# Einführung in die Quantentheorie
# Hausübungen

Leibniz Universität Hannover, Sommersemester 2018
Vorlesung: Prof. Dr. O. Lechtenfeld
Hausübungsaufgaben: Dr. Till Bargheer

## Inhaltsverzeichnis

# Einführung in die Quantentheorie

**Hausübung, Blatt 1** **SoSe 2018** **Abgabe: 17.04.2018**

## [H1] Exponentialfunktion einer Matrix (4 Punkte)

Auch für Matrizen definiert man die Exponentialfunktion mit Hilfe der Potenzreihenentwicklung:

$$\exp M = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} M^n \, .$$

(a) Sei $M$ eine konstante Matrix. Zeigen Sie, dass die Lösung der Differentialgleichung $\frac{d}{dt}\vec{x}(t) = \mathrm{i}M\vec{x}(t)$ durch $\vec{x}(t) = \exp(\mathrm{i}tM)\vec{x}(0)$ gegeben ist.

(b) Sei $M$ eine spurlose, imaginäre $2 \times 2$-Matrix und deshalb eine Linearkombination der drei Matrizen

$$M_1 = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix} , \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} , \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} .$$

Welche der $M_i$ sind hermitesch, welche antihermitesch?
Berechnen Sie $U_i = \exp(\mathrm{i}tM_i)$; welche der $U_i$ sind unitär?
Verifizieren Sie für die drei Fälle die Beziehung $\det(\exp A) = \exp(\operatorname{tr} A)$.

## [H2] Basistransformationen (3 Punkte)

Es bezeichnen $|x'(\theta)\rangle$ und $|y'(\theta)\rangle$ die Basisvektoren eines um den Winkel $\theta$ bzgl. der $(x, y)$-Basis gedrehten Koordinatensystems. Man zeige, dass die Komponenten $\langle x'(\theta)|\psi\rangle$, $\langle y'(\theta)|\psi\rangle$ eines Vektors $|\psi\rangle$ in dieser Basis die Differentialgleichungen

$$- \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial\theta}\langle x'(\theta)|\psi\rangle = \langle x'(\theta)|S|\psi\rangle \, ,$$
$$- \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial\theta}\langle y'(\theta)|\psi\rangle = \langle y'(\theta)|S|\psi\rangle \, ,$$

erfüllen (wobei $S = M_2$ aus Aufgabe **[H1]**(b)). Konstruieren Sie die explizite Lösung dieser Dgl. für $|\psi\rangle = |R\rangle$ und $|\psi\rangle = |L\rangle$. ($|R\rangle$ und $|L\rangle$ wie in der Vorlesung.)

**Bitte wenden**

**[H3] Aufspaltung eines Atomstrahls** **(3 Punkte)**

Jemand experimentiert mit einem Strahl von Helium-Atomen im angeregten ${}^3S_1$ Triplett-Zustand (Elektron-Konfiguration 1s2s, Kernspin 0). Die Atome werden demnach durch Zustandsvektoren in $\mathbb{C}^3$ charakterisiert. In einer geeigneten Basis wird die benutzte Stern-Gerlach-Messapparatur durch die Matrix

$$M \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

beschrieben. Sie spaltet den Atomstrahl auf in drei Teile, deren Atome sich dann jeweils in den Eigenzuständen

$$|{\rightarrow}\rangle \doteq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad |{\circ}\rangle \doteq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad |{\leftarrow}\rangle \doteq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

befinden. Die drei Teilstrahlen passieren unmittelbar darauf eine zweite, identische Messapparatur, welche gegenüber der ersten um 90° gedreht ist. Diese Drehung ist in $\mathbb{C}^3$ realisiert durch die Matrix

$$\mathcal{R} \doteq \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} , \tag{3}$$

so dass der zweite Satz von Eigenzuständen lautet

$$|{\uparrow}\rangle = \mathcal{R}\,|{\rightarrow}\rangle , \quad |{\bullet}\rangle = \mathcal{R}\,|{\circ}\rangle , \quad |{\downarrow}\rangle = \mathcal{R}\,|{\leftarrow}\rangle . \tag{4}$$

Bestimmen Sie die Intensitäten $W_{\alpha i}$ mit $i = \rightarrow, \circ, \leftarrow$ und $\alpha = \uparrow, \bullet, \downarrow$ der neun Teilstrahlen nach der zweiten Aufspaltung.

# Einführung in die Quantentheorie

**Hausübung, Blatt 2** **SoSe 2018** **Abgabe: 24.04.2018**

**[H4] Messwerte einer Messapparatur** **(3 Punkte)**

Einer Messapparatur entspreche in der $\{|x\rangle, |y\rangle\}$-Basis die Matrix

$$A \doteq \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2(1-\mathrm{i}) \\ 2(1+\mathrm{i}) & -1 \end{pmatrix} .$$

(a) Welche Messwerte $a$ sind möglich? Man bestimme die zugehörigen (normierten) Eigenzustände $|\phi_a\rangle$.

(b) Mit welchen Wahrscheinlichkeiten $W_a$ werden die Werte $a$ erhalten, wenn sich das System unmittelbar vor der Messung im Zustand

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\mathrm{i}|x\rangle + |y\rangle\big)$$

befindet?

(c) Berechnen Sie bezüglich $|\psi\rangle$ den mittleren Messwert $\langle A\rangle$ und die Schwankung $\Delta A$, wobei $(\Delta A)^2 = \Big\langle (A - \langle A\rangle)^2 \Big\rangle$.

