Einführung in die Quantentheorie

Präsenzübungen

Leibniz Universität Hannover, Sommersemester 2018

Vorlesung: PROF. DR. O. LECHTENFELD

Übungsaufgaben: DR. TILL BARGHEER

Inhaltsverzeichnis

1 Blatt 1	3
2 Blatt 2	5
3 Blatt 3	7
4 Blatt 4	9
5 Blatt 5	11
6 Blatt 6	13
7 Blatt 7	15
8 Blatt 8	17
9 Blatt 9	19
10 Blatt 10	21
11 Blatt 11	23
12 Blatt 12	25
13 Blatt 13	27
14 Blatt 14	29

Einführung in die Quantentheorie

Präsenzübung, Blatt 1

SoSe 2018

10./11.04.2018

[P1] Hermitesche Konjugation

Seien M eine 2×2 Matrix, $|\phi\rangle$ und $|\psi\rangle$ beliebige Zustandsvektoren sowie λ eine komplexe Zahl. Man zeige:

- (a) $\langle\phi|M|\psi\rangle^* = \langle\psi|M^\dagger|\phi\rangle$,
- (b) $M|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle \Rightarrow \langle\psi|M^\dagger = \lambda^*\langle\psi|$.

[P2] Eigenwerte und Eigenvektoren einer hermiteschen Matrix

Gegeben sei die hermitesche Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 7 & \sqrt{2} + i \\ \sqrt{2} - i & 5 \end{pmatrix}.$$

- (a) Bestimmen Sie die Eigenwerte a_i der Matrix A .
- (b) Bestimmen Sie die Eigenvektoren $|\Psi_i\rangle$ und normieren Sie diese ($\langle\Psi_i|\Psi_i\rangle = 1$).

[P3] Entwicklung nach einer Basis

Entwickeln Sie

$$|\Psi\rangle \doteq \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 3 \\ 2i \end{pmatrix}$$

nach den orthogonalen (?) Basisvektoren

$$|\Psi_1\rangle \doteq \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} + i \\ -1 \end{pmatrix}, \quad |\Psi_2\rangle \doteq \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} - i \end{pmatrix}.$$

Gesucht ist also $|\Psi\rangle = c_1|\Psi_1\rangle + c_2|\Psi_2\rangle$. Ist $|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$ erfüllt?

[P4] Spur und Determinante

Seien A und B beliebige 2×2 -Matrizen. Zeigen Sie:

- (a) $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.
- (b) $\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - \lambda \text{tr} A + \det A$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Einführung in die Quantentheorie

Präsenzübung, Blatt 2

SoSe 2018

17./18.04.2018

[P5] Nochmal hermitesche Konjugation

- (a) Sei $|\phi\rangle$ ein beliebiger Zustandsvektor.
Man zeige, dass die Matrix $|\phi\rangle\langle\phi|$ hermitesch ist.
- (b) Zeigen Sie, dass $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$.

[P6] Nochmal Eigenwerte einer hermiteschen Matrix

Beweisen Sie, dass die Eigenwerte von hermiteschen Operatoren reell sind.
Zeigen Sie, dass die Eigenzustände zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal sind.

[P7] Eine Identität in Bra-und-Ket-Notation

Prüfen Sie nach, dass

$$(|\psi\rangle\langle\phi|)|\theta\rangle = |\psi\rangle(\langle\phi|\theta\rangle).$$

[P8] Konsekutive Stern-Gerlach-Apparaturen

Für einen modifizierten Stern-Gerlach-Versuch werden drei Apparaturen, die Teilchenstrahlen mit Spin $\frac{1}{2}$ jeweils in zwei Teilstrahlen aufspalten, hintereinander geschaltet. Die erste und die letzte der Apparaturen bewirke Aufspaltungen in horizontaler Richtung, die mittlere solche in vertikaler Richtung. Der Ausgangsstrahl sei im Zustand $|R\rangle$.

- (a) Skizzieren Sie den Strahlengang in der Versuchsanordnung.
In wieviele Teilstrahlen wird der ursprüngliche Strahl aufgespalten?
- (b) Berechnen Sie die Intensitäten der Teilstrahlen, die die Versuchsanlage passiert haben.
- (c) Die mittlere der drei Apparaturen werde langsam ausgeschaltet, so dass die zugehörige Aufspaltung abnimmt, bis die jeweiligen Teilstrahlen völlig überlappen. Wie ändern sich die Ergebnisse aus (a) und (b) in diesem Fall?

Hinweis:

Eine horizontale Stern-Gerlach-Apparatur erzeugt Teilstrahlen $|x\rangle$ und $|y\rangle$.
Eine vertikale Stern-Gerlach-Apparatur erzeugt Teilstrahlen $|u\rangle$ und $|v\rangle$.

