

[H11] Doppelbesetzungs-Statistik

(6 Punkte)

Betrachten Sie ein "Gas" nicht-wechselwirkender ununterscheidbarer Teilchen mit nicht-entarteten diskreten Energie-Eigenwerten ϵ_j , $j = 1, 2, \dots, J$, in dem jedes Energieniveau von keinem, einem oder zwei, *aber nicht mehr* Teilchen besetzt werden kann.

- (a) Nehmen Sie zunächst an, dass nur ein einziges Energieniveau ϵ_j zugänglich ist. Dann muss sich jedes vorhandene Teilchen auf dem Energieniveau ϵ_j befinden, und der einzige Freiheitsgrad des System ist die Anzahl N existenter Teilchen. Bestimmen Sie die großkanonische Zustandssumme \mathcal{Z}_j bei gegebener Temperatur τ und gegebenem chemischen Potential μ .
- (b) Betrachten Sie jetzt alle Energieniveaus $j = 1, 2, \dots, J$. Sei \mathcal{Z} die entsprechende großkanonische Zustandssumme. Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_1 \mathcal{Z}_2 \dots \mathcal{Z}_J. \quad (1)$$

Dies bedeutet, dass die Energieniveaus als unabhängige Systeme betrachtet werden können. Der Zustand jedes einzelnen Systems ist durch seine Besetzungszahl charakterisiert.

- (c) Berechnen Sie den Erwartungswert der Besetzungszahl $f(\epsilon_j)$ für das Energieniveau ϵ_j .
- (d) Es sei $f_c(\epsilon) = e^{-(\epsilon-\mu)/\tau}$ der „klassische“ Erwartungswert für die Besetzungszahl der Energieniveaus ϵ . Zeigen Sie, dass $f(\epsilon) \rightarrow f_c(\epsilon)$ für $(\epsilon - \mu)/\tau \rightarrow \infty$.
- (e) Ist das System äquivalent zu einem System von Fermionen mit den gleichen Energieniveaus, bei dem aber nun jedes Energieniveau Multiplizität 2 hat? Begründen Sie Ihre Antwort, indem Sie für ein einzelnes Energieniveau die Zustandssumme und den Erwartungswert der Besetzungszahl berechnen.

Bitte wenden

[H12] Poisson-Verteilung**(6 Punkte)**

Betrachten Sie ein ideales Gas ununterscheidbarer Teilchen. Die kanonische Zustandssumme bei Temperatur τ und fester Teilchenzahl N sowie festem Volumen V ist

$$Z_N = \frac{1}{N!} (n_Q V)^N, \quad (2)$$

wobei n_Q die Quantenkonzentration ist.

- (a) Nehmen Sie an, das Gas befinde sich im thermischen und diffusiven Gleichgewicht, mit Erwartungswert n für die Teilchendichte und festem Volumen V . Es sei $P(N)$ die Wahrscheinlichkeit, genau N Teilchen vorzufinden. Zeigen Sie, dass

$$P(N) = \frac{(nV)^N e^{-nV}}{N!}. \quad (3)$$

Dies ist die Poisson-Verteilung.

- (b) Zeigen Sie, dass tatsächlich

$$\sum_{N=0}^{\infty} P(N) = 1 \quad \text{und} \quad \sum_{N=0}^{\infty} NP(N) = nV. \quad (4)$$