

**[P10] Differentialformen**

Betrachten Sie die Mannigfaltigkeit  $\Omega = \{(T, V) \in \mathbb{R}^2 \mid T, V > 0\}$  sowie die Funktion

$$p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad p(T, V) = \alpha \frac{T}{V}, \quad (1)$$

wobei  $\alpha > 0$  eine Konstante ist. Sei  $U : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine differenzierbare Funktion. Wir möchten  $U$  in den beiden Koordinatensystemen  $(T, V)$  und  $(T, p)$  auf  $\Omega$  untersuchen, also  $U(T, V)$  und  $\tilde{U}(T, p) := U(T, V(T, p))$ , wobei wir im weiteren  $\tilde{U} = U$  schreiben.

- (a) Drücken Sie die Differentialformen  $dT$  und  $dV$  in den Koordinaten  $(T, p)$  aus, also in der Form  $F_1 dT + F_2 dp$ , wobei  $F_1$  und  $F_2$  Funktionen von  $T$  und  $p$  sind.
- (b) Schreiben Sie die partiellen Ableitungen  $(\partial U / \partial T)_V$  und  $(\partial U / \partial V)_T$  in den Koordinaten  $(T, p)$ , also als Kombinationen von  $(\partial U / \partial T)_p$  und  $(\partial U / \partial p)_T$  sowie Funktionen von  $T$  und  $p$ .
- (c) Schreiben Sie die Differentialform  $\delta Q := dU + p dV$  in beiden Koordinatensystemen.

**[P11] Teilchenerzeugung**

Betrachten Sie Teilchen, die frei erzeugt und vernichtet werden. Jedes existierende Teilchen habe eine Masse  $M$ , eine Ruheenergie  $Mc^2$  sowie eine (nicht-relativistische) kinetische Energie, wobei  $c$  die Lichtgeschwindigkeit ist. Das System befinde sich im thermischen Gleichgewicht bei Temperatur  $\tau$ . Berechnen Sie den Erwartungswert der Teilchendichte  $n = N/V$ .

**Bitte wenden**

### [P12] Zwei-Level Fermionen

Gegeben sei ein System unabhängiger, nicht unterscheidbarer Teilchen, bei dem jedes der Teilchen sich in einem von zwei Zuständen befinden kann. Einer der Zustände habe Energie 0, der andere Energie  $\epsilon$ . Das System befinde sich im thermischen und diffusiven Gleichgewicht bei Temperatur  $\tau$  und chemischem Potential  $\mu$ . Das System habe weiter die Eigenschaft, dass keine zwei Teilchen denselben Zustand besetzen können.

- (a) Zeigen Sie durch Summation der Gibbs-Faktoren, dass die großkanonische Zustandssumme

$$\mathcal{Z} = (1 + \lambda)(1 + \lambda e^{-\epsilon/\tau}) \quad (2)$$

mit  $\lambda = e^{\mu/\tau}$  ist.

- (b) Zeigen Sie durch Summation über alle Zustände, dass für den Erwartungswert der Teilchenzahl  $N$  gilt:

$$\langle N \rangle = \frac{\lambda(1 + e^{-\epsilon/\tau} + 2\lambda e^{-\epsilon/\tau})}{\mathcal{Z}}. \quad (3)$$

Verifizieren Sie die Beziehung

$$\langle N \rangle = \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \ln \mathcal{Z}. \quad (4)$$

- (c) Zeigen Sie auf die gleiche Weise, dass für den Erwartungswert der Energie  $U$  gilt

$$\langle U \rangle = \frac{\epsilon \lambda}{e^{\epsilon/\tau} + \lambda}. \quad (5)$$

Verifizieren Sie die Beziehung

$$\langle U \rangle = \tau^2 \frac{\partial}{\partial \tau} \ln \mathcal{Z}. \quad (6)$$

- (d) Die Zustandssumme  $\mathcal{Z}$  hat die Form  $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_1 \mathcal{Z}_2$ , mit  $\mathcal{Z}_1 = 1 + \lambda$  und  $\mathcal{Z}_2 = 1 + \lambda e^{-\epsilon/\tau}$ . Dies legt die Identifikation zweier unabhängiger Systeme mit Zustandssummen  $\mathcal{Z}_i$  nahe. Welche Systeme sind dies?