Einführung in die Quantentheorie

Präsenzübung, Blatt 3

SoSe 2018

24./25.04.2018

[P09] Exponentialfunktion von Pauli-Matrizen

Sei $\hat{n}$ ein beliebiger Einheitsvektor im $\mathbb{R}^3$, α eine reelle Zahl und $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ die drei Pauli-Matrizen. Man zeige die folgende Identität:

$$\exp\left(\frac{i}{2} \vec{\sigma} \cdot \hat{n} \alpha\right) = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \mathbf{1} + i \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \vec{\sigma} \cdot \hat{n}.$$

Verwenden Sie dazu die Identität

$$(\vec{a} \cdot \vec{\sigma})(\vec{b} \cdot \vec{\sigma}) = (\vec{a} \cdot \vec{b}) \mathbf{1} + i(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{\sigma}.$$

[P10] Reine und gemischte Dichtematrizen

- Es sei eine Quelle gegeben, die Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen emittiert, die mit gleicher *Wahrscheinlichkeit* in positiver und negativer z -Richtung polarisiert sind. Wie lautet die zugehörige Dichtematrix ρ_1 ? Eine andere Quelle emittiere Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen, die mit gleicher Wahrscheinlichkeit in positiver und negativer x -Richtung polarisiert sind. Was ist hier die Dichtematrix? Wie erkennen Sie an den Dichtematrizen, dass es sich um ein *statistisches Gemisch* handelt?
- Eine weitere Quelle emittiere eine *Superposition*, die die gleiche Amplitude für Spin in positiver und negativer z -Richtung hat. Wie lautet hier die Dichtematrix, und wie erkennt man, dass es sich um einen reinen Zustand handelt? Betrachten Sie schließlich eine Quelle, die eine Superposition mit gleicher Amplitude für Spin in positiver und negativer x -Richtung emittiert.
- Wie groß ist in den vier Fällen jeweils die Wahrscheinlichkeit, bei einer Spinnmessung in z -Richtung das Ergebnis $|\uparrow\rangle$ zu finden?
- Betrachten Sie nun zwei aufeinanderfolgende Messungen. Die Emission finde in y -Richtung statt, und die Teilchen durchlaufen zunächst einen in z -Richtung orientierten Stern-Gerlach-Apparat, dann einen in x -Richtung orientierten. Es gibt daher vier mögliche Auftreffpunkte auf einer hinter der zweiten Messung angebrachten Detektorplatte. Geben Sie für die vier oben beschriebenen Quellen jeweils die Wahrscheinlichkeit für die verschiedenen Messergebnisse an, d.h. die relativen Intensitäten der Flecken auf der Detektorplatte.

Hinweis: Verwenden Sie als Polarisierungseigenzustände $|z_+\rangle = |\uparrow\rangle = |x\rangle$ und $|z_-\rangle = |\downarrow\rangle = |y\rangle$, sowie $|x_+\rangle = |\rightarrow\rangle = |u\rangle$ und $|x_-\rangle = |\leftarrow\rangle = |v\rangle$, mit $|x\rangle$, $|y\rangle$, $|u\rangle$ und $|v\rangle$ wie aus der Vorlesung.

[P11] Zeitentwicklung eines Zustands

Die Zeitentwicklung eines Zustands $|\psi(t)\rangle$ sei gegeben durch

$$i \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \Omega |\psi(t)\rangle$$

mit einem zeitunabhängigen Operator Ω . Die Lösung $|\psi(t)\rangle = \mathcal{U}(t)|\psi(0)\rangle$ definiert einen Operator $\mathcal{U}(t)$. Leiten Sie eine Differentialgleichung für $\mathcal{U}(t)$ ab und lösen Sie diese. Was passiert, falls Ω zeitabhängig ist?

Einführung in die Quantentheorie

Präsenzübung, Blatt 4

SoSe 2018

02.05.2018

[P12] Kommutatorrelationen und deren Konsequenzen

- (a) Man betrachte zwei lineare Operatoren A und B , die eine vollständige, orthonormale Menge von simultanen Eigenkets $\{|a, b\rangle\}$ besitzen. Kann man daraus immer schließen, dass A und B miteinander kommutieren?

Wenn Ihre Antwort „Ja“ lautet, beweisen Sie Ihre Behauptung. Ist Ihre Antwort „Nein“, geben Sie ein Gegenbeispiel an.

- (b) Betrachten Sie zwei *nicht* miteinander kommutierende Operatoren A_1 und A_2 . Andererseits mögen diese Operatoren mit einem dritten Operator H kommutieren. Zeigen Sie, dass H mindestens einen entarteten Eigenwert hat.

[P13] Ein hermitescher Differentialoperator

Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$-\frac{d^2}{dx^2} u(x) = k^2 u(x).$$

- (a) Für welche Werte von k erfüllen die Lösungen der obigen Dgl. die Randbedingungen $u(0) = u(a) = 0$ mit $a > 0$?
- (b) Seien u_n und u_m zwei Lösungen zu verschiedenem k , welche die Randbedingungen aus Punkt (a) erfüllen. Zeigen Sie, dass die Orthogonalitätsbedingung

$$\int_0^a dx u_n(x) u_m(x) = 0$$

erfüllt ist.

[P14] Fourier-Transformation

- (a) Sei $\psi(x) = \delta(x-a)$. Wie lautet die Fourier-Transformierte $\tilde{\psi}(k)$?
- (b) Von $\psi(x)$ sei die Fourier-Transformierte $\tilde{\psi}(k)$ bekannt. Wie erhält man daraus die Fourier-Transformierte von $x\psi(x)$?
- (c) Sei $\psi(x) = g(x) + \int dy K(x-y)\psi(y)$, wobei g und K bekannte Funktionen seien. Wie lautet die entsprechende Gleichung für $\tilde{\psi}(k)$? (Gleich hinschreiben!)
- (d) Es gelte $\psi(x+L) = \psi(x)$. Wie folgt aus der Fourier-Transformation die Fourier-Reihe?

