

[P18] Elektromagnetische Moden

- (a) Geben Sie die Energie-Eigenwerte des quantisierten elektromagnetischen Feldes in einem würfelförmigen Behälter der Seitenlänge L an. Vernachlässigen Sie die Nullpunktsenergie. Diskutieren Sie auch die Multiplizitäten der Eigenwerte.
- (b) Berechnen Sie für $\epsilon \gg \hbar c \pi / L$ die Zustandsdichte $D(\epsilon)$ je Energieeinheit, deren Integral von 0 bis ϵ die Anzahl erlaubter Moden mit Frequenz kleiner als $\omega = \epsilon / \hbar$ ergibt (multipliziert mit einem Faktor 2 für die beiden erlaubten transversalen Polarisierungen).

[P19] Strahlungsfeld der Sonne

Das Plancksche Strahlungsgesetz besagt, dass im thermischen Gleichgewicht bei Temperatur τ die Energie des elektromagnetischen Feldes je Volumeneinheit und je Frequenzeinheit

$$u_\omega = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3}{e^{\hbar\omega/\tau} - 1} \quad (1)$$

beträgt. Integration über die Frequenz ω ergibt für die Energiedichte

$$u = \int_0^\infty u_\omega d\omega = \frac{\pi^2}{15 \hbar^3 c^3} \tau^4. \quad (2)$$

Nehmen Sie an, dass sich das elektromagnetische Feld an der Sonnenoberfläche im thermischen Gleichgewicht befindet, und dass die resultierende Energie durch in zufällige Richtungen laufende Photonen abgestrahlt wird.

- (a) Bestimmen Sie das Maximum von u_ω als Funktion der Temperatur τ . Das Maximum der Strahlungsintensität der Sonne liegt bei

$$\omega_0 \simeq 2,14 \cdot 10^{15} \text{ Hz}. \quad (3)$$

Leiten Sie hieraus die ungefähre Oberflächentemperatur T_S in Kelvin ab.

Hinweis: Die Lösungen der Gleichung $1 - e^{-x} = x/3$ sind $x = 0$ und $x \simeq 2.82$.

- (b) Nehmen Sie an, die Energiedichte u verteile sich auf Photonen, welche sich mit Lichtgeschwindigkeit geradlinig in zufällige Richtungen fortbewegen. Zeigen Sie, dass für den Energiefluss (Leistung je Flächeneinheit) J , welcher die Sonnenoberfläche als thermische Strahlung verlässt, gilt

$$J = \frac{cu}{4}. \quad (4)$$

Hinweis: Stellen Sie sich ein Photonengas mit flacher Grenzfläche vor. Berechnen Sie, wie viele Photonen die Grenzfläche je Zeiteinheit passieren, wenn sie sich mit Lichtgeschwindigkeit geradlinig in zufällige Richtungen bewegen.

- (c) Berechnen Sie die Strahlungsleistung P_{S} der Sonne, also die Gesamtleistung, welche durch die Oberflächenstrahlung abgegeben wird.

Hinweis: Die Sonne hat einen Radius von $R_{\text{S}} \simeq 7 \cdot 10^8$ m.

- (d) Nehmen Sie an, die Erde absorbiere die Energie aller Photonen, die auf ihrer Oberfläche eintreffen. Welche Oberflächentemperatur muss die Erde haben, um dieselbe Leistung als thermische Strahlung wieder abzugeben?

Hinweis: Die Sonne befindet sich in einem Abstand $d \simeq 1,5 \cdot 10^{11}$ m von der Erde. Dies ist weit genug, um die Sonne als Punktquelle zu behandeln.