen (ähnlich wie elektrische Felder in Normalleitern durch Verschiebung der elektrischen Ladungen ausgeglichen werden).

[P25] Bethe–Peierls Näherung für das Ising-Modell

Das Ising-Modell für ein Gitter aus Spinfreiheitsgraden ist durch den Hamiltonoperator $H_{\text{exakt}} = -J \sum_{(i,j)} \sigma_i \sigma_j$ gegeben, wobei $\sigma_i \in \{-1, +1\}$ die z -Komponente des Spins am Gitterplatz i ist und die Summation über Paare (i, j) direkt benachbarter Gitterplätze läuft. Eine verbesserte Molekularfeldtheorie für dieses Modell lässt sich wie folgt konstruieren: Die Wechselwirkung eines ausgewählten Spins σ_0 mit seinen n direkten Nachbarn wird exakt behandelt. Den Wechselwirkungen dieser Nachbarn mit weiteren Gitterplätzen wird durch das Molekularfeld h' Rechnung getragen, welches nur auf die n Nachbarn $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ von σ_0 wirkt. Der resultierende Hamiltonoperator für den Spin σ_0 und seine direkten Nachbarn lautet also

$$H_{\text{BP}} = -h' \sum_{j=1}^n \sigma_j - J \sum_{j=1}^n \sigma_0 \sigma_j = -(h' + J\sigma_0) \sum_{j=1}^n \sigma_j. \quad (1)$$

Der Hamiltonoperator für das Gesamtsystem wird angenähert durch

$$H_{\text{exakt}} \simeq \frac{N}{n+1} H_{\text{BP}}. \quad (2)$$

Der exakte Hamiltonoperator H_{exakt} ist translationsinvariant, also sollte es keine Rolle spielen, welcher Spin σ_0 ausgewählt wird. Dies ergibt die Konsistenzbedingung $\langle \sigma_0 \rangle = \langle \sigma_j \rangle$ (für beliebiges j), welche das Molekularfeld h' festlegt.

- (a) Zeigen Sie, dass die Zustandssumme $Z(h', \tau)$ für H_{BP} die Form $Z = Z_+ + Z_-$ hat, mit

$$Z_{\pm} = \left[2 \cosh \left(\frac{h' \pm J}{\tau} \right) \right]^n. \quad (3)$$

- (b) Drücken Sie die Erwartungswerte $\langle \sigma_0 \rangle$ und $\langle \sigma_j \rangle$ als Funktionen von h' aus.
(c) Zeigen Sie, dass $h' = 0$ eine Lösung der Konsistenzbedingung $\langle \sigma_0 \rangle = \langle \sigma_j \rangle$ ist.
(d) Zeigen Sie, dass die Konsistenzbedingung äquivalent ist zu

$$\frac{h'}{\tau} = \frac{n-1}{2} \ln \frac{\cosh(h'/\tau + J/\tau)}{\cosh(h'/\tau - J/\tau)}. \quad (4)$$

- (e) Die Bedingung (4) hat eine nichttriviale Lösung, falls $\tau < \tau_c$, mit einer Übergangstemperatur τ_c . Überprüfen Sie diese Feststellung, indem Sie die rechte Seite von (4) in h'/τ bis zur Ordnung $(h'/\tau)^3$ entwickeln. Finden Sie so Näherungen für τ_c sowie für h' nahe $\tau = \tau_c$. Überzeugen Sie sich, dass die Reihenentwicklung für $\tau \simeq \tau_c$ verlässlich ist und darum ein sinnvolles Ergebnis liefert.