Zur Erinnerung die Konventionen zur Fourier-Transformation:

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dx e^{-ikx} f(x), \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dk e^{ikx} \tilde{f}(k).$$

Einführung in die Quantentheorie

Präsenzübung, Blatt 5

SoSe 2018

08./09.05.2018

[P15] Teilchen auf endlichem Intervall

Ein Teilchen kann sich nur auf der x -Achse zwischen zwei unendlich hohen Wänden bei $x = 0$ und $x = L$ bewegen. Die Wahrscheinlichkeit, es außerhalb anzutreffen, ist also Null.

- Was bedeutet dies für die Wellenfunktion in der Ortsdarstellung? Geben Sie die Randbedingungen an. Zeigen Sie, dass der Operator P^2 auf solchen Wellenfunktionen hermitesch ist.
- Bestimmen Sie für den Hamiltonoperator $H = \frac{P^2}{2m}$ die Eigenwerte E_n und die normierten Eigenzustände $|n\rangle$ in der Ortsdarstellung.
- Berechnen Sie für den Zustand $|n\rangle$ die Erwartungswerte $\langle X \rangle$ und $\langle X^2 \rangle$ sowie $\langle P \rangle$ und $\langle P^2 \rangle$. Überprüfen Sie die Unschärferelation $\Delta P \Delta X \geq \hbar/2$.
- Diskutieren Sie (a) für mögliche (?) alternative Randbedingungen $\psi(x=0) = 0$ und $\psi(x=L) = a$.

[P16] Zeitabhängige Wellenfunktion

Die zeitabhängige Wellenfunktion eines freien Teilchens mit der Masse m kann mit Hilfe des Zeitentwicklungsoperators $U(t) = \exp(-\frac{i}{\hbar}tH)$ auf verschiedene Weisen bestimmt werden. Berechnen Sie $\psi(x, t)$ auf drei Arten für den Fall, dass das Teilchen für $t = 0$ einen scharfen Impuls k_0 hat, also

$$\langle x | \psi(0) \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(ik_0x).$$

- Entwickeln Sie $|\psi(t)\rangle$ nach Eigenzuständen $|k\rangle$ des Hamilton-Operators H und verwenden Sie, dass

$$\langle k | \psi(t) \rangle = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}t E(k)\right) \langle k | \psi(0) \rangle.$$

- Verwenden Sie nun die Relation

$$\langle x | \psi(t) \rangle = \int dy \langle x | U(t) | y \rangle \langle y | \psi(0) \rangle.$$

Der Propagator eines freien Teilchens der Masse m in der Ortsdarstellung lautet

$$\langle x | U(t) | y \rangle = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar t}} \exp\left(\frac{im(x-y)^2}{2\hbar t}\right).$$

Hinweis: Es gilt $\int_{-\infty}^{\infty} du e^{-\beta u^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}$ für $\text{Re}\beta \geq 0$.

- Benutzen Sie die alternative Darstellung

$$\langle x | U(t) | y \rangle = \delta(x-y) \exp\left(\frac{i\hbar t}{2m} \partial_y^2\right).$$

Bleibt der Impuls scharf für $t > 0$?

Einführung in die Quantentheorie

Präsenzübung, Blatt 6

SoSe 2018

15./16.05.2018

[P17] Quanten-Bahnen für freie Teilchen

- (a) Benutzen Sie den Propagator für ein freies Teilchen in einer Dimension,

$$\langle x|U(t)|y\rangle = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar t}} \exp\left(\frac{im(x-y)^2}{2\hbar t}\right) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar t}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} S_{cl}(y, 0; x, t)\right),$$

um die Kompositionseigenschaft

$$U(t_2)U(t_1) = U(t_1 + t_2)$$

des Zeitentwicklungsoperators $U(t)$ zu bestätigen. Interpretieren Sie den nötigen Rechenschritt in einem Raum-Zeit-Diagramm.

- (b) Betrachten Sie in drei Dimensionen ein klassisches Teilchen von einem Gramm Masse, welches zweimal örtlich detektiert wird, und zwar in zeitlichem Abstand von einer Sekunde und räumlichem Abstand von einem Zentimeter.

- * Wie groß ist die Wirkung S_{cl} der klassischen Bahn zwischen den Detektions-Ereignissen?
- * Wie weit darf das Teilchen seitlich vom klassischen Pfad abweichen, ohne die Forderung $\Delta S \leq \pi\hbar$ konstruktiver Interferenz benachbarter Bahnen zu verletzen? Wählen Sie einen gleichschenkligen „Dreiecks-Umweg“.

Stellen Sie die gleichen Überlegungen für ein Elektron ($m \approx 10^{-27}$ g) an, welches sich mit derselben Geschwindigkeit bewegt. Vergleichen und interpretieren Sie die „erlaubten“ Abweichungen. ($\hbar \approx 10^{-34}$ Js)

[P18] Messungen bei kommutierenden Observablen

Gegeben sei in einem dreidimensionalen Hilbertraum ein normierter Zustand

$$|\psi\rangle = \alpha|\omega_1\rangle + \beta|\omega_2\rangle + \gamma|\omega_3\rangle.$$

Ferner sei $\{|\omega_i\rangle\}$ die normierte Eigenbasis (Eigenwerte ω_i) eines Operators $\Omega = \Omega^\dagger$.