**[H5] Kommutierende Operatoren** **(4 Punkte)**

In einem dreidimensionalen komplexen Hilbertraum $\mathcal{H}$ seien zwei Operatoren durch ihre Wirkung auf die Vektoren der orthonormierten Basis $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle\}$ folgendermaßen definiert

$$\begin{aligned}
A|e_1\rangle &= 3|e_1\rangle - \mathrm{i}\sqrt{2}|e_2\rangle + |e_3\rangle\,, & B|e_1\rangle &= |e_1\rangle + \mathrm{i}\sqrt{2}|e_2\rangle + |e_3\rangle\,,\\
A|e_2\rangle &= \mathrm{i}\sqrt{2}|e_1\rangle + 2|e_2\rangle - \mathrm{i}\sqrt{2}|e_3\rangle\,, & B|e_2\rangle &= -\mathrm{i}\sqrt{2}|e_1\rangle + \mathrm{i}\sqrt{2}|e_3\rangle\,,\\
A|e_3\rangle &= |e_1\rangle + \mathrm{i}\sqrt{2}|e_2\rangle + 3|e_3\rangle\,, & B|e_3\rangle &= |e_1\rangle - \mathrm{i}\sqrt{2}|e_2\rangle + |e_3\rangle\,,
\end{aligned}$$

(a) Man gebe die den Operatoren $A$ und $B$ bzgl. dieser Basis zugeordneten Matrizen an.

(b) Zeigen Sie, dass die Operatoren $A$ und $B$ hermitesch sind und dass sie miteinander kommutieren.

(c) Bestimmen Sie die Eigenwerte von $A$ und $B$, deren Vielfachheiten sowie eine Orthonormalbasis $\{|f_1\rangle, |f_2\rangle, |f_3\rangle\}$ simultaner Eigenzustände von $A$ und $B$.
*Hinweis*: Betrachten Sie das Eigenwertproblem zu $A$. Bestimmen Sie zuerst den Eigenvektor $|f_1\rangle$ zum einfachen Eigenwert. Ein Eigenvektor zum doppelten Eigenwert lautet $|f_2\rangle = \frac{1}{2}\left(|e_1\rangle - \mathrm{i}\sqrt{2}|e_2\rangle - |e_3\rangle\right)$. Konstruieren Sie den dritten Eigenvektor orthogonal zu $|f_1\rangle$ und $|f_2\rangle$.

(d) Welche Matrizen sind $A$ und $B$ bzgl. der Basis $\{|f_1\rangle, |f_2\rangle, |f_3\rangle\}$ zugeordnet?

**[H6] Dichtematrix für einen teilweise polarisierten Lichtstrahl** **(3 Punkte)**

Man betrachte einen teilweise polarisierten Lichtstrahl. Es seien $p_R$ und $p_L$ der Anteil der rechtspolarisierten bzw. linkspolarisierten Photonen.

(a) Wie lautet die Dichtematrix in der Basis $\{|R\rangle, |L\rangle\}$?

(b) Wie lautet die Dichtematrix in der Basis $\{|x\rangle, |y\rangle\}$?

(c) Man überprüfe $\rho^2 \neq \rho$ und $\operatorname{tr}\rho^2 < 1$.

# Einführung in die Quantentheorie

**Hausübung, Blatt 3** **SoSe 2018** **Abgabe: 03.05.2018**

## [H7] Pauli-Matrizen (3 Punkte)

Die Pauli-Matrizen sind definiert als

$$\sigma^1 \doteq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 \doteq \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie für beliebige Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$, dass

$$(\vec{a} \cdot \vec{\sigma})\,(\vec{b} \cdot \vec{\sigma}) \;=\; (\vec{a} \cdot \vec{b})\,\mathbf{1} + \mathrm{i}\,(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{\sigma}\,.$$

(b) Für $a_\mu = (a_0, \vec{a})$ und $\sigma^\mu = (\mathbf{1}, \vec{\sigma})$ ist zu prüfen, dass

$$\operatorname{tr} a_\mu \sigma^\mu \;=\; 2a_0$$

und

$$\det a_\mu \sigma^\mu \;=\; a_0^2 - \vec{a}^2\,.$$

## [H8] 2×2 Dichtematrizen (4 Punkte)

Jede 2×2 Dichtematrix kann wegen $\rho = \rho^\dagger$ und $\operatorname{tr}\rho = 1$ in der Basis $\{\sigma^\mu\}$ der hermiteschen 2×2 Matrizen parametrisiert werden als

$$\rho \;=\; \tfrac{1}{2} a_\mu \sigma^\mu \;=\; \tfrac{1}{2}(\mathbf{1} + \vec{a} \cdot \vec{\sigma})\,. \tag{1}$$

Andererseits wissen wir, dass es zwei orthonormierte Eigenkets $|+\rangle$ und $|-\rangle$ geben muss, so dass

$$\rho \;=\; p\,|+\rangle\langle+| \;+\; (1{-}p)\,|-\rangle\langle-| \qquad \text{mit} \quad 0 \leq p \leq 1\,. \tag{2}$$

(a) Berechnen Sie $\det\rho$. Welche Bedingung an $\vec{a}$ folgt aus der Einschränkung $0 \leq p \leq 1$ ? Beschreiben Sie geometrisch die Menge aller Dichtematrizen (1).

(b) Geben Sie eine minimale Liste von Operatoren $\Omega_i$ an, aus deren gemessenen Erwartungswerten $\langle \Omega_i \rangle = \operatorname{tr}(\rho\,\Omega_i)$ Sie $\vec{a}$ ermitteln und damit $\rho$ rekonstruieren können.

(c) Bestimmen Sie $p$ als Funktion von $\vec{a}$. Finden Sie die Eigenkets $|+\rangle$ und $|-\rangle$ in der Parametrisierung (2).

(d) Schreiben Sie $\rho^2$ in der Darstellung (1). Wie groß ist $\operatorname{tr}\rho^2$ ?

(e) Diskutieren Sie den reinen Fall. Was geschieht mit den Ergebnissen (a)–(d)?

(f) Was passiert bei $\vec{a} = 0$ ?

