

[H1] Gesetz großer Zahlen

(6 Punkte)

Eine Münze werde N mal geworfen. Für große N erwartet man, dass Kopf und Zahl ungefähr gleich oft oben liegen. Dies wollen wir präzisieren.

- (a) Schätzen Sie für große N die Wahrscheinlichkeit ab, dass die Münze genau $N/2$ mal Kopf zeigt.
- (b) Zeigen Sie für große N , dass die Wahrscheinlichkeit, zwischen $N/2 - \sqrt{N}$ und $N/2 + \sqrt{N}$ mal Kopf zu erhalten, unabhängig von N ist.

Hinweis: Benutzen Sie die Stirling-Formel sowie ggf. weitere Resultate aus der Vorlesung.

[H2] Ideales Gas

(6 Punkte)

Betrachten Sie N unterscheidbare freie Teilchen, die jeweils durch drei ganzzahlige Impulskomponenten $(k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{Z}^3$ beschrieben sind, und deren kinetische Energie U proportional zu $\sum_i k_i^2$ ist.

- (a) Zeigen Sie für große U und N , dass die Zahl möglicher Zustände mit Gesamtenergie zwischen U und $U + \epsilon$ mit $\epsilon \ll U$ die Form

$$g(N, U) \simeq \epsilon f(N) U^{3N/2} \quad (1)$$

hat, wobei $f(N)$ eine (unbestimmte) Funktion von N ist.

Hinweis: Betrachten Sie zuerst die Zahl möglicher Zustände mit Energie *kleiner* als U , und leiten Sie diese nach U ab. Das Volumen einer n -dimensionalen Kugel mit Radius r ist proportional zu r^n .

- (b) Betrachten Sie zwei solcher Systeme, mit Teilchenzahlen N_1 und N_2 , die in thermischem Kontakt stehen, d. h. alle Zustände mit Gesamtenergie zwischen U und $U + \epsilon$ sind gleich wahrscheinlich. Welches ist der wahrscheinlichste Wert für die Energie U_1 des Systems mit N_1 Teilchen?

Hinweis: Die Frage kann beantwortet werden, ohne die Funktion $f(N)$ zu kennen.