- (a) Welche Messwerte von Ω sind möglich und mit welcher Wahrscheinlichkeit treten sie auf?
- (b) Wie groß ist der Erwartungswert $\langle\Omega\rangle$ im Zustand $|\psi\rangle$?

Nehmen Sie nun den entarteten Fall $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ und $\omega_3 = \omega'$ an. Ein zweiter hermitescher Operator Λ mit den Eigenwerten λ (ebenfalls entartet) und λ' vertausche mit Ω , so dass

$$|\omega_1\rangle = |\omega, \lambda'\rangle, \quad |\omega_2\rangle = |\omega, \lambda\rangle, \quad |\omega_3\rangle = |\omega', \lambda\rangle.$$

- (c) Wie stehen die Chancen, bei Ω -Messung den Wert ω zu finden? In welchem Zustand $|\psi'\rangle$ befindet sich das System danach?
- (d) Was können Sie ohne Kenntnis von $|\psi\rangle$ über $|\psi'\rangle$ sagen?
- (e) Wie wahrscheinlich sind λ, λ' , nachdem ω' gemessen wurde?
- (f) Wie oft wird nach ω der Wert λ gemessen?
- (g) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, zuerst ω und dann λ zu finden? Vergleichen Sie mit dem umgekehrten Fall.

Einführung in die Quantentheorie

Präsenzübung, Blatt 7

SoSe 2018

29./30.05.2018

[P19] Wahrscheinlichkeitsstrom

(a) Die Wellenfunktion eines freien Teilchens mit der Masse m sei für $t = 0$ durch

$$\langle x|\psi\rangle = a \exp(ik_1x) + b \exp(ik_2x)$$

gegeben. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte und die Wahrscheinlichkeitsstromdichte als Funktion der Zeit. Verifizieren Sie die Stromerhaltung.

(b) Zeigen Sie, dass allgemein gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx j(x) = \frac{\langle P \rangle}{m}.$$

[P20] Quantisierung im Phasenraum

Jeder Funktion $f(q, p)$ im klassischen Phasenraum läßt sich im Hilbertraum eindeutig ein Operator F zuordnen durch die sogenannte Weyl-Ordnungs-Vorschrift

$$F = \text{symmetrische Ordnung von } f(q \rightarrow Q, p \rightarrow P) \quad \text{mit} \quad [Q, P] = i\hbar \mathbf{1}; \quad (1)$$

z.B. wird $f = q^2p$ zu $F = \frac{1}{3}(Q^2P + QPQ + PQ^2)$. Die (ebenfalls eindeutige) Umkehrung liefert für jeden Hilbertraum-Operator G (als Funktion der Operatoren Q und P) eine Phasenraum-Funktion

$$g_{\hbar}(q, p) = G_{\star}(Q \rightarrow q, P \rightarrow p), \quad (2)$$

wobei die Funktion $G_{\star}(q, p)$ aus der Funktion $G(q, p)$ dadurch entsteht, dass Produkte aus q und p mit dem neuen (nichtkommutativen Stern-)Produkt

$$q \star q = q^2, \quad q \star p = qp + \frac{i\hbar}{2}, \quad p \star q = pq - \frac{i\hbar}{2}, \quad p \star p = p^2 \quad (3)$$

zu bilden sind. Seine assoziative Erweiterung auf beliebige Funktionen lautet

$$(f \star g)(q, p) = f(q, p) \exp\left\{\frac{i\hbar}{2}(\overleftarrow{\partial}_q \overrightarrow{\partial}_p - \overleftarrow{\partial}_p \overrightarrow{\partial}_q)\right\} g(q, p). \quad (4)$$

An die Abhängigkeit von $\hbar$ erinnert in (2) die Notation $g_{\hbar}$.

(a) Entwickeln Sie das Stern-Produkt bis zur Ordnung $\hbar^2$ und identifizieren Sie die Ordnung $\hbar$. Welche Ordnungen sind symmetrisch oder antisymmetrisch?

(b) Verifizieren Sie mit (4) oder dem Ergebnis zu (a) die Produkte in (3).

(c) Prüfen Sie am Beispiel $f = q^2p$, ob (2) tatsächlich die Umkehrung von (1) ist, d.h. ob die $\hbar$ -Abhängigkeit herausfällt in $f \rightarrow F \rightarrow f_{\hbar} = f$.

(d) Welches ist die zum Hamilton-Operator $H = \frac{p^2}{2m} + V(Q)$ gehörige Phasenraum-Funktion $h_{\hbar}(q, p)$? Gilt $h_{\hbar} = h \equiv \frac{p^2}{2m} + V(q)$?

(e) Bilden Sie für eine Observable F die Heisenbergsche Bewegungsgleichung

$$\frac{d}{dt}F = \frac{1}{i\hbar}[F, H] \quad (\partial_t F = 0)$$

via (2) auf den Phasenraum ab. Wie lautet der klassische Beitrag ($\hbar \rightarrow 0$), wie die führende Quantenkorrektur, falls $H = \frac{p^2}{2m} + V(Q)$ und $f_{\hbar} = f$?

(f) Können Sie die Lösung $f_{\hbar}(t)$ mit einer „Zeitentwicklungsfunktion“ angeben?