**Bitte wenden**

**[H9] Langlebige und kurzlebige Kaonen** **(3 Punkte)**

Die in einem Experiment zum Zeitpunkt $t = 0$ erzeugten neutralen Kaonen oder Anti-Kaonen sind verschiedene Linearkombinationen der Zustände $|K_L\rangle$ und $|K_S\rangle$ (langlebige bzw. kurzlebige Kaonen), genauer:

$$|K^0\rangle \; = \; \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|K_S\rangle + |K_L\rangle\Big) \qquad \text{oder} \qquad |\overline{K}^0\rangle \; = \; \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|K_S\rangle - |K_L\rangle\Big)\,.$$

Zu einem späteren Zeitpunkt $t > 0$ hat sich ein langlebiger bzw. kurzlebiger Kaon-Zustand entwickelt gemäß

$$|K_S(t)\rangle \; = \; \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_S t}|K_S\rangle \qquad \text{bzw.} \qquad |K_L(t)\rangle \; = \; \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_L t}|K_L\rangle\,,$$

wobei $\omega_S < \omega_L$. Hierbei bleibt der Zerfall der Kaonen unberücksichtigt! Sei nun $|\psi(t{=}0)\rangle = |K^0\rangle$. Bestimmen Sie $|\psi(t)\rangle$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, zum Zeitpunkt $t$ ein $\overline{K}^0$ zu finden (mit Skizze des Ergebnisses).

# Einführung in die Quantentheorie

**Hausübung, Blatt 5** | **SoSe 2018** | **Abgabe: 15.05.2018**

**[H12] Zerfließen eines Gaußschen Wellenpakets I** **(4 Punkte)**

Die Wellenfunktion eines freien Teilchens mit der Masse $m$ in einer Dimension sei zur Zeit $t = 0$ bekannt als

$$\psi(x, t{=}0) \;=\; (\sigma\pi)^{-\frac{1}{4}} \, \exp\!\Big(\mathrm{i}k_0 x - \tfrac{x^2}{2\sigma}\Big)\,,$$

wobei $k_0$ und $\sigma$ positive reelle Konstanten sind.

(a) Berechnen Sie $\psi(x,t)$, indem Sie nach Eigenzuständen des Hamiltonoperators $H = \frac{P^2}{2m}$ entwickeln.

(b) Bestimmen Sie das Maximum $\Big(x_{\max}, w(x_{\max})\Big)$ der Wahrscheinlichkeitsdichte $w(x)$ als Funktion der Zeit.

(c) Geben Sie die Breite $\varDelta$ des Wellenpakets zur Zeit $t$ an.

(d) Diskutieren Sie die Ergebnisse aus (b) und (c) für $t \to \infty$.

**[H13] Unschärfen eines Gaußschen Wellenpakets** **(4 Punkte)**

Für $k_0 = 0$ reduziert sich die zeitabhängige Wellenfunktion aus [H12] auf

$$\psi(x,t) \;=\; \Big(\frac{\sigma}{\pi}\Big)^{\frac{1}{4}} \Big(\eta(t)\Big)^{-\frac{1}{2}} \, \exp\!\Big(-\frac{x^2}{2\eta(t)}\Big) \qquad \text{mit} \quad \eta(t) = \sigma + \mathrm{i}\hbar t/m\,.$$

*Stimmt Ihr Resultat für [H12a]?* Berechnen Sie als Funktion der Zeit

(a) $\langle X\rangle$, $\langle X^2\rangle$ und $\varDelta X$,

(b) $\langle P\rangle$, $\langle P^2\rangle$ und $\varDelta P$.

(c) Geben Sie $\varDelta P \varDelta X$ als Funktion der Zeit an. Bestimmen Sie das Minimum.

**[H14] Zerfließen eines Gaußschen Wellenpakets II** **(2 Punkte)**

Für $k_0 = 0$ vereinfacht sich die Anfangs-Wellenfunktion aus [H12] zu

$$\psi(x, t{=}0) \;=\; (\sigma\pi)^{-\frac{1}{4}} \, \exp\!\Big(-\tfrac{x^2}{2\sigma}\Big)\,.$$

Die Zeitentwicklung $\psi(x,t)$ soll alternativ bestimmt werden mit Hilfe von

$$\langle x|U(t)|y\rangle \;=\; \langle x|e^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}tH}|y\rangle \;=\; \delta(x-y)\,\exp\!\Big(\frac{\mathrm{i}\hbar t}{2m}\partial_y^2\Big)\,.$$

Benutzen Sie hierzu die Identität

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\alpha\,\partial_z^2}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}z^2} \;=\; (1{+}\alpha)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}z^2/(1+\alpha)}\,.$$

*2 Sonderpunkte:*
Können Sie diese Identität beweisen, indem Sie eine Differentialgleichung für die linke Seite herleiten und diese lösen?

# Einführung in die Quantentheorie

**Hausübung, Blatt 6** **SoSe 2018** **Abgabe: 29.05.2018**

## [H15] Lokalisiertes freies Teilchen (3 Punkte)

Ein freies Teilchen sei für $t = 0$ lokalisiert:

$$\psi(x,0) \;=\; \delta(x-x_0) \;=\; \int \tfrac{\mathrm{d}k}{2\pi}\; \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-x_0)}\,.$$

Berechnen Sie $\psi(x,t)$ auf die drei bekannten Arten:

(a) Entwickeln Sie $|\psi(t)\rangle$ nach Eigenzuständen $|k\rangle$ des Hamilton-Operators und verwenden Sie, dass

$$\langle k|\psi(t) \;=\; \exp\!\Big(-\tfrac{\mathrm{i}}{\hbar}E(k)t\Big)\,\langle k|\psi(0)\;.$$

(b) Benutzen Sie den Propagator eines freien Teilchens in der Ortsdarstellung,

$$\langle x|U(t)|y\rangle \;=\; \sqrt{\frac{m}{2\pi\mathrm{i}\hbar t}}\;\exp\!\Big(\frac{im(x-y)^2}{2\hbar t}\Big)\,.$$

(c) Benutzen Sie die Darstellung des Propagators als Differentialoperator

$$\langle x|U(t)|y\rangle \;=\; \delta(x-y)\;\exp\!\Big(\tfrac{\mathrm{i}\hbar t}{2m}\partial_y^2\Big)\,.$$

## [H16] Pfadintegral für freies Teilchen (3 Punkte)

Berechnen Sie den Propagator eines freien Teilchens in einer Dimension,

$$U(x,t;x_0,t_0) \;=\; \langle x|U(t-t_0)|x_0\rangle\,,$$

durch „Diskretisierung" des Feynmanschen Pfadintegrals. Zerlegen Sie dazu das Zeitintervall $[t_0,t]$ in $N$ gleiche Abschnitte der Dauer $\varepsilon = (t{-}t_0)/N$, faktorisieren entsprechend den Operator $U(t{-}t_0)$, schieben zwischen alle Faktoren vollständige Ortsbasen $\{|z_n\rangle,\ n=1,\ldots,N{-}1\}$ ein und integrieren somit über $N{-}1$ Zwischenpunkte $z_n$. Das Pfadintegral ist definiert als Grenzwert für $N\to\infty$.

