[P22] Teilchen-Antiteilchen-Gleichgewicht

Das Positron p ist das Antiteilchen des Elektrons e. Beide haben Spin 1/2 und dieselbe Masse M; ihre elektrischen Ladungen haben denselben Absolutwert, aber entgegengesetzte Vorzeichen. Um ein Elektron-Positron-Paar im Vakuum zu erzeugen, wird eine Energie $\mathit{\Delta}$ benötigt (kinetische Energie nicht mitgerechnet). Gesucht ist der Erwartungswert der Elektronendichte n im thermischen Gleichgewicht als Funktion von $\mathit{\Delta}$, M und der Temperatur τ, unter Vernachlässigung aller Wechselwirkungen.

(a) Bestimmen Sie n mit Hilfe des Massenwirkungsgesetzes.

(b) Wir möchten n direkt aus fundamentalen Prinzipien ableiten, beginnend mit der Boltzmann-Verteilung des Gesamtsystems bei Temperatur τ. Drücken Sie die großkanonische Zustandssumme $\mathcal{Z}$ des Gesamtsystems als Summe über die Anzahl an Teilchenpaaren aus, unter der Annahme dass es sich um freie Teilchen in einem kubischen Volumen $V = L^3$ handelt.

Hinweis: Die Zustandssumme für ein freies Teilchen im Volumen $V = L^3$ ist

$$\int_{\mathbb{R}^3_+} \mathrm{d}\vec{n}\, \mathrm{e}^{-T(\vec{n})/\tau} = V n_{\mathrm{Q}}\,, \qquad n_{\mathrm{Q}} = \left(\frac{2\pi\hbar^2}{M\tau}\right)^{-3/2}. \tag{1}$$

Hierbei ist $\vec{n}$ der Wellenzahlvektor, $T(\vec{n}) = \vec{p}^2/2m$, $\vec{p} = \hbar\pi\vec{n}/L$, und das Integral faktorisiert in drei Gauß-Integrale $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi/4a}$.

(c) Nehmen Sie an, dass in der Boltzmann-Summe Terme mit vielen Teilchenpaaren dominieren, und benutzen Sie die Stirling-Formel für $N!$ um zu zeigen, dass

$$Z \simeq \cosh(4V\,\mathrm{e}^{-\mathit{\Delta}/2\tau} n_{\mathrm{Q}})\,. \tag{2}$$

(d) Berechnen Sie mit Hilfe der Zustandssumme aus (c) die Elektronendichte n im Grenzwert $V \to \infty$ großen Volumens.

[P23] Thermodynamik der Supraleitung

Ein supraleitendes Metall wird zum Normalleiter, wenn seine Temperatur über die kritische Temperatur τ_c steigt, oder falls bei Temperatur $\tau < \tau_\mathrm{c}$ ein Magnetfeld angelegt wird, welches die kritischer Feldstärke $B_\mathrm{c}(\tau)$ übersteigt. Die Differenz der freien Energie pro Volumeneinheit zwischen der normalleitenden und der supraleitenden Phase eines Supraleiters beträgt

$$\frac{F_\mathrm{N}(\tau) - F_\mathrm{S}(\tau)}{V} = \frac{B_\mathrm{c}^2(\tau)}{2\mu_0}\,, \tag{3}$$

wobei μ_0 die Vakuumpermeabilität ist (eine Naturkonstante aus der Theorie des Elektromagnetismus). Bei der Übergangstemperatur τ_c verschwindet die Differenz der freien Energien.

(a) Berechnen Sie die Differenz der Entropien der beiden Phasen bei der Übergangstemperatur $\tau = \tau_\mathrm{c}$. Zeigen Sie, dass die Energien der beiden Phasen bei der Übergangstemperatur übereinstimmen.

(b) Für $\tau < \tau_\mathrm{c}$ hat die supraleitende Phase die niedrigere Energie. In Abwesenheit eines Magnetfeldes ist der Übergang bei $\tau = \tau_\mathrm{c}$ frei von latenter Wärme. Wie groß ist die latente Wärme des Phasenübergangs von der supraleitenden in die normalleitende Phase in Gegenwart eines Magnetfeldes?

(c) Finden Sie die Differenz $C_\mathrm{S} - C_\mathrm{N}$ der Wärmekapazitäten pro Volumeneinheit der beiden Phasen. Die Wärmekapazität kann experimentell gemessen werden. Man findet, dass $C_\mathrm{S} \ll C_\mathrm{N}$ bei $\tau \ll \tau_\mathrm{c}$. Zeigen Sie mit Hilfe des „dritten Hauptsatzes der Thermodynamik“ ($\sigma = 0$ bei $\tau = 0$), dass für $\tau \ll \tau_\mathrm{c}$ gilt:

$$C_\mathrm{N} \simeq -\frac{\tau}{\mu_0}\left(B_\mathrm{c}\frac{\mathrm{d}^2 B_\mathrm{c}}{\mathrm{d}\tau^2}\right)_{\tau=0}\,. \tag{4}$$