Einführung in die Quantentheorie

Präsenzübung, Blatt 7 **SoSe 2018** **29./30.05.2018**

[P19] Wahrscheinlichkeitsstrom

(a) Die Wellenfunktion eines freien Teilchens mit der Masse m sei für $t = 0$ durch

$$\langle x|\psi\rangle \;=\; a\,\exp(\mathrm{i}k_1 x) + b\,\exp(\mathrm{i}k_2 x)$$

gegeben. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte und die Wahrscheinlichkeitsstromdichte als Funktion der Zeit. Verifizieren Sie die Stromerhaltung.

(b) Zeigen Sie, dass allgemein gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\; j(x) \;=\; \frac{\langle P\rangle}{m}\,.$$

[P20] Quantisierung im Phasenraum

Jeder Funktion $f(q,p)$ im klassischen Phasenraum läßt sich im Hilbertraum eindeutig ein Operator F zuordnen durch die sogenannte Weyl-Ordnungs-Vorschrift

$$F \;=\; \text{symmetrische Ordnung von } f(q{\to}Q, p{\to}P) \qquad \text{mit} \quad [Q,P] = \mathrm{i}\hbar\mathbf{1}\,; \tag{1}$$

z.B. wird $f = q^2 p$ zu $F = \frac{1}{3}(Q^2P + QPQ + PQ^2)$. Die (ebenfalls eindeutige) Umkehrung liefert für jeden Hilbertraum-Operator G (als Funktion der Operatoren Q und P) eine Phasenraum-Funktion

$$g_\hbar(q,p) \;=\; G_\star(Q{\to}q, P{\to}p)\,, \tag{2}$$

wobei die Funktion $G_\star(q,p)$ aus der Funktion $G(q,p)$ dadurch entsteht, dass Produkte aus q und p mit dem neuen (nichtkommutativen Stern-)Produkt

$$q\star q \;=\; q^2\,, \qquad q\star p \;=\; qp + \tfrac{\mathrm{i}\hbar}{2}\,, \qquad p\star q \;=\; pq - \tfrac{\mathrm{i}\hbar}{2}\,, \qquad p\star p \;=\; p^2 \tag{3}$$

zu bilden sind. Seine assoziative Erweiterung auf beliebige Funktionen lautet

$$\Big(f\star g\Big)(q,p) \;=\; f(q,p)\;\exp\Big\{\tfrac{\mathrm{i}\hbar}{2}\,(\overleftarrow{\partial}_q\overrightarrow{\partial}_p - \overleftarrow{\partial}_p\overrightarrow{\partial}_q)\Big\}\;g(q,p)\,. \tag{4}$$

An die Abhängigkeit von $\hbar$ erinnert in (2) die Notation $g_\hbar$.

(a) Entwickeln Sie das Stern-Produkt bis zur Ordnung $\hbar^2$ und identifizieren Sie die Ordnung $\hbar$. Welche Ordnungen sind symmetrisch oder antisymmetrisch?

(b) Verifizieren Sie mit (4) oder dem Ergebnis zu (a) die Produkte in (3).

(c) Prüfen Sie am Beispiel $f = q^2 p$, ob (2) tatsächlich die Umkehrung von (1) ist, d.h. ob die $\hbar$-Abhängigkeit herausfällt in $f \to F \to f_\hbar{=}f$.

(d) Welches ist die zum Hamilton-Operator $H = \frac{P^2}{2m}{+}V(Q)$ gehörige Phasenraum-Funktion $h_\hbar(q,p)$? Gilt $h_\hbar = h \equiv \frac{p^2}{2m} + V(q)$?

(e) Bilden Sie für eine Observable F die Heisenbergsche Bewegungsgleichung

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F \;=\; \tfrac{1}{\mathrm{i}\hbar}\,[F,H] \qquad\qquad (\partial_t F = 0)$$

via (2) auf den Phasenraum ab. Wie lautet der klassische Beitrag ($\hbar \to 0$), wie die führende Quantenkorrektur, falls $H = \frac{P^2}{2m} + V(Q)$ und $f_\hbar = f$?

(f) Können Sie die Lösung $f_\hbar(t)$ mit einer „Zeitentwicklungsfunktion“ angeben?