Vorlesung: *Prof. Dr. O. Lechtenfeld*	**Statistische Physik**	Übungskoordination: *Dr. T. Bargheer*

Präsenzübung, Blatt 12 **WiSe 2018/19** **17.1.2019**

[P26] Kramers–Wannier-Dualität im zweidimensionalen Ising-Modell

Das translationsinvariante Ising-Modell auf einem zweidimensionalen quadratischen Gitter mit periodischen Randbedingungen ohne externes Magnetfeld wird durch den Hamiltonoperator

$$H = -J \sum_{(i,j)} \sigma_i \sigma_j\,, \qquad J > 0 \tag{1}$$

beschrieben, wobei $\sigma_i = \pm 1$ die z-Komponente des Spins am Gitterplatz i ist, und die Summe über Paare (i,j) benachbarter Gitterplätze läuft. Diese Paare werden im Folgenden „Kanten" genannt. Es sei N die Gesamtanzahl der Gitterplätze, und $L = 2N$ die Gesamtanzahl der Kanten. Es ist bekannt, dass dieses System bei einer kritischen Temperatur τ_c einen Phasenübergang besitzt. Bei Nulltemperatur $\tau = 0$ haben alle Spins denselben Wert, also entweder $\sigma_i = +1$ für alle i oder $\sigma_i = -1$ für alle i. Diese beiden Zustände sind die *Grundzustände* des Systems.

(a) Schreiben Sie die Energie E_0 der Grundzustände als Funktion von N und L.

(b) Betrachten Sie die geordnete Phase bei $\tau < \tau_\mathrm{c}$. Jede Konfiguration der Spins lässt sich von einem der Grundzustände durch Umkehren einer Untermenge aller Spins erreichen. Einige der Spins in der Untermenge können benachbart sein. Die Energie der so erreichten Konfiguration hängt nur von der Anzahl ℓ der Kanten ab, welche die Regionen umgekehrter Spins begrenzen. Es sei $g(\ell)$ die Anzahl möglicher Untermengen aller Spins, welche durch ℓ Kanten begrenzt werden. Zum Beispiel ist $g(0) = 2$ (kein Spin oder alle Spins werden umgekehrt), und der nächste von Null verschiedene Wert ist $g(4) = 2N$ (ein Spin oder $N-1$ Spins werden umgekehrt). Drücken Sie die Zustandssumme Z durch die Funktion $g(\ell)$ aus. Warum kann man die so geschriebene Zustandssumme als Niedrigtemperaturentwicklung auffassen?

(c) Gesucht ist eine Hochtemperaturentwicklung der Zustandssumme Z. Zeigen Sie hierzu zuerst

$$\mathrm{e}^{J\sigma_i\sigma_j/\tau} = \cosh(J/\tau)(1 + w\sigma_i\sigma_j)\,, \tag{2}$$

wobei $w = \tanh(J/\tau)$ ist. Benutzen Sie, dass σ_j nur die Werte $+1$ und -1 annehmen kann. Wenn τ groß ist, wird w klein. Benutzen Sie (2), um die Zustandssumme Z als Potenzreihe in w zu schreiben.

Hinweis: Die Potenzreihe enthält dieselbe Funktion $g(\ell)$ wie in (b).

(d) Aus den beiden Reihenentwicklungen für Z aus (b) und (c) wird deutlich, dass es eine zu τ „duale“ Temperatur τ^* gibt, für welche

$$A(\tau)\, Z(\tau) = B(\tau^*)\, Z(\tau^*) \tag{3}$$

für beliebige N gilt. Die Identität gilt Term für Term in den Reihenentwicklungen. A und B sind termunabhängige Vorfaktoren, die von N, J und τ bzw. τ^* abhängen. Finden Sie den Zusammenhang zwischen τ und τ^*, und ebenso den genauen Zusammenhang zwischen $Z(\tau)$ und $Z(\tau^*)$. Zeigen Sie auch, dass $\tau^* \to \infty$ für $\tau \to 0$.

Optional: Schreiben Sie die aus (b) und (c) folgenden Ausdrücke für die freie Energie je Spin f im thermodynamischen Limes $N \to \infty$, sowie die aus (3) folgende Identität für diese.

(e) Am Punkt der kritischen Temperatur τ_c ist die freie Energie f nicht analytisch. Aus der Identität (3) folgt, dass die freie Energie auch am Punkt τ_c^* nicht analytisch ist, also auch τ_c^* eine kritische Temperatur mit Phasenübergang ist (A und B sind analytische Funktionen). Unter der Annahme, dass es nur einen Phasenübergang gibt, muss $\tau_\mathrm{c} = \tau_\mathrm{c}^*$ gelten. Zeigen Sie, dass

$$\tau_\mathrm{c} = \frac{2J}{\ln(1+\sqrt{2})}\,. \tag{4}$$