[P26] **Kramers–Wannier-Dualität im zweidimensionalen Ising-Modell**

Das translationsinvariante Ising-Modell auf einem zweidimensionalen quadratischen Gitter mit periodischen Randbedingungen ohne externes Magnetfeld wird durch den Hamiltonoperator

$$H = -J \sum_{(i,j)} \sigma_i \sigma_j, \quad J > 0 \quad (1)$$

beschrieben, wobei $\sigma_i = \pm 1$ die z -Komponente des Spins am Gitterplatz i ist, und die Summe über Paare (i, j) benachbarter Gitterplätze läuft. Diese Paare werden im Folgenden „Kanten“ genannt. Es sei N die Gesamtanzahl der Gitterplätze, und $L = 2N$ die Gesamtanzahl der Kanten. Es ist bekannt, dass dieses System bei einer kritischen Temperatur τ_c einen Phasenübergang besitzt. Bei Nulltemperatur $\tau = 0$ haben alle Spins denselben Wert, also entweder $\sigma_i = +1$ für alle i oder $\sigma_i = -1$ für alle i . Diese beiden Zustände sind die *Grundzustände* des Systems.

- (a) Schreiben Sie die Energie E_0 der Grundzustände als Funktion von N und L .
- (b) Betrachten Sie die geordnete Phase bei $\tau < \tau_c$. Jede Konfiguration der Spins lässt sich von einem der Grundzustände durch Umkehren einer Untermenge aller Spins erreichen. Einige der Spins in der Untermenge können benachbart sein. Die Energie der so erreichten Konfiguration hängt nur von der Anzahl ℓ der Kanten ab, welche die Regionen umgekehrter Spins begrenzen. Es sei $g(\ell)$ die Anzahl möglicher Untermengen aller Spins, welche durch ℓ Kanten begrenzt werden. Zum Beispiel ist $g(0) = 2$ (kein Spin oder alle Spins werden umgekehrt), und der nächste von Null verschiedene Wert ist $g(4) = 2N$ (ein Spin oder $N - 1$ Spins werden umgekehrt). Drücken Sie die Zustandssumme Z durch die Funktion $g(\ell)$ aus. Warum kann man die so geschriebene Zustandssumme als Niedrigtemperaturentwicklung auffassen?
- (c) Gesucht ist eine Hochtemperaturentwicklung der Zustandssumme Z . Zeigen Sie hierzu zuerst

$$e^{J\sigma_i\sigma_j/\tau} = \cosh(J/\tau)(1 + w\sigma_i\sigma_j), \quad (2)$$

wobei $w = \tanh(J/\tau)$ ist. Benutzen Sie, dass σ_j nur die Werte $+1$ und -1 annehmen kann. Wenn τ groß ist, wird w klein. Benutzen Sie (2), um die Zustandssumme Z als Potenzreihe in w zu schreiben.

Hinweis: Die Potenzreihe enthält dieselbe Funktion $g(\ell)$ wie in (b).

- (d) Aus den beiden Reihenentwicklungen für Z aus (b) und (c) wird deutlich, dass es eine zu τ „duale“ Temperatur τ^* gibt, für welche

$$A(\tau) Z(\tau) = B(\tau^*) Z(\tau^*) \quad (3)$$

für beliebige N gilt. Die Identität gilt Term für Term in den Reihenentwicklungen. A und B sind termunabhängige Vorfaktoren, die von N , J und τ bzw. τ^* abhängen. Finden Sie den Zusammenhang zwischen τ und τ^* , und ebenso den genauen Zusammenhang zwischen $Z(\tau)$ und $Z(\tau^*)$. Zeigen Sie auch, dass $\tau^* \rightarrow \infty$ für $\tau \rightarrow 0$.

Optional: Schreiben Sie die aus (b) und (c) folgenden Ausdrücke für die freie Energie je Spin f im thermodynamischen Limes $N \rightarrow \infty$, sowie die aus (3) folgende Identität für diese.

- (e) Am Punkt der kritischen Temperatur τ_c ist die freie Energie f nicht analytisch. Aus der Identität (3) folgt, dass die freie Energie auch am Punkt τ_c^* nicht analytisch ist, also auch τ_c^* eine kritische Temperatur mit Phasenübergang ist (A und B sind analytische Funktionen). Unter der Annahme, dass es nur einen Phasenübergang gibt, muss $\tau_c = \tau_c^*$ gelten. Zeigen Sie, dass

$$\tau_c = \frac{2J}{\ln(1 + \sqrt{2})}. \quad (4)$$

[P27] Dezimierung des zweidimensionalen Ising-Modells

Das zweidimensionale Ising-Modell auf einem quadratischen Gitter mit homogenen Wechselwirkungen zwischen nächsten und übernächsten Nachbarn sowie externem Magnetfeld h genügt dem Hamiltonoperator H , mit

$$-\frac{H}{\tau} = K \sum_{k \in E} \sigma_{k_1} \sigma_{k_2} + L \sum_{d \in D} \sigma_{d_1} \sigma_{d_2} + h \sum_i \sigma_i. \quad (1)$$