Wenn $\varepsilon$ genügend klein ist, kann der Propagator für ein Teilstück von $z_{n-1}$ nach $z_n$ immer approximiert werden durch

$$U(z_n,t_n;z_{n-1},t_{n-1}) \;=\; \sqrt{\tfrac{m}{2\pi\mathrm{i}\hbar\varepsilon}}\;\exp\!\Big\{\tfrac{\mathrm{i}}{\hbar}\,S_{\mathrm{cl}}(z_{n-1},t_{n-1};z_n,t_n)\Big\}\,,$$

wobei $t_n = t_0{+}n\varepsilon$ und $S_{\mathrm{cl}}$ die Wirkung für die gerade gleichförmige Bewegung zwischen den angegebenen Ereignissen ist. Berechnen Sie das $(N{-}1)$-fache Integral zunächst für $N=2$ und $N=3$ und verallgemeinern Sie dann das Ergebnis auf beliebiges $N$. Wie hängt das Resultat von $N$ und $\varepsilon$ ab? Können Sie den Kontinuumslimes ausführen?

**Bitte wenden**

**[H17] Messungen an einem Satz von Operatoren** **(4 Punkte)**

Betrachten Sie die Operatoren

$$L_x \doteq \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}, \quad L_y \doteq \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & -\mathrm{i} & 0\\ \mathrm{i} & 0 & -\mathrm{i}\\ 0 & \mathrm{i} & 0\end{pmatrix}, \quad L_z \doteq \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

(a) Welche Messergebnisse für $L_z$ gibt es? Berechnen Sie $\langle L_x\rangle$, $\langle L_x^2\rangle$ und $\Delta L_x$ im Zustand $|L_z{=}{+1}\rangle$.

(b) Berechnen Sie die Eigenwerte und die normierten Eigenzustände von $L_x$ in der $L_z$-Basis.

(c) Ein Teilchen sei im $|L_z{=}{-1}\rangle$ Zustand. Was sind die möglichen Ergebnisse, wenn man $L_x$ messen würde? Geben Sie auch die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten an.

(d) Gegeben sei der Zustand

$$|\psi\rangle = \tfrac{1}{2}|L_z{=}{+1}\rangle + \tfrac{1}{2}|L_z{=}0\rangle + \tfrac{1}{\sqrt{2}}|L_z{=}{-1}\rangle .$$

Wenn $L_z^2$ gemessen wird und das Ergebnis $+1$ gibt, was ist der Zustand nach dieser Messung? Wie wahrscheinlich war dieses Ergebnis?

(e) Geben Sie für den Zustand aus Punkt (d) die möglichen Ergebnisse bei einer $L_z$-Messung und deren Wahrscheinlichkeiten an.

(f) Ein Teilchen sei in einem Zustand, in dem die Wahrscheinlichkeiten

$$W(L_z{=}{+1}) = \frac{1}{4}, \quad W(L_z{=}0) = \frac{1}{2}, \quad W(L_z{=}{-1}) = \frac{1}{4}$$

sind. Begründen Sie, daß der allgemeinste normierte Zustand mit dieser Eigenschaft geschrieben werden kann als

$$|\psi'\rangle = \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}|L_z{=}{+1}\rangle + \tfrac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}|L_z{=}0\rangle + \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma}|L_z{=}{-1}\rangle$$

mit beliebigen Phasen $\alpha$, $\beta$ und $\gamma$. Normierte Zustände $|\phi\rangle$ und $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|\phi\rangle$ sind bekannterweise äquivalent. Bedeutet dies, dass die obigen Phasenfaktoren in $|\psi'\rangle$ irrelevant sind? Berechnen Sie zum Test $W(L_x{=}0)$.

# Einführung in die Quantentheorie

**Hausübung, Blatt 8** **SoSe 2018** **Abgabe: 12.06.2018**

**[H19] Nullpunktsenergie des harmonischen Oszillators** **(3 Punkte)**

Leiten Sie mit Hilfe der Unschärferelation eine untere Grenze für die Energie eines harmonischen Oszillators,

$$H = \frac{1}{2m}P^2 + \frac{m\omega^2}{2}X^2 \,,$$

in einem stationären Zustand her.

*Hinweis*: Drücken Sie $\langle H \rangle$ durch $\langle X^2 \rangle$ aus und minimieren Sie.

**[H20] Streuung am Delta-Potential** **(4 Punkte)**

Ein Teilchen der Masse $m$ wird gestreut am Potential

$$V(x) = v_0\,\delta(x) \qquad \text{mit} \qquad v_0 \in \mathbb{R}\,.$$

(a) Setzen Sie die Wellenfunktion in den Bereichen $x > 0$ und $x < 0$ an. Welche Anschlussbedingungen muss die Wellenfunktion an der Stelle $x = 0$ erfüllen?

(b) Man bestimme die Transmissionsmatrix $Q(E)$ und die Streumatrix $S(E)$. Für welches Vorzeichen von $v_0$ und welche Energie gibt es einen Pol und was bedeutet er?

(c) Geben Sie Transmissions- und Reflexionskoeffizient als Funktion der Energie an (mit Skizze). Zeigen Sie, dass $R(E) + T(E) = 1$ gilt.

**[H21] Reflexionsfreies Potential und Supersymmetrie** **(3 Punkte)**

Betrachten Sie den Hamilton-Operator

$$H = \tfrac{1}{2}(Q^+Q^- - \mathbf{1})\,,$$

wobei die Operatoren $Q^\pm$ im Ortsraum durch die Differentialoperatoren

$$Q^\pm = \mp\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + \tanh x$$

gegeben sind. Wir haben $\hbar = m = 1$ gesetzt.