Einführung in die Quantentheorie

Präsenzübung, Blatt 8

SoSe 2018

05./06.06.2018

[P21] Bindungszustände im Delta-Potential

Ein Teilchen der Masse m befinde sich im Potential

$$V(x) = -W \delta(x) \quad \text{mit} \quad W > 0.$$

(a) Zeigen Sie die Gültigkeit der Anschlussbedingung

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\psi'(\epsilon) - \psi'(-\epsilon)) = -\frac{2mW}{\hbar^2} \psi(0).$$

Hierbei bezeichnet $\psi'(x)$ die Ortsableitung der stetigen (?) Wellenfunktion.

Hinweis: Integrieren Sie die Schrödingergleichung mit $\int_{-\epsilon}^{\epsilon} dx$.

(b) Bestimmen Sie die Energieeigenwerte $E_n < 0$ und die normierten Wellenfunktionen der Bindungszustände.

(c) Zeigen Sie explizit die Gültigkeit der Unschärferelation.

[P22] Ritzsches Variationsverfahren

Eine Näherungsmethode zur Berechnung der Energie des Grundzustandes eines quantenmechanischen Systems, das durch den Hamiltonoperator H beschrieben wird, ist das sogenannte Ritzsche Variationsverfahren. Hierbei wird das Energiefunktional

$$E[\phi] := \langle \phi | H | \phi \rangle = \int dx \phi^*(x) H \phi(x) \quad (1)$$

durch Variation des normierten Zustandes $|\phi\rangle$ bzw. $\langle\phi|$ minimiert. Der entscheidende Aspekt dieses Verfahrens ist das Auffinden einer "guten" *trial function* $\phi(x)_{\alpha,\beta,\dots} = \langle x | \phi_{\alpha,\beta,\dots} \rangle$, die im Allgemeinen von mehreren Parametern $\alpha, \beta, \dots$ abhängt.

Bestimmen Sie näherungsweise die Grundzustandsenergie des Hamiltonoperators des harmonischen Oszillators (Ortsdarstellung),

$$H \doteq -\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 + \frac{m\omega^2}{2} x^2, \quad (2)$$

durch Minimieren des Energiefunktionals $E[\phi]$. Verwenden Sie dazu die *trial function* und deren Variation

$$\phi_\alpha(x) = \sqrt{\alpha} e^{-\alpha|x|}, \quad \delta\phi_\alpha(x) = \partial_\alpha \phi_\alpha(x). \quad (3)$$

überprüfen Sie zu Beginn, ob $\phi_\alpha(x)$ normiert ist. Vergleichen Sie das Ergebnis der Näherung mit der exakten Grundzustandsenergie $E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$.

Hinweis: Verwenden Sie, dass H nicht von α abhängt.

Einführung in die Quantentheorie

Präsenzübung, Blatt 9

SoSe 2018

12./13.06.2018

[P23] Matrixelemente des harmonischen Oszillators

Bei der Diskussion des eindimensionalen harmonischen Oszillators wurden die Operatoren

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Xi + i\Pi), \quad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Xi - i\Pi) \quad (1)$$

mit der Wirkung

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \quad (2)$$

eingeführt. Dabei bezeichnet der Zustand $|n\rangle$ einen Eigenzustand des Hamiltonoperators, und es gilt $\langle l|m\rangle = \delta_{l,m}$.

Berechnen Sie die Matrixelemente $\langle l|\Omega|m\rangle$ für $\Omega \in \{aa^\dagger, a^\dagger a, \Xi, \Pi, \Xi^2, \Pi^2, \{\Xi, \Pi\}\}$.

[P24] Zweidimensionaler isotroper harmonischer Oszillator

Der Hamiltonoperator für den zweidimensionalen isotropen harmonischen Oszillator lautet in geeigneten Einheiten

$$H = \frac{\hbar\omega}{2} \sum_{i=1}^2 (P_i^2 + Q_i^2).$$

- (a) Führen Sie Leiteroperatoren $a_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_i + iP_i)$ ein und stellen Sie deren Vertauschungsrelationen auf. Der Grundzustand $|0,0\rangle$ ist definiert durch $a_i|0,0\rangle = 0$ für $i = 1, 2$. Konstruieren Sie die Eigenzustände $|n_1, n_2\rangle$ von H und bestimmen Sie die Energieeigenwerte. Diskutieren Sie die Entartung.
- (b) Untersuchen Sie den Drehimpulsoperator

$$L = \hbar(Q_1P_2 - Q_2P_1), \quad (3)$$

indem Sie Operatoren $b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1 - ia_2)$ und $b_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1 + ia_2)$ einführen. Stellen Sie deren Vertauschungsrelationen auf und drücken Sie den Drehimpulsoperator durch die neuen Operatoren aus. Konstruieren Sie nun simultane Eigenzustände $|m_1, m_2\rangle$ zu $b_1^\dagger b_1$ und $b_2^\dagger b_2$ bzw. zu H und L . Welche Drehimpulse sind bei vorgegebener Energie möglich?

