

[P25] Bethe–Peierls Näherung für das Ising-Modell

Das Ising-Modell für ein Gitter aus Spinfreiheitsgraden ist durch den Hamiltonoperator $H_{\text{exakt}} = -J \sum_{(i,j)} \sigma_i \sigma_j$ gegeben, wobei $\sigma_i \in \{-1, +1\}$ die z -Komponente des Spins am Gitterplatz i ist und die Summation über Paare (i, j) direkt benachbarter Gitterplätze läuft. Eine verbesserte Molekularfeldtheorie für dieses Modell lässt sich wie folgt konstruieren: Die Wechselwirkung eines ausgewählten Spins σ_0 mit seinen n direkten Nachbarn wird exakt behandelt. Den Wechselwirkungen dieser Nachbarn mit weiteren Gitterplätzen wird durch das Molekularfeld h' Rechnung getragen, welches nur auf die n Nachbarn $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ von σ_0 wirkt. Der resultierende Hamiltonoperator für den Spin σ_0 und seine direkten Nachbarn lautet also

$$H_{\text{BP}} = -h' \sum_{j=1}^n \sigma_j - J \sum_{j=1}^n \sigma_0 \sigma_j = -(h' + J\sigma_0) \sum_{j=1}^n \sigma_j. \quad (1)$$

Der Hamiltonoperator für das Gesamtsystem wird angenähert durch

$$H_{\text{exakt}} \simeq \frac{N}{n+1} H_{\text{BP}}. \quad (2)$$

Der exakte Hamiltonoperator H_{exakt} ist translationsinvariant, also sollte es keine Rolle spielen, welcher Spin σ_0 ausgewählt wird. Dies ergibt die Konsistenzbedingung $\langle \sigma_0 \rangle = \langle \sigma_j \rangle$ (für beliebiges j), welche das Molekularfeld h' festlegt.

- (a) Zeigen Sie, dass die Zustandssumme $Z(h', \tau)$ für H_{BP} die Form $Z = Z_+ + Z_-$ hat, mit

$$Z_{\pm} = \left[2 \cosh \left(\frac{h' \pm J}{\tau} \right) \right]^n. \quad (3)$$

- (b) Drücken Sie die Erwartungswerte $\langle \sigma_0 \rangle$ und $\langle \sigma_j \rangle$ als Funktionen von h' aus.
(c) Zeigen Sie, dass $h' = 0$ eine Lösung der Konsistenzbedingung $\langle \sigma_0 \rangle = \langle \sigma_j \rangle$ ist.
(d) Zeigen Sie, dass die Konsistenzbedingung äquivalent ist zu

$$\frac{h'}{\tau} = \frac{n-1}{2} \ln \frac{\cosh(h'/\tau + J/\tau)}{\cosh(h'/\tau - J/\tau)}. \quad (4)$$

- (e) Die Bedingung (4) hat eine nichttriviale Lösung, falls $\tau < \tau_c$, mit einer Übergangstemperatur τ_c . Überprüfen Sie diese Feststellung, indem Sie die rechte Seite von (4) in h'/τ bis zur Ordnung $(h'/\tau)^3$ entwickeln. Finden Sie so Näherungen für τ_c sowie für h' nahe $\tau = \tau_c$. Überzeugen Sie sich, dass die Reihenentwicklung für $\tau \simeq \tau_c$ verlässlich ist und darum ein sinnvolles Ergebnis liefert.