(a) Wie lautet das Potential $V(x)$ in diesem Hamilton-Operator?

(b) Lösen Sie die Differentialgleichung $Q^-\psi_b = 0$. Was ist $\psi_b$ in Bezug auf $H$?

(c) Betrachten Sie den mit $H$ verwandten Hamilton-Operator

$$\widehat{H} = \tfrac{1}{2}(Q^-Q^+ - \mathbf{1})\,.$$

Wie lauten die Eigenfunktionen $\phi_k(x)$ und die Eigenwerte $E_k$ von $\widehat{H}$?

(d) Berechnen Sie $\psi_k = Q^+\phi_k$. Welche Bedeutung hat $\psi_k$ für den ursprünglichen Hamilton-Operator $H$? Geben Sie den Transmissionskoeffizienten für das Streuproblem am Potential $V(x)$ an.

# Einführung in die Quantentheorie

**Hausübung, Blatt 9** **SoSe 2018** **Abgabe: 19.06.2018**

## [H22] Zwei Delta-Zacken (3 Punkte)

Ein Teilchen der Masse $m$ bewegt sich in einer Dimension im Potential

$$V(x) = -V_0 \Big[\delta(x{+}a) + \delta(x{-}a)\Big] \qquad \text{mit} \qquad V_0 > 0 \quad \text{und} \quad a > 0\ .$$

(a) Bestimmen Sie die Gleichungen für die Energieeigenwerte der Bindungszustände.

*Hinweis*: Nutzen Sie die Symmetrie des Potentials.

(b) Lösen Sie die Gleichungen für die Grenzfälle $a \to 0$ und $a \to \infty$. Skizzieren Sie die Eigenwerte als Funktion von $a$.

*Bemerkung*: Dies ist ein Modell für das $H_2^+$-Ion. Die Annäherung der Kerne ist energetisch günstig und führt zur chemischen Bindung.

## [H23] Verallgemeinerter Potenzreihenansatz (4 Punkte)

Gegeben sei für ein Teilchen der Masse $m$ auf der Halbachse $x > 0$ das Potential

$$V(x) = \frac{m\omega^2}{2}\, a^2 \left(\frac{a}{x} - \frac{x}{a}\right)^2 .$$

(a) Bringen Sie die stationäre Schrödingergleichung durch Einführung einer dimensionslosen Variablen $\xi = \beta x$ auf die Form

$$\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\xi^2} - \frac{\beta^4 a^4}{\xi^2} - \xi^2 + 2(\epsilon + \beta^2 a^2)\right] \psi(\xi) \;=\; 0\ ,$$

wobei $\beta = \sqrt{m\omega/\hbar}$ und $\epsilon = E/\hbar\omega$ sowie $\psi(\xi) = \hbar\omega/2\, \phi_E(x)$.

(b) Untersuchen Sie das asymptotische Verhalten der Wellenfunktion $\psi$ für $\xi \to \infty$.

(c) Man mache den Ansatz

$$\psi(\xi) = W(\xi)\, \mathrm{e}^{-\xi^2/2} \qquad \text{und} \qquad W(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, \xi^{s+n} \qquad \text{mit} \quad a_0 \neq 0\,.$$

Gewinnen Sie eine Differentialgleichung für $W$.

(d) Bestimmen Sie aus dieser Differentialgleichung den Wert von $s$ und leiten Sie eine Rekursionsbeziehung für die Koeffizienten $a_n$ her.

(e) Das asymptotische Verhalten von $\psi$ erfordert, dass die Reihe für $W(\xi)$ abbricht. Ermitteln Sie aus dieser Bedingung das Energiespektrum.

**Bitte wenden**

**[H24] Kohärente Zustände** **(3 Punkte)**

Ein harmonischer Oszillator befinde sich zur Zeit $t = 0$ in einem Eigenzustand des Vernichtungsoperators,

$$a\,|\alpha(t{=}0)\rangle = \alpha_0\,|\alpha(t{=}0)\rangle \qquad \text{für ein} \quad \alpha_0 \in \mathbb{C}\,.$$

(a) Bestimmen Sie diesen Eigenzustand, indem Sie $|\alpha(t{=}0)\rangle$ nach den Energieeigenfunktionen $|n\rangle$ entwickeln und die Entwicklungskoeffizienten berechnen. Zeigen Sie, dass die zeitliche Entwicklung des Zustands gegeben ist durch

$$|\alpha(t)\rangle \sim \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t/2}\,\mathrm{e}^{\alpha(t)\,a^\dagger}\,|0\rangle \qquad \text{mit} \qquad \alpha(t) = \alpha_0\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,.$$

(b) Normieren Sie den Zustand $|\alpha(t)\rangle$ und berechnen Sie den Erwartungswert $\langle N\rangle$. Geben Sie die Wahrscheinlichkeit $W_n$ an dafür, dass sich der Oszillator im $n$-ten Energieeigenzustand befindet, und drücken Sie diese als Funktion von $\langle N\rangle$ aus.

(c) Betrachten Sie $\langle H\rangle$ für große $\langle N\rangle$. Welche Größe läßt sich im Vergleich zur klassischen Theorie als Amplitude der Schwingung interpretieren?

# Einführung in die Quantentheorie

**Hausübung, Blatt 11** **SoSe 2018** **Abgabe: 03.07.2018**

---

**[H27] Paramagnetische Elektronspin-Resonanz** **(3 Punkte)**

Ein Teilchen der Masse $m$, Ladung $e$ und Spin 1/2 befindet sich in einem zeitabhängigen Magnetfeld $\vec{B}(t)$. Der Hamiltonoperator dieses Systems lautet

$$H = \frac{e\hbar}{mc}\,\vec{B}(t)\cdot\vec{S} = \frac{e\hbar}{mc}\left(B_1 S_x \cos\omega t + B_1 S_y \sin\omega t + B_0 S_z\right) .$$

(a) Verwenden Sie zur Lösung der zeitabhängigen Schrödingergleichung den Ansatz

$$\begin{pmatrix} \langle +|\psi(t)\rangle \\ \langle -|\psi(t)\rangle \end{pmatrix} \;=\; \exp(\mathrm{i}\lambda t)\begin{pmatrix} a_1\,\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\omega t}{2}} \\ a_2\,\mathrm{e}^{+\frac{\mathrm{i}\omega t}{2}} \end{pmatrix} .$$

Welche Werte für $\lambda$ sind möglich? Die Rotationsfrequenz des Magnetfeldes sei gleich der Präzessionsfrequenz des Teilchens: $\omega = eB_0/mc$ (Siehe Präsenzübung **[P27]**). Bestimmen Sie $a_1$ und $a_2$ für alle erlaubten Werte von $\lambda$.

