Einführung in die Quantentheorie

Präsenzübung, Blatt 9 **SoSe 2018** **12./13.06.2018**

[P23] Matrixelemente des harmonischen Oszillators

Bei der Diskussion des eindimensionalen harmonischen Oszillators wurden die Operatoren

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varXi + \mathrm{i}\varPi)\,, \qquad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varXi - \mathrm{i}\varPi) \tag{1}$$

mit der Wirkung

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle\,, \qquad a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \tag{2}$$

eingeführt. Dabei bezeichnet der Zustand $|n\rangle$ einen Eigenzustand des Hamiltonoperators, und es gilt $\langle l|m\rangle = \delta_{l,m}$.

Berechnen Sie die Matrixelemente $\langle l|\varOmega|m\rangle$ für $\varOmega \in \left\{aa^\dagger, a^\dagger a, \varXi, \varPi, \varXi^2, \varPi^2, \{\varXi, \varPi\}\right\}$.

[P24] Zweidimensionaler isotroper harmonischer Oszillator

Der Hamiltonoperator für den zweidimensionalen isotropen harmonischen Oszillator lautet in geeigneten Einheiten

$$H = \frac{\hbar\omega}{2}\sum_{i=1}^{2}\left(P_i^2 + Q_i^2\right)\,.$$

(a) Führen Sie Leiteroperatoren $a_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_i + \mathrm{i}P_i)$ ein und stellen Sie deren Vertauschungsrelationen auf. Der Grundzustand $|0,0\rangle$ ist definiert durch $a_i|0,0\rangle = 0$ für $i = 1,2$. Konstruieren Sie die Eigenzustände $|n_1,n_2\rangle$ von H und bestimmen Sie die Energieeigenwerte. Diskutieren Sie die Entartung.

(b) Untersuchen Sie den Drehimpulsoperator

$$L = \hbar(Q_1P_2 - Q_2P_1)\,, \tag{3}$$

indem Sie Operatoren $b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1 - \mathrm{i}a_2)$ und $b_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1 + \mathrm{i}a_2)$ einführen. Stellen Sie deren Vertauschungsrelationen auf und drücken Sie den Drehimpulsoperator durch die neuen Operatoren aus. Konstruieren Sie nun simultane Eigenzustände $|m_1,m_2\rangle$ zu $b_1^\dagger b_1$ und $b_2^\dagger b_2$ bzw. zu H und L. Welche Drehimpulse sind bei vorgegebener Energie möglich?