Einführung in die Quantentheorie

Präsenzübung, Blatt 10

SoSe 2018

19./20.06.2018

[P25] Darstellungen der Drehimpulsalgebra und Drehgruppe für $\ell = 1$

Die gemeinsamen Eigenvektoren $|\ell, m\rangle$ zu $\vec{L}^2$ und L_3 erfüllen

$$\begin{aligned}\vec{L}^2 |\ell, m\rangle &= \ell(\ell + 1) |\ell, m\rangle, \\ L_3 |\ell, m\rangle &= m |\ell, m\rangle, \\ L_+ |\ell, m\rangle &= \sqrt{(\ell + m + 1)(\ell - m)} |\ell, m+1\rangle, \\ L_- |\ell, m\rangle &= \sqrt{(\ell - m + 1)(\ell + m)} |\ell, m-1\rangle,\end{aligned}$$

und spannen für jeden Wert von ℓ einen $2\ell+1$ -dimensionalen Vektorraum $\mathcal{R}_\ell$ auf.

- (a) Finden Sie für den Fall $\ell = 1$ (also Spin 1) eine Matrixdarstellung $\mathcal{D}_\ell$ der Operatoren L_+ , L_- und L_3 bzw. L_1 , L_2 und L_3 der Drehalgebra. Wählen Sie dazu

$$|1, 1\rangle \doteq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1, 0\rangle \doteq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1, -1\rangle \doteq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

als Basis des Darstellungsraumes $\mathcal{R}_\ell$.

- (b) Führen Sie eine unitäre Basistransformation aus mit der Matrix

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -i & 0 & -i \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Wie lauten die Operatoren L_1 , L_2 und L_3 in dieser Darstellung $\mathcal{D}'_\ell$?

- (c) Auf dem Darstellungsraum $\mathcal{R}_\ell$ operiert die Darstellung $\mathcal{U}_\ell$ der Drehgruppe durch Exponentiation der Darstellung $\mathcal{D}_\ell$ der Drehalgebra,

$$\mathcal{U}_\ell(g = e^{-i\theta_i L_i}) = e^{-i\theta_i \mathcal{D}_\ell(L_i)}.$$

Finden Sie die Darstellung des Gruppenelementes

$$g = e^{-i\theta L_3}$$

sowohl in der Darstellung $\mathcal{U}_\ell$ als auch in der Darstellung $\mathcal{U}'_\ell$.

Bitte wenden

[P26] **Eigenfunktionen zum Drehimpuls für $\ell = 2$**

Betrachten Sie die Drehimpulsalgebra in kartesischer Ortsraumdarstellung,

$$\begin{aligned}L_x &\doteq -i(y\partial_z - z\partial_y), \\L_y &\doteq -i(z\partial_x - x\partial_z), \\L_z &\doteq -i(x\partial_y - y\partial_x),\end{aligned}$$

wobei $\hbar = 1$ gesetzt wurde.

- (a) Bilden Sie damit die Operatoren L_+ und L_- . Finden Sie ein homogenes Polynom $p_2(x, y, z)$ zweiten Grades, das eine Eigenfunktion zu L_z und $\vec{L}^2$ ist und von L_+ vernichtet wird, d.h.

$$\vec{L}^2 p_2(x, y, z) = 6 p_2(x, y, z), \quad L_z p_2(x, y, z) = 2 p_2(x, y, z), \quad L_+ p_2(x, y, z) = 0.$$

Dieses Polynom entspricht dem Zustand $|\ell, m\rangle$ mit höchstem Gewicht $m = \ell = 2$.

- (b) Berechnen Sie für das soeben gefundene Polynom die weiteren Polynome

$$p_{2-k} = (L_-)^k p_2(x, y, z)$$

für $k = 1, \dots, 5$. Proportionalitätsfaktoren dürfen vernachlässigt werden.

- (c) Transformieren Sie schließlich die $p_m(x, y, z)$ in Kugelkoordinaten und nehmen Sie dabei an, dass $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ist. Vergleichen Sie Ihre Resultate mit der expliziten Form für die Kugelflächenfunktionen

$$Y_{\ell,m}(\varphi, \theta) = e^{im\varphi} P_{\ell,m}(\cos \theta),$$

wobei die benötigten assoziierten Legendre-Polynome definiert durch

$$P_{2,2} = 3 \sin^2 \theta, \quad P_{2,1} = 3 \sin \theta \cos \theta, \quad P_{2,0} = \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \sin^2 \theta$$

gegeben sind und die Symmetrien

$$P_{2,-1} = P_{2,1}, \quad P_{2,-2} = P_{2,2}$$

besitzen.

Einführung in die Quantentheorie

Präsenzübung, Blatt 11

SoSe 2018

26./27.06.2018

[P27] Teilchen im konstanten Magnetfeld

Betrachten Sie ein Teilchen mit Spin $1/2$, Ladung e und Masse m .

- (a) Geben Sie die Eigenwerte der Spinoperatoren S_x , S_y und S_z an.
- (b) Das Teilchen sei in einem Eigenzustand von S_x . Man misst S_z . Welche Messwerte sind möglich und mit welchen Wahrscheinlichkeiten werden sie erhalten?
- (c) Der Hamiltonoperator dieses Teilchens im konstanten Magnetfeld $\vec{B} = B\vec{e}_z$ sei gegeben durch

$$H = \frac{e\hbar}{mc} BS_z.$$

Das System befinde sich zur Zeit $t = 0$ im Eigenzustand von S_x mit dem Eigenwert $1/2$. Berechnen Sie den Zustand zur Zeit $t > 0$.