(b) Zur Zeit $t = 0$ ist das System im Eigenzustand von $S_z$ mit Eigenwert $s_z = 1/2$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass zur Zeit $t > 0$ der Wert $s_z = -1/2$ gefunden wird.

**[H28] Spin-Bahn-Kopplung** **(3 Punkte)**

Die Bewegung eines Protons (Spin 1/2) in einem rotationssymmetrischen Zentralpotential wird durch den Hamiltonoperator $H = H_0 + H_1$ mit

$$H_0 = \tfrac{1}{2m}P^2 + V(R) \qquad \text{und}$$
$$H_1 = \alpha\,\hat{\vec{L}}\cdot\hat{\vec{S}} \qquad \text{für} \quad \alpha = \text{konst.}$$

beschrieben. $H_1$ beschreibt dabei die Spin-Bahn-Kopplung.

Im Fall fehlender Spin-Bahn-Kopplung ($\alpha$=0) lassen sich die Eigenzustände von $H$ als Tensorprodukt

$$|n, \ell\, m_\ell, s\, m_s\rangle = |n\,\ell\, m_\ell\rangle \otimes |s\, m_s\rangle$$

aus einem Bahndrehimpuls-Eigenzustand $|n\,\ell\,m_\ell\rangle$ und einem Spin-Eigenzustand $|s\,m_s\rangle$ schreiben ($n$ ist eine weitere Quantenzahl). Die Eigenenergien für $\alpha$=0 sind $E^0_{n,\ell}$. Betrachten Sie im folgenden den Fall $\alpha \neq 0$.

(a) Verwenden Sie die Tensorprodukt-Basiszustände $\{|n, \ell\, m_\ell, s\, m_s\rangle\}$ und geben Sie $H$ bei festem $n$ explizit in dieser Darstellung für $\ell$=0 und $\ell$=1 an. Es gilt die Beziehung:

$$\hat{\vec{L}}\cdot\hat{\vec{S}} = \frac{1}{2}\left(\hat{L}_+\hat{S}_- + \hat{L}_-\hat{S}_+\right) + \hat{L}_z\hat{S}_z.$$

**Bitte wenden**

(b) Geben Sie die Eigenzustände und Eigenenergien von $H$ an. Benutzen Sie hierzu, dass die Drehimpulsoperatoren $\vec{J}^2$, $\hat{\vec{L}}^2$, $\hat{\vec{S}}^2$ und $J_z$ miteinander vertauschen.

*Bemerkung*: Man kann nun die Eigenvektoren von $H$ in (b) durch die Produktzustände $\{|n, \ell\, m_\ell, s\, m_s\rangle\}$ ausdrücken. Ein Vergleich mit (b) gibt dann die Basistransformation. Die dabei auftretenden Koeffizienten heißen *Clebsch-Gordan-Koeffizienten* (Siehe Präsenzübung [**P28**]).

## [H29] Dreidimensionaler harmonischer Oszillator (4 Punkte)

Die zeitunabhängige Schrödingergleichung des dreidimensionalen isotropen harmonischen Oszillators lautet

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + \frac{m\omega^2}{2}\,r^2\right)\psi_E = E\,\psi_E\,.$$

(a) Machen Sie den Separationsansatz $\psi_E(r,\vartheta,\varphi) = \frac{1}{r}\,\chi_{E,\ell}(r)\,Y_{\ell,m}(\vartheta,\varphi)$ und zeigen Sie, dass $\chi_{E,\ell}(r)$ die Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}^2\chi_{E,\ell}(r)}{\mathrm{d}r^2} + \left(\frac{2mE}{\hbar^2} - \lambda^2 r^2 - \frac{\ell(\ell{+}1)}{r^2}\right)\chi_{E,\ell}(r) = 0$$

mit $\lambda = m\omega/\hbar$ erfüllt.

(b) Bestimmen Sie das asymptotische Verhalten von $\chi_{E,\ell}(r)$ für $r \to 0$ und $r \to \infty$. Setzen Sie

$$\chi_{E,\ell}(r) = r^{\ell+1}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\lambda r^2}\,u_{E,\ell}(r)$$

und finden Sie die Differentialgleichung für $u_{E,\ell}(r)$.

(c) Substituieren Sie $u_{E,\ell}(r) = v_{E,\ell}(\eta)$ mit $\eta = \lambda r^2$ und geben Sie die Differentialgleichung für $v_{E,\ell}(\eta)$ an. Entwickeln Sie $v_{E,\ell}(\eta)$ in eine Potenzreihe

$$v_{E,\ell}(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \eta^n$$

und bestimmen Sie die Rekursionsbeziehung für die Koeffizienten.

(d) Die Forderung nach polynomialen Lösungen liefert eine Abbruchbedingung für die Rekursionsbeziehung der Koeffizienten. Berechnen Sie über die Abbruchbedingung die Energieeigenwerte $E_{N,\ell}$, wobei $N = 0, 1, \ldots$ geschickt zu wählen ist. In kartesischen Koordinaten findet man übrigens $E_{n_1,n_2,n_3} = \hbar\omega(n_1{+}n_2{+}n_3{+}\frac{3}{2})$. Verifizieren Sie, dass Sie tatsächlich die gleichen Energien und Entartungsgrade gefunden haben.