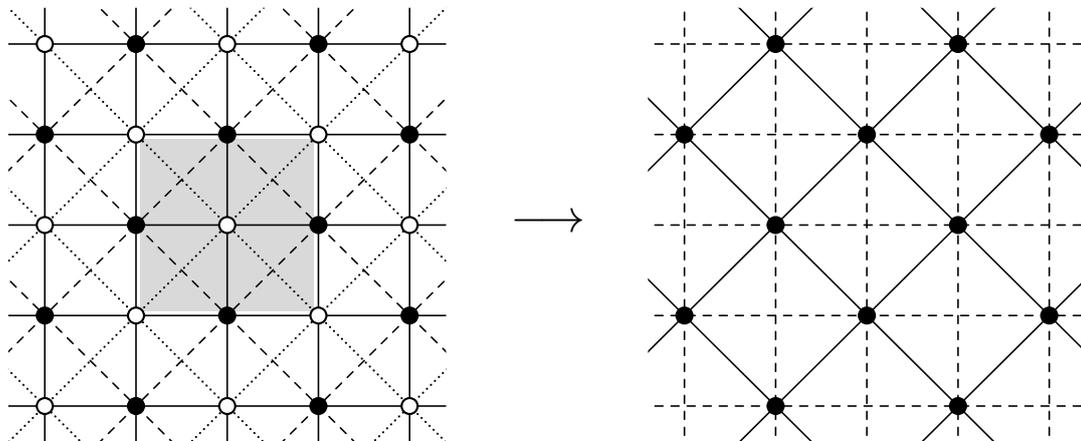
Hierbei ist E die Menge aller Kanten (Paare nächster Nachbarn) des Gitters, D ist die Menge aller Diagonalen (Paare übernächster Nachbarn), und $k_i, d_i, i = 1, 2$, bezeichnen die Gitterplätze an den Endpunkten der Kanten/Diagonalen. Die letzte Summe läuft über alle Gitterplätze.

Es sei N die Anzahl aller Gitterplätze. Das Gesamtgitter werde wie ein Schachbrett in zwei Teilgitter A und B zerlegt, welche jeweils die Hälfte aller Gitterplätze belegen, so dass jeder Gitterplatz in A nur nächste Nachbarn in B hat, und umgekehrt. S_A sei die Menge aller möglichen Spinkonfigurationen auf Teilgitter A , S_B die Menge aller möglichen Konfigurationen auf Teilgitter B .

Vernachlässigen Sie alle Effekte am Rand des Gitters. Berechnen Sie den effektiven Hamiltonoperator H' bis zur Ordnung 2 in K und bis zur Ordnung 1 in L und h (vernachlässigen Sie Terme $\sim Lh$), so dass für die Zustandssumme Z gilt:

$$Z = \sum_{S_A, S_B} e^{-H/\tau} \simeq \sum_{S_B} e^{-H'/\tau}. \quad (2)$$

Zeigen Sie, dass H und H' bis auf einen konstanten Term die gleiche Form haben, und schreiben Sie die Renormalisierungsgleichungen für die Parameter K, L und h .



Links: Ursprüngliches Gitter mit Teilgitter A (weiße Punkte) und Teilgitter B (schwarze Punkte), Kanten E (durchgezogen, Wechselwirkung K) und Diagonalen D (gepunktet/gestrichelt, Wechselwirkung L). *Hervorhebung:* Gitterplatz im Teilgitter A mit Wechselwirkungen zu den nächsten und übernächsten Nachbarn. **Rechts:** Dezimiertes Gitter (nach Summation über S_A).

