

[P20] Thermodynamik Schwarzer Löcher

Wenn die Ausdehnung eines Systems mit Energie $E = Mc^2$ seinen Schwarzschild-Radius

$$R = \frac{2GM}{c^2} \quad (1)$$

unterschreitet, dann wird es zu einem Schwarzen Loch. Hierbei ist G die Newtonsche Gravitationskonstante. Die Oberfläche der Kugel mit Radius R heißt *Ereignishorizont*. Die Allgemeine Relativitätstheorie besagt, dass keine Materie oder Information aus dem Ereignishorizont austreten kann. Materie oder Information, welche durch den Ereignishorizont eintritt, kann das Schwarze Loch also nicht wieder verlassen.

Laut quantenfeldtheoretischen Rechnungen in der Schwarzschild-Raumzeit emittiert der Ereignishorizont eines Schwarzen Loches Schwarzkörperstrahlung der *Hawking-Unruh-Temperatur*

$$\tau = \frac{\hbar c^3}{8\pi GM} \quad (2)$$

- (a) Basierend auf seiner Energie und der Strahlungstemperatur lässt sich einem Schwarzen Loch eine Entropie σ zuordnen. Finden Sie einen Ausdruck für diese Entropie als Funktion des Radius R des Ereignishorizonts. Überraschenderweise ist die Entropie nicht proportional zum Volumen des Schwarzen Lochs, sondern zum Flächeninhalt des Ereignishorizonts.
- (b) Wie lange dauert es, bis ein Schwarzes Loch der Masse M zu Photonen zerfallen ist?

[P21] Irreversible Ausdehnung eines Fermi-Gases

Wenn der Sonne ihr Brennstoff für die Fusion ausgeht, wird sie unter ihrer eigenen Gravitationskraft kollabieren, bis diese Kraft durch den Entartungsdruck (Fermi-Druck) kompensiert wird. Sterne in diesem Zustand heißen „weiße Zwerge“. Der Entartungsdruck entsteht, weil keine zwei Elektronen (als Fermionen) denselben Quantenzustand besetzen können. Der weiße Zwerg wird seine verbleibende Wärmeenergie langsam abstrahlen. Am Ende dieses Prozesses wird er ein „Schwarzer Zwerg“. Letzterer Zustand werde als Fermi-Gas von Elektronen bei Nulltemperatur modelliert, mit einer Elektronendichte von $n = 10^{36} / \text{m}^3$.

Nehmen Sie an, die Gravitationskraft würde plötzlich abgestellt. Was wird mit dem Elektronengas passieren? Vernachlässigen Sie die Atomkerne sowie die Wechselwirkung der Elektronen untereinander. Gegen welche Grenztemperatur wird das System streben? Nehmen Sie an, es finde keinerlei Austausch mit einem anderen System statt. Die Masse eines Elektrons beträgt $m_e \simeq 9 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$. Weiter ist $\hbar \simeq 10^{-34} \text{ J s}$ sowie $k_B \simeq 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$.