# Einführung in die Quantentheorie

**Hausübung, Blatt 12** | **SoSe 2018** | **Abgabe: 10.07.2018**

## [H30] Sphärischer Potentialtopf (4 Punkte)

Gegeben sei das dreidimensionale Potential

$$V(\vec{r}) = \begin{cases} -V_0 & \text{für } |\vec{r}| \leq R \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{mit} \quad V_0 > 0 \quad \text{und} \quad R > 0\,.$$

(a) Machen Sie einen Separationsansatz für den Winkel- und Radialanteil der stationären Wellenfunktion und formulieren Sie die radiale Schrödingergleichung. Man überprüfe explizit, dass

$$j_0 = \frac{\sin z}{z} \qquad \text{und} \qquad n_0 = -\frac{\cos z}{z}$$

mit geeignetem $z$ Lösungen der radialen Gleichung für $\ell$=0 sind.

(b) Wie lauten bei $\ell$=0 die physikalisch erlaubten Wellenfunktionen der Bindungszustände im Innen- und Außenraum?

*Hinweis*: Im Außenraum wähle man zweckmäßigerweise die Hankelfunktionen $h_\ell^+ = j_\ell + \mathrm{i}n_\ell$ und $h_\ell^- = j_\ell - \mathrm{i}n_\ell$ als Basislösungen.

(c) Zeigen Sie, dass die Anschlußbedingung bei $r$=$R$ auf folgende Gleichung führt:

$$\tan x = -\frac{x}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}} \qquad \text{mit} \qquad x = \sqrt{\tfrac{2mR^2}{\hbar^2}(V_0 - |E|)} \quad \text{und} \quad \alpha^2 = \frac{2mV_0}{\hbar^2}R^2\,.$$

Diskutieren Sie die Bestimmungsgleichung für die Energie-Eigenwerte. Fertigen Sie dazu eine Skizze an.

## [H31] Grundzustand des Wasserstoffatoms (3 Punkte)

Ein Wasserstoff-Elektron befinde sich im Grundzustand $|\psi\rangle$, der durch

$$\langle\vec{r}\,|\psi\rangle = (\pi a_0^3)^{-1/2}\,\mathrm{e}^{-|\vec{r}|/a_0}$$

mit dem Bohrschen Radius $a_0 = \hbar^2/(me^2) \approx 0.529 \cdot 10^{-10}$m beschrieben wird.

(a) überzeugen Sie sich, dass die Wellenfunktion richtig normiert ist.

(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit befindet sich das Elektron im Inneren einer Kugel vom Radius $a_0$?

(c) Berechnen Sie die Erwartungswerte des Hamiltonoperators $H$ und des Drehimpulses $\vec{L}$.

**Bitte wenden**

**[H32] Erweiterte Symmetrie des Wasserstoffatoms** **(3 Punkte)**

Betrachte das Wasserstoffatom mit dem Hamiltonoperator

$$H = \frac{\vec{P}^2}{2m} - \frac{k}{R}\,, \qquad k = e^2\,, \qquad R = \sqrt{\vec{R}^2}\,.$$

Der Pauli–Runge–Lenz Operator ist definiert als

$$\vec{A} = \frac{1}{2m}\left(\vec{L}\times\vec{P} - \vec{P}\times\vec{L}\right) + \frac{k}{\hbar}\frac{\vec{R}}{R}\,.$$

(a) Ein Operator $\vec{\Omega}$ heißt *Vektoroperator* genau dann, wenn $[L_i, \Omega_i] = \mathrm{i}\varepsilon_{ijk}\Omega_k$ ist. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass $\vec{R}$, $\vec{P}$ und $\vec{L}$ Vektoroperatoren sind. Zeigen Sie, dass auch $\vec{A}$ ein Vektoroperator ist.

*Hinweis:* Zeigen Sie zuerst, dass das Kreuzprodukt $\vec{\Omega}\times\vec{\Gamma}$ zweier beliebiger Vektoroperatoren $\vec{\Omega}$, $\vec{\Gamma}$ wieder ein Vektoroperator ist. Nutzen Sie weiter, dass $[L_i, \vec{R}^2] = 0$ und damit auch $[L_i, R^{-1}] = 0$ ist. (Warum ist das so?)

(b) Zeigen Sie, dass

$$\vec{A}^2 = \frac{k^2}{\hbar^2} + \frac{2H}{m}\left(\vec{L}^2 + 1\right)\,. \qquad (*)$$

*Hinweis:* Zeigen und nutzen Sie die folgenden Identitäten:

$$\vec{\Omega}\times\vec{L} = -\vec{L}\times\vec{\Omega} + 2\mathrm{i}\vec{\Omega}\,, \qquad \vec{L}\cdot\vec{\Omega} = \vec{\Omega}\cdot\vec{L}\,, \qquad [P_j, R^{-1}] = \mathrm{i}\hbar\frac{X_j}{R^3}\,,$$

wobei $\vec{\Omega}$ ein beliebiger Vektoroperator ist.

(c) Weil $\vec{A}$ ein Vektoroperator ist, gilt $[L_i, A_j] = \mathrm{i}\varepsilon_{ijk}A_k$. Weiter ist (dies zu zeigen ist nicht Teil der Aufgabe):

$$[H, A_i] = 0\,, \qquad [A_i, A_j] = -\mathrm{i}\varepsilon_{ijk}L_k\frac{2H}{m}\,.$$

Die Existenz von $\vec{A}$ lässt sich nutzen, um die Energienieveaus und deren Entartungsgrade im Wasserstoffatom zu finden. Betrachten Sie dazu den Eigenzustandsraum $\mathcal{H}(E)$ von $H$ zu einem festen Eigenwert $E < 0$, und definieren Sie hierin die Operatoren

$$S_i = \frac{1}{2}\left(L_i - \alpha A_i\right)\,, \qquad T_i = \frac{1}{2}\left(L_i + \alpha A_i\right)\,, \qquad \alpha = \sqrt{\frac{m}{2|E|}}\,.$$

Zeigen Sie folgende Relationen:

$$\vec{S}^2 = \vec{T}^2\,, \qquad [S_i, T_j] = 0\,, \qquad [S_i, S_j] = \mathrm{i}\varepsilon_{ijk}S_k\,, \qquad [T_i, T_j] = \mathrm{i}\varepsilon_{ijk}T_k\,.$$

Nutzen Sie jetzt die Eigenschaften der Drehimpulsalgebra-Darstellungen sowie die Beziehung $(*)$, um die Energieniveaus und Entartungsgrade im Wasserstoffatom für $E < 0$ zu finden.

