[H8] Gibbssches Paradoxon (5 Punkte)

Die kanonische Zustandssumme eines freien Teilchens der Masse M bei festem Volumen V ist

$$Z_1 = n_{\mathrm{Q}}(\tau)V\,, \tag{1}$$

mit

$$n_{\mathrm{Q}}(\tau) = \left(\frac{M\tau}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}\,. \tag{2}$$

(a) Betrachten Sie N unabhängige aber *unterscheidbare* Teilchen obiger Art. Zeigen Sie, dass für die Entropie $\sigma(N,V)$ gilt

$$\sigma(N,V) = N\ln(n_{\mathrm{Q}}(\tau)V) + \frac{3}{2}N\,. \tag{3}$$

(b) Gegeben seien zwei identische Behältnisse mit Volumina V bei Temperatur τ. Jedes der Behältnisse enthalte N unterscheidbare Teilchen. Berechnen Sie die Gesamtentropie des Systems. Zeigen Sie, dass die Gesamtentropie von der Entropie eines einzelnen Behälters mit Volumen $2V$ und $2N$ Teilchen bei der gleichen Temperatur um

$$\Delta\sigma = -2N\ln 2 \tag{4}$$

abweicht. Dies bedeutet, dass die Entropie willkürlich um einen endlichen Beitrag erhöht oder gesenkt werden kann, indem man einen Gasbehälter durch Einsetzen einer Wand in zwei getrennte Bereiche teilt oder eine solche Wand entfernt. Dieses Verhalten widerspricht den Grundsätzen der Thermodynamik.

(c) Führen Sie die gleiche Rechnung für den Fall *nicht unterscheidbarer* Teilchen durch. Zeigen Sie, dass in diesem Fall für $N \gg 1$ gilt:

$$\Delta\sigma \simeq 0\,. \tag{5}$$

Bitte wenden

[H9] Gas im Potential **(4 Punkte)**

Gegeben sei ein klassisches Teilchen mit Phasenraumkoordinaten (x, p) und Hamiltonfunktion

$$H(x,p) = t(p) + v(x)\,, \tag{6}$$

wobei t und v reelle Funktionen seien. Die Position x sei auf ein gegebenes Volumen V eingeschränkt. Für die Berechnung von Zustandssummen oder Entropien legen wir zugrunde, dass das Maß im Zustandsraum (Phasenraum) $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}p/h$ ist. Sei Z_1 die kanonische Zustandssumme des Einteilchensystems bei Temperatur τ im Fall $v(x) = 0$.

Betrachten Sie mehrere unabhängige und *ununterscheidbare* Teilchen obiger Art im großkanonischen Ensemble.

(a) Zeigen Sie für allgemeines $v(x)$, dass für die großkanonische Zustandssumme $\mathcal{Z}$ bei Temperatur τ und Fugazität $\lambda = \mathrm{e}^{\mu/\tau}$ gilt

$$\mathcal{Z} = \exp\left(\frac{\lambda Z_1}{V}\int \mathrm{e}^{-v(x)/\tau}\mathrm{d}x\right)\,. \tag{7}$$

(b) Zeigen Sie, wieder für allgemeines $v(x)$, dass für die mittlere Teilchenzahl $\langle N\rangle$ gilt

$$\langle N\rangle = \frac{Z_1}{V}\int \mathrm{e}^{(\mu - v(x))/\tau}\mathrm{d}x\,. \tag{8}$$

[H10] Zentrifuge **(3 Punkte)**

Betrachten Sie einen Kreiszylinder mit Radius R und Länge L, der mit Winkelgeschwindigkeit ω um seine Symmetrieachse rotiert, und der ein ideales Gas aus Teilchen der Masse M enthält. Das System befinde sich im thermischen Gleichgewicht bei Temperatur τ. Im mit dem Zylinder rotierenden Bezugssystem befinde sich das Gas in Ruhe. Nehmen Sie kleine Geschwindigkeiten für die Teilchen an, so dass Corioliskräfte vernachlässigbar sind.

Sei $n(0)$ die erwartete Teilchendichte auf der Rotationsachse. Zeigen Sie, dass die erwartete Teilchendichte im Abstand r zur Rotationsachse gegeben ist durch

$$n(r) = n(0)\,\mathrm{e}^{M\omega^2 r^2/(2\tau)}\,. \tag{9}$$

Hinweis: Betrachten Sie ein kleines Volumen im Abstand r von der Rotationsachse. Das Volumen befindet sich im thermischen und diffusiven Gleichgewicht mit dem restlichen Gas und unterliegt einem zentrifugalen Potential $v(r)$. Benutzen Sie dann das Ergebnis von [H9]. Die Zustandssumme für ein Teilchen der Masse M in einem Volumen V bei Temperatur τ hat die Form

$$Z_1 = \left(\frac{\tau}{\alpha}\right)^{3/2} V\,, \tag{10}$$

mit einer festen Energie $\alpha > 0$.