[P28] Temperaturprofil im Erdinneren

- (a) Erweitern Sie die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = D_{\tau} \vec{\nabla}^2 \tau \quad (1)$$

um einen Quellterm g_u , welcher eine Wärmeerzeugungsrate je Volumeneinheit darstellt, mit Maßeinheit $[g_u] = \text{J}/(\text{s m}^3)$.

- (b) Für den Wärmehaushalt im Erdinneren wird ein solcher Quellterm durch den Zerfall radioaktiver Elemente realisiert. Lösen Sie die erweiterte Wärmeleitungsgleichung für den Fall der Erdkugel. Nehmen Sie dabei an, dass die Oberflächentemperatur konstant $\tau_0 = 280 \text{ K}$ beträgt, die Temperaturverteilung im Erdinneren zeitunabhängig ist, und dass sowohl die Wärmeerzeugungsrate g_u als auch die Wärmeleitfähigkeit K konstant und ortsunabhängig sind.
- (c) Wenn die Temperatur im Erdmittelpunkt 6000 K und die Wärmeleitfähigkeit $K \simeq 3 \text{ J}/(\text{s m K})$ beträgt, wie hoch ist dann die Wärmeerzeugungsrate g_u ? Der Erdradius beträgt $R_E \simeq 6,4 \cdot 10^6 \text{ m}$, und $k_B \simeq 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$.

Bitte wenden

[P29] Ehrenfest'sches Urnenmodell zur Irreversibilität

Das Erscheinen der Irreversibilität in statistischen Systemen kann gut durch ein einfaches Urnenmodell dargestellt werden. Betrachten Sie N durchnummerierte Kugeln, welche sich in beliebiger Weise auf zwei Urnen U_0 und U_1 verteilen. In jedem Zeitschritt wird eine zufällige Zahl zwischen 1 und N gezogen und die entsprechende Kugel aus ihrer Urne genommen und in die andere Urne gelegt. Die mikroskopischen Zustände des Systems sind durch $x = (x_1, \dots, x_N)$ gegeben, mit $x_i = a$, $a \in \{0, 1\}$, wenn Kugel i sich in Urne U_a befindet. Als makroskopische Observable wird die Zahl n der Kugeln in Urne U_1 genommen.

- (a) Welche mikroskopischen Zustände sind benachbart? Wie groß sind die mikroskopischen Übergangswahrscheinlichkeiten? Welches ist die mikroskopische Gleichgewichtsverteilung $p_{\text{eq}}(x)$?
- (b) Geben Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit (Übergangswahrscheinlichkeit) $T_{n,n'}$ an, in Urne U_1 n' Kugeln zu finden, wenn sie im vorigen Schritt n Kugeln enthielt. Finden Sie die makroskopische Gleichgewichtsverteilung $P_{\text{eq}}(n)$, und zeigen Sie, dass detailliertes Gleichgewicht gilt:

$$P_{\text{eq}}(n) T_{n,n'} = P_{\text{eq}}(n') T_{n',n}. \quad (2)$$

- (c) Es sei n_t die Zahl der Kugeln in Urne U_1 zum Zeitpunkt t . Betrachten Sie die Zufallsvariable $f(\tau) := n_{N\tau}/N$. Berechnen Sie zu gegebenem $f(\tau)$ den Erwartungswert $\langle f(\tau + 1/N) \rangle$ und gewinnen Sie hieraus eine Differentialgleichung für den Erwartungswert $\langle f(\tau) \rangle$ im Grenzwert $N \rightarrow \infty$. Lösen Sie die Differentialgleichung. Finden und lösen Sie auf die gleiche Weise die Differentialgleichung für die Varianz $\sigma^2(\tau) = \langle f(\tau)^2 \rangle - \langle f(\tau) \rangle^2$. Interpretieren Sie das Ergebnis.
- (d) Simulieren Sie das System für $N = 8/16/32$, z. B. mit Hilfe numerierter Karten.

8

16

24

32

7

15

23

31

6

14

22

30

5

13

21

29

4

12

20

28

3

11

19

27

2

10

18

26

1

9

17

25