

[P15] Zustandsdichte in ein und zwei Dimensionen

Berechnen Sie die Zustandsdichte eines einzelnen freien Elektrons mit Spin $1/2$, Masse m und Energie ϵ für die folgenden beiden Fälle:

- (a) Das Elektron befinde sich in einem eindimensionalen Intervall der Länge L .
- (b) Das Elektron befinde sich in einem zweidimensionalen Quadrat der Fläche A .

[P16] Bosonen in zwei Dimensionen

Betrachten Sie ein ideales Gas spinloser Bosonen in einem zweidimensionalen Quadrat der Fläche A im großkanonischen Ensemble. Berechnen Sie die Fugazität λ als Funktion der Temperatur τ und der Teilchendichte $n = N/A$. Zeigen Sie, dass bei $\tau = 0$ gilt: $\lambda(\tau) = 1$, und alle Ableitungen von λ nach τ verschwinden.

[P17] Relativistisches Fermi-Gas

Für ein relativistisches Elektron mit Impuls p , dessen Energie ϵ groß ist gegenüber seiner Ruheenergie mc^2 , gilt

$$\epsilon \simeq pc. \quad (1)$$

Wenn sich solche relativistischen Elektronen in einem würfelförmigen Behälter mit Volumen $V = L^3$ befinden, dann sind ihre Impulse genauso quantisiert wie bei nicht-relativistischen Elektronen. Das heißt, die Eigenwerte der Impulskomponenten p_i sind weiterhin

$$p_i = \frac{\pi\hbar}{L}n_i, \quad n_i \in \mathbb{Z}_{>0}. \quad (2)$$

Berechnen Sie die Fermi-Energie ϵ_f eines Gases von N relativistischen Elektronen in solch einem Würfel. Nehmen Sie an, dass die Energie jedes einzelnen Elektrons die relativistische Form (1) hat. Zeigen Sie, dass für die Energie U_0 des Gases bei Temperatur Null gilt

$$U_0 = \frac{3}{4}N\epsilon_f. \quad (3)$$