Einführung in die Quantentheorie

Präsenzübung, Blatt 6 **SoSe 2018** **15./16.05.2018**

[P17] Quanten-Bahnen für freie Teilchen

(a) Benutzen Sie den Propagator für ein freies Teilchen in einer Dimension,

$$\langle x|U(t)|y\rangle = \sqrt{\frac{m}{2\pi \mathrm{i}\hbar t}}\,\exp\!\Big(\frac{\mathrm{i}m(x-y)^2}{2\hbar t}\Big) = \sqrt{\frac{m}{2\pi \mathrm{i}\hbar t}}\,\exp\!\Big(\tfrac{\mathrm{i}}{\hbar}\,S_{\mathrm{cl}}(y,0;x,t)\Big)\,,$$

um die Kompositionseigenschaft

$$U(t_2)\,U(t_1) = U(t_1+t_2)$$

des Zeitentwicklungsoperators $U(t)$ zu bestätigen. Interpretieren Sie den nötigen Rechenschritt in einem Raum-Zeit-Diagramm.

(b) Betrachten Sie in drei Dimensionen ein klassisches Teilchen von einem Gramm Masse, welches zweimal örtlich detektiert wird, und zwar in zeitlichem Abstand von einer Sekunde und räumlichem Abstand von einem Zentimeter.

* Wie groß ist die Wirkung S_{cl} der klassischen Bahn zwischen den Detektions-Ereignissen?
* Wie weit darf das Teilchen seitlich vom klassischen Pfad abweichen, ohne die Forderung $\Delta S \leq \pi\hbar$ konstruktiver Interferenz benachbarter Bahnen zu verletzen? Wählen Sie einen gleichschenkligen „Dreiecks-Umweg“.

Stellen Sie die gleichen Überlegungen für ein Elektron ($m \approx 10^{-27}$g) an, welches sich mit derselben Geschwindigkeit bewegt. Vergleichen und interpretieren Sie die „erlaubten“ Abweichungen. ($\hbar \approx 10^{-34}$ Js)

[P18] Messungen bei kommutierenden Observablen

Gegeben sei in einem dreidimensionalen Hilbertraum ein normierter Zustand

$$|\psi\rangle = \alpha|\omega_1\rangle + \beta|\omega_2\rangle + \gamma|\omega_3\rangle\,.$$

Ferner sei $\{|\omega_i\rangle\}$ die normierte Eigenbasis (Eigenwerte ω_i) eines Operators $\Omega = \Omega^\dagger$.

(a) Welche Messwerte von Ω sind möglich und mit welcher Wahrscheinlichkeit treten sie auf?

(b) Wie groß ist der Erwartungswert $\langle\Omega\rangle$ im Zustand $|\psi\rangle$?

Nehmen Sie nun den entarteten Fall $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ und $\omega_3 = \omega'$ an. Ein zweiter hermitescher Operator Λ mit den Eigenwerten λ (ebenfalls entartet) und λ' vertausche mit Ω, so dass

$$|\omega_1\rangle = |\omega,\lambda'\rangle\,,\quad |\omega_2\rangle = |\omega,\lambda\rangle\,,\quad |\omega_3\rangle = |\omega',\lambda\rangle\,.$$

(c) Wie stehen die Chancen, bei Ω-Messung den Wert ω zu finden? In welchem Zustand $|\psi'\rangle$ befindet sich das System danach?

(d) Was können Sie ohne Kenntnis von $|\psi\rangle$ über $|\psi'\rangle$ sagen?

(e) Wie wahrscheinlich sind λ, λ', nachdem ω' gemessen wurde?

(f) Wie oft wird nach ω der Wert λ gemessen?

(g) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, zuerst ω und dann λ zu finden? Vergleichen Sie mit dem umgekehrten Fall.