- (d) In diesem System wird dann (also zu einem Zeitpunkt $t > 0$) S_x gemessen. Was ist das Ergebnis? Was ergibt sich bei einer S_z -Messung? Diskutieren Sie die Ergebnisse, insbesondere die Abhängigkeiten von t .
- (e) Berechnen Sie die Erwartungswerte $\langle S_x \rangle$, $\langle S_y \rangle$ und $\langle S_z \rangle$.

[P28] Kopplung von Drehimpulsen

Ein Elektron (Spin $s = 1/2$) befinde sich in einem Zustand mit Bahndrehimpuls $\ell = 1$. Berechnen Sie die *Clebsch-Gordan-Koeffizienten* $\langle m_\ell, m_s | j, m \rangle$ für die Basis transformation

$$|j, m\rangle = \sum_{\substack{m_\ell, m_s \\ m_\ell + m_s = m}} |m_\ell, m_s\rangle \langle m_\ell, m_s | j, m\rangle$$

bei der Kopplung des Bahndrehimpulses an den Spin des Elektrons. Der Zustand $|m_\ell, m_s\rangle$ bezeichnet dabei das Tensorprodukt $|\ell, m_\ell\rangle \otimes |s, m_s\rangle$.

Verwenden Sie die Auf- und Absteige-Operatoren

$$J_+ = \hat{L}_+ + \hat{S}_+ \quad \text{und} \quad J_- = \hat{L}_- + \hat{S}_-.$$

Machen Sie sich klar, dass damit – sofern L und S miteinander kommutieren – gilt:

$$\begin{aligned} \sqrt{j(j+1) - m(m\pm 1)} |j, m\pm 1\rangle = \\ \sqrt{\ell(\ell+1) - m_\ell(m_\ell\pm 1)} |m_\ell\pm 1, m_s\rangle + \sqrt{s(s+1) - m_s(m_s\pm 1)} |m_\ell, m_s\pm 1\rangle. \end{aligned}$$

Einführung in die Quantentheorie

Präsenzübung, Blatt 12

SoSe 2018

03./04.07.2018

[P29] Bindungszustände im Zentralpotential

Bestimmen Sie die Bindungsenergien für ein Potential der Form

$$V(r) = \frac{\alpha}{r^2} - \frac{\beta}{r}$$

mit $\alpha, \beta > 0$. Gehen Sie wie folgt vor:

- (a) Bringen Sie die Schrödingergleichung auf die gleiche Form wie die des Wasserstoffproblems. Führen Sie dabei einen Parameter s ein über

$$s(s+1) = \ell(\ell+1) + \frac{2m\alpha}{\hbar^2}.$$

- (b) Bestimmen Sie die Energie-Eigenwerte $E_{n,\ell}$ mit Hilfe Ihrer Kenntnisse über das Wasserstoffatom aus der Vorlesung. Geben Sie auch den Entartungsgrad der Energieniveaus an.

[P30] Erwartungswerte im Wasserstoffatom

Ein Elektron befinde sich im stationären Zustand $|\varphi\rangle$ mit der Orts-Wellenfunktion

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{30}} \left[\varphi_{100}(\vec{r}) + 3\varphi_{211}(\vec{r}) + 4\varphi_{200}(\vec{r}) + 2\varphi_{320}(\vec{r}) \right],$$

wobei φ_{nlm} die Orts-Wellenfunktion des Wasserstoffatoms mit den Quantenzahlen n , ℓ und m bezeichnet.

- (a) Berechnen Sie den Erwartungswert der Energie mit Hilfe von $E_n = -Ry/n^2$.
(b) Wie lautet der Erwartungswert von $\vec{L}^2$?
(c) Wie lautet der Erwartungswert von L_z ?

Einführung in die Quantentheorie

Präsenzübung, Blatt 13

SoSe 2018

10./11.07.2018

[P31] Aufsummieren der Störungsreihe

Betrachten Sie den Hamilton-Operator $H = H_0 + \lambda V$ eines Zwei-Niveau-Systems. In einer H_0 -Eigenbasis $\{|1^0\rangle, |2^0\rangle\}$ sei H gegeben durch

$$H = E_1^0 |1^0\rangle\langle 1^0| + E_2^0 |2^0\rangle\langle 2^0| + \lambda \Gamma |1^0\rangle\langle 2^0| + \lambda \Gamma^* |2^0\rangle\langle 1^0|,$$

wobei $E_1^0 > E_2^0$. Wir definieren noch die Projektoren $P_1 = |1^0\rangle\langle 1^0|$ und $P_2 = |2^0\rangle\langle 2^0|$. Das gestörte Eigenwert-Problem lautet $H|m\rangle = E_m|m\rangle$ für $m = 1, 2$.

- (a) Verwenden Sie für $|1\rangle = |1^0\rangle + O(\lambda)$ und $E_1 = E_1^0 + O(\lambda)$ die ganze Störungsreihe

$$|1\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{E_1^0 - H_0} P_2 (\lambda V - \Delta_1) \right)^k |1^0\rangle \quad \text{und} \\ E_1 = E_1^0 + \Delta_1 = E_1^0 + \langle 1^0 | \lambda V | 1 \rangle,$$

um den gestörten Eigenzustand und seine Energie zu allen Ordnungen zu bestimmen. Dazu benötigen Sie auch die entsprechenden Gleichungen für

$$|2\rangle = |2^0\rangle + O(\lambda) \quad \text{und} \quad E_2 = E_2^0 + O(\lambda).$$

Unter welcher Voraussetzung kann man die Störungsreihe aufsummieren?

