[H20] Van-der-Waals-Gas (5 Punkte)

Betrachten Sie ein Van-der-Waals-Gas mit fester Teilchenzahl N.

(a) Drücken Sie die Entropie σ des Gases als Funktion des Volumens V und der Temperatur τ aus. (Benutzen Sie die Quantenkonzentration $n_{\mathrm{Q}} \sim \tau^{3/2}$.)

(b) Drücken Sie die Gesamtenergie U ebenfalls als Funktion von V und τ aus.

(c) Drücken Sie die Enthalpie $H = U + pV$ sowohl als Funktion von τ und V aus, als auch als Funktion von τ und dem Druck p. Beschränken Sie sich in beiden Fällen auf Terme erster Ordnung in den Parametern a (Kohäsionsdruck) und b (Kovolumen).

Bitte wenden

[H21] Phasenübergang erster Ordnung im Kristall (7 Punkte)

Betrachten Sie einen Kristall, dessen Struktur sich in zwei möglichen Phasen α und β befinden kann. Bei niedrigen Temperaturen sei die α-Phase stabil, bei hohen Temperaturen die β-Phase. Die Energiedichte hat einen temperaturabhängigen elastischen Anteil $U_{\mathrm{el}}(\tau)$ und einen konstanten Nullpunktsanteil $U(0)$. Beide Anteile sind phasenabhängig. Der elastische Anteil besteht aus Anregungen akustischer Moden (Phononen). Am Temperaturnullpunkt ist die elastische Energiedichte gleich Null: $U_{\mathrm{el}}(0) = 0$.

Der Energienullpunkt sei gegeben durch den Zustand, bei dem alle Atome unendlich weit separiert sind. Die Energiedichte $U(0)$ bei $\tau = 0$ ist dann negativ. Bei $\tau = 0$ ist die stabile Phase diejenige geringerer Energiedichte, also ist $U_\alpha(0) < U_\beta(0)$.

(a) Bei Temperaturen weit unter der *Debye-Temperatur* θ beträgt die Energiedichte U von Phononen

$$U = c\tau^4\,, \quad c = \frac{3\pi^4}{5(k_{\mathrm{B}}\theta)^3}\frac{N}{V}\,, \quad \theta = \frac{\hbar v}{k_{\mathrm{B}}}\left(6\pi^2\frac{N}{V}\right)^{1/3} \qquad \Rightarrow \qquad c = \frac{\pi^2}{10\hbar^3 v^3}\,. \tag{1}$$

Hierbei ist v die Schallgeschwindigkeit. Zeigen Sie, dass die Dichte F_{el} der freien Energie von Phononen in einem Festkörper bei Temperaturen weit unterhalb der Debye-Temperatur $-\pi^2\tau^4/(30\hbar^3 v^3)$ beträgt. Verwenden Sie die obige Debye-Näherung, mit Geschwindigkeit v für alle Phononen.

(b) Zeigen Sie, dass für die Übergangstemperatur τ_{c} zwischen den beiden Phasen gilt

$$\tau_{\mathrm{c}}^4 = \frac{30\hbar^2}{\pi^2}\frac{U_\beta(0) - U_\alpha(0)}{v_\beta^{-3} - v_\alpha^{-3}}\,. \tag{2}$$

Die Gleichung hat eine endliche reelle Lösung, falls $v_\beta < v_\alpha$ (siehe die Bemerkung unten). Die Relation (2) modelliert eine Klasse tatsächlicher Phasenübergänge in Festkörpern.

(c) Die latente Wärme eines Phasenübergangs ist die thermische Energie, die aufgewendet werden muss, um den Phasenübergang zu vollziehen. Zeigen Sie, dass für die latente Wärme L in diesem Modell gilt:

$$L = 4\Big(U_\beta(0) - U_\alpha(0)\Big)\,. \tag{3}$$

Hinweis: Da es sich um einen Festkörper handelt, können Sie eine mögliche Änderung der Teilchendichte oder des Drucks zwischen den beiden Phasen vernachlässigen.

Bemerkung: Kleinere Schallgeschwindigkeiten gehen mit geringeren Elastizitätsmoduln einher und bedingen größere Amplituden der thermischen Anregungen. Im vorliegenden Modell hat die β-Phase die geringere Schallgeschwindigkeit. Bei stärkerer thermischer Anregung ist die Entropie größer und die freie Energie geringer. Weiche Systeme sind typischerweise bei hohen Temperaturen stabil, harte Systeme bei geringen Temperaturen.