*Hinweis:* $\vec{T}^2$ hat die Eigenwerte $= t(t+1)$ mit Entartung $(2t+1)$.

# Einführung in die Quantentheorie

**Hausübung, Blatt 13 (optional)** **SoSe 2018** **Abgabe: 17.07.2018**

## [H33] Messungen an einem Satz von Operatoren (2 Punkte)

Betrachten Sie die Operatoren

$$L_x \doteq \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}, \qquad L_y \doteq \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & -\mathrm{i} & 0\\ \mathrm{i} & 0 & -\mathrm{i}\\ 0 & \mathrm{i} & 0\end{pmatrix}, \qquad L_z \doteq \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

(a) Welche Meßergebnisse für $L_z$ gibt es? Berechnen Sie $\langle L_y\rangle$, $\langle L_y^2\rangle$ und $\Delta L_y$ im Zustand $|L_z = +1\rangle$.

(b) Was sind die prinzipiell möglichen Ergebnisse, wenn man $L_x$ messen würde?

(c) Gegeben sei der Zustand

$$|\psi\rangle = \tfrac{1}{2}|L_z = +1\rangle + \tfrac{1}{2}|L_z = 0\rangle + \tfrac{1}{\sqrt{2}}|L_z = -1\rangle\,.$$

Wenn $L_z^2$ gemessen wird und das Ergebnis $+1$ ist, was ist der Zustand nach dieser Messung? Wie wahrscheinlich war dieses Ergebnis?

(d) Geben Sie die möglichen Ergebnisse bei einer $L_z$-Messung und deren Wahrscheinlichkeiten für den Zustand $|\psi\rangle$ aus Punkt (c) an.

## [H34] Transmission und Reflexion (2 Punkte)

Berechnen Sie Transmissions- und Reflexionskoeffizienten für das Potential

$$V(x) = A\,\delta(x) + B\,\Theta(x)$$

mit Potentialstrufe $\Theta$ und $\delta$-Funktion am selben Ort, wobei $A, B > 0$. Das Teilchen laufe von links ein mit Energie $E > B$.

## [H35] Bilokalisiertes Teilchen (2 Punkte)

Ein freies Teilchen der Masse $m$ in einer Dimension sei zum Zeitpunkt $t = 0$ an den Orten $x = \pm a$ lokalisiert:

$$\psi(x,0) = \lambda\,\delta(x-a) + (1-\lambda)\,\delta(x+a)\,,$$

wobei $\lambda$ die relative Amplitude für die beiden Positionen $x = \pm a$ parametrisiert.

(a) Bestimmen Sie die (nicht normierte) Wellenfunktion $\psi(x,t)$ des Teilchens für einen späteren Zeitpunkt $t > 0$.

(b) Berechnen Sie die (nicht normierte) Wahrscheinlichkeit $W_a(t)$, dass das Teilchen zum Zeitpunkt $t$ am Ort $x = a$ lokalisiert, sich also im Zustand mit der Wellenfunktion

$$\psi_a(x,t) = \delta(x-a)$$

befindet. Skizzieren Sie qualitativ den zeitlichen Verlauf $W_a(t)$ für $t > 0$.

**Bitte wenden**

**[H36] Oszillatormodell für den Drehimpuls** **(2 Punkte)**

Betrachten Sie zwei ungekoppelte eindimensionale harmonische Oszillatoren und beschreiben Sie sie durch Erzeuger $a^\dagger$, $b^\dagger$ und Vernichter $a$, $b$:

$$[a, a^\dagger] = \mathbf{1}\,, \qquad [b, b^\dagger] = \mathbf{1}\,, \qquad \text{alle anderen Kommutatoren} = 0\,.$$

Definieren Sie $L_+ \equiv a^\dagger b$.

(a) Drücken Sie $L_- = (L_+)^\dagger$ und $L_3 = \frac{1}{2}[L_+, L_-]$ durch Erzeuger und Vernichter aus.

(b) Verifizieren Sie $[L_3, L_\pm] = \pm L_\pm$. Damit ist die Drehimpuls-Algebra realisiert.

(c) Als Basiszustände wählen Sie die gemeinsamen Eigenkets der beiden Anzahl-Operatoren $N_a = a^\dagger a$ und $N_b = b^\dagger b$:

$$N_a|n_a, n_b\rangle = n_a\,|n_a, n_b\rangle \quad \text{und} \quad N_b|n_a, n_b\rangle = n_b\,|n_a, n_b\rangle\,.$$

Berechnen Sie die Wirkung der Operatoren $L_3$, $L_+$, $L_-$ und $\vec{L}^2 = L_3^2 + \frac{1}{2}(L_+L_- + L_-L_+)$ auf die Zustände $|n_a, n_b\rangle$.

(d) Welche Beziehung zwischen den Eigenwerten $(n_a, n_b)$ und den üblichen Quantenzahlen $(\ell, m)$ finden Sie?

**[H37] Relativistischer Oszillator: Störungstheorie** **(2 Punkte)**

Die relativistische Energie eines Teilchens $E = \sqrt{c^2p^2 + m^2c^4}$ kann für kleine Geschwindigkeiten in $E = mc^2 + \frac{p^2}{2m} - \frac{1}{8}\frac{p^4}{m^3c^2} + \mathcal{O}(p^6)$ entwickelt werden.

(a) Berechnen Sie mit Hilfe dieser Näherung in erster Ordnung Störungstheorie die relativistischen Korrekturen zu den Energieniveaus des harmonischen Oszillators,

$$H = H_0 + V\,, \qquad H_0 = \frac{P^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}X^2\,, \qquad V = -\frac{1}{8m^3c^2}P^4$$

(die Ruheenergie $mc^2$ kann in diesem Zusammenhang ignoriert werden).

(b) Welche Bedingung muss $\omega$ erfüllen, damit dieses Ergebnis eine gute Näherung sein kann?

*Hinweis:* Drücken Sie $P^4$ durch $a$ und $a^\dagger$ aus!