- (b) Berechnen Sie die Energien $E_m(\lambda)$ und Eigenzustände exakt, indem Sie H diagonalisieren. Vergleichen Sie mit (a).

[P32] Entartete Störungstheorie im Drei-Zustands-System

Betrachten Sie ein Drei-Zustands-System mit

$$H \doteq \begin{pmatrix} E_1^0 & 0 & a \\ 0 & E_2^0 & b \\ a^* & b^* & E_3^0 \end{pmatrix} \quad \text{mit Entartung} \quad E_2^0 = E_1^0,$$

wobei $E_1^0 > E_3^0$ und die Störungen $|a|, |b| \ll E_1^0 - E_3^0$. Berechnen Sie die gestörten Eigenwerte E_1, E_2, E_3 in zweiter Ordnung Störungstheorie, also

$$E_i \approx E_i^0 + \langle i^0 | V | i^0 \rangle + \sum_{n(\neq i)} \frac{|\langle i^0 | V | n^0 \rangle|^2}{E_i^0 - E_n^0} \quad \text{für } i = 1, 2, 3,$$

wobei $|i^0\rangle$ die ungestörten Eigenzustände und V den nicht-diagonalen Teil von H bezeichnen. Vier Möglichkeiten bieten sich an:

- Benutzen Sie nicht-entartete Störungstheorie. Ist dies gerechtfertigt?
- Benutzen Sie entartete Störungstheorie (wählen Sie eine Diagonalebasis für V im Entartungsraum).
- Gehen Sie in eine Diagonalebasis $\{|1'\rangle, |2'\rangle\}$ von V^2 (!) im Entartungsraum und wiederholen Sie (b).
- Finden Sie die exakten Eigenwerte durch Diagonalisieren von H . Welche Vorschrift für die Störungsrechnung war korrekt?

Einführung in die Quantentheorie

Präsenzübung, Blatt 14

SoSe 2018

17./18.07.2018

[P33] Bosonische und fermionische Statistik

Betrachten Sie zwei nicht-wechselwirkende, identische Teilchen mit den Koordinaten x_1 und x_2 , welche sich im eindimensionalen, quadratischen Potential

$$V = \frac{1}{2}m\omega^2(x_1^2 + x_2^2)$$

bewegen. Eines der Teilchen befinde sich im Grundzustand, das andere im ersten angeregten Energie-Eigenzustand. Bestimmen Sie den Erwartungswert $\langle x_1 x_2 \rangle$ für folgende Fälle

- (a) bosonische Teilchen,
- (b) fermionische Teilchen,
- (c) unterscheidbare Teilchen.

[P34] Parastatistik

Wir betrachten Dreiteilchenzustände, die sich unter Permutationen in der irreduziblen “2”-Darstellung der symmetrischen Gruppe $\mathcal{S}_3$ transformieren. Gegeben seien dazu die Zustände (n, m, p seien alle verschieden)

$$\begin{aligned} |\Psi_+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}(|mnp\rangle + \omega|npm\rangle + \bar{\omega}|pmn\rangle), \\ |\Psi_-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}(|nmp\rangle + \omega|pnm\rangle + \bar{\omega}|mpn\rangle), \\ |\Phi_+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}(|nmp\rangle + \bar{\omega}|pnm\rangle + \omega|mpn\rangle), \\ |\Phi_-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}(|mnp\rangle + \bar{\omega}|npm\rangle + \omega|pmn\rangle), \end{aligned} \quad (1)$$

wobei $\omega = e^{2\pi i/3} = (-1 + i\sqrt{3})/2$ und $\bar{\omega} = \omega^2 = \omega^{-1} = (-1 - i\sqrt{3})/2$ dritte Einheitswurzeln sind. Diese Zustände sind normiert und orthogonal zueinander.

- (a) Geben Sie die bosonischen und fermionischen Dreiteilchenzustände an und zeigen Sie, dass diese orthogonal zu den oben angegebenen Zuständen sind. (Es genügt jeweils eine Beispielrechnung.)
- (b) Überlegen Sie sich das Transformationsverhalten der Zustände $|\Phi_{\pm}\rangle$ unter der zyklischen Transformation $|123\rangle \rightarrow |312\rangle$ sowie unter der Vertauschung $|123\rangle \rightarrow |213\rangle$.

Bitte wenden

[P35] Fockraum für Parafermionen

Betrachten Sie hypothetische Teilchen mit den Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren

$$(a^\dagger)_{mn} = (a)_{nm} = \delta_{m,n+1} \sqrt{m(3-n)/3} \quad \text{für } 0 \leq n, m \leq 3.$$

Der Erzeugungsoperator $a^\dagger$ erzeugt also ein Teilchen, während a entsprechend ein Teilchen vernichtet.

(a) Zeigen Sie, dass $(a^\dagger)^4 = 0$.

(b) Zeigen Sie

$$(a^\dagger a)_{mn} = \delta_{m,n} m(4-m)/3 \quad \text{und} \quad (a a^\dagger)_{mn} = \delta_{m,n} (m+1)(3-m)/3,$$

und berechnen Sie die Matrixelemente des Teilchenzahloperators

$$N := \frac{3}{2}(a^\dagger a - a a^\dagger + \mathbf{1}).$$

Hat N die “richtigen” Eigenwerte?