Vorlesung:	**Statistische Physik**	Übungskoordination:
Prof. Dr. O. Lechtenfeld		*Dr. T. Bargheer*

Präsenzübung, Blatt 1 **WiSe 2018/19** **18.10.2018**

[P1] Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Betrachten Sie ein System von N Spins, welche sich jeweils im Zustand „up“ oder „down“ befinden können. Da nichts weiteres über den Zustand bekannt ist, haben alle Zustände die gleiche Wahrscheinlichkeit $p = 2^{-N}$.

Angenommen, man misst jetzt die Differenz zwischen der Anzahl der „up“ und der Anzahl der „down“ Spins (zum Beispiel durch Messung des Magnetfeldes), und findet dass die Differenz den festen Wert $2s$ annimmt. Welche Wahrscheinlichkeit muss man jeder Konfiguration des Systems mit dieser neuen Information zuweisen?

[P2] Einzelne Spins

Betrachten Sie nun eine große Anzahl N von Spins, welche sich wiederum jeweils im Zustand „up“ oder „down“ befinden können. Sei $2s$ die Differenz zwischen der Anzahl der „up“ und der Anzahl der „down“ Spins. In der Gegenwart eines externen magnetischen Feldes B ist die Gesamtenergie des Systems

$$U = -2smB \tag{1}$$

für eine Konstante m.

Angenommen, alle möglichen Konfigurationen sind gleich wahrscheinlich. Geben Sie die ungefähre Wahrscheinlichkeit dafür an, dass man einen bestimmten Spin im Zustand „up“ findet, unter der Bedingung, dass die Gesamtenergie U beträgt.

[P3] Shannon-Entropie

Die *Shannon-Entropie* $S(P)$ einer Wahrscheinlichkeitsverteilung $P = \{p_1, \dots, p_n\}$ mit $p_i > 0$ und $\sum_i p_i = 1$ ist definiert als

$$S(P) = \sum_i p_i \ln \frac{1}{p_i} = -\sum_i p_i \ln p_i \,. \tag{2}$$

(a) Wie hoch ist die Shannon-Entropie im Fall gleichverteilter Wahrscheinlichkeiten?

(b) Finden Sie das Minimum und das Maximum von S bei vorgegebener Anzahl n möglicher Ergebnisse. Für welche Wahrscheinlichkeitsverteilungen werden Minimum und Maximum erreicht?

Hinweis: Der Logarithmus ist eine konkave Funktion.

(c) Zeigen Sie, dass die Entropie einer Wahrscheinlichkeitsverteilung von zwei unabhängigen Systemen gleich der Summe der Entropien der einzelnen Systeme ist.

(d) Die Eigenwerte eines Quantenzustands ρ (Dichtematrix) bilden eine Wahrscheinlichkeitsverteilung. Die Shannon-Entropie $S(\rho)$ einer solchen Verteilung heißt *von-Neumann-Entropie* von ρ. Wie kann $S(\rho)$ kompakt durch ρ ausgedrückt werden?