Einführung in die Quantentheorie

Präsenzübung, Blatt 4 **SoSe 2018** **02.05.2018**

[P12] Kommutatorrelationen und deren Konsequenzen

(a) Man betrachte zwei lineare Operatoren A und B, die eine vollständige, orthonormale Menge von simultanen Eigenkets $\{|a,b\rangle\}$ besitzen. Kann man daraus immer schließen, dass A und B miteinander kommutieren?

Wenn Ihre Antwort „Ja“ lautet, beweisen Sie Ihre Behauptung. Ist Ihre Antwort „Nein“, geben Sie ein Gegenbeispiel an.

(b) Betrachten Sie zwei *nicht* miteinander kommutierende Operatoren A_1 und A_2. Andererseits mögen diese Operatoren mit einem dritten Operator H kommutieren. Zeigen Sie, dass H mindestens einen entarteten Eigenwert hat.

[P13] Ein hermitescher Differentialoperator

Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\,u(x) = k^2\,u(x)\,.$$

(a) Für welche Werte von k erfüllen die Lösungen der obigen Dgl. die Randbedingungen $u(0) = u(a) = 0$ mit $a > 0$?

(b) Seien u_n und u_m zwei Lösungen zu verschiedenem k, welche die Randbedingungen aus Punkt (a) erfüllen. Zeigen Sie, dass die Orthogonalitätsbedingung

$$\int_0^a \mathrm{d}x\; u_n(x)\,u_m(x) = 0$$

erfüllt ist.

[P14] Fourier-Transformation

(a) Sei $\psi(x) = \delta(x-a)$. Wie lautet die Fourier-Transformierte $\tilde{\psi}(k)$?

(b) Von $\psi(x)$ sei die Fourier-Transformierte $\tilde{\psi}(k)$ bekannt. Wie erhält man daraus die Fourier-Transformierte von $x\psi(x)$?

(c) Sei $\psi(x) = g(x) + \int \mathrm{d}y\, K(x-y)\psi(y)$, wobei g und K bekannte Funktionen seien. Wie lautet die entsprechende Gleichung für $\tilde{\psi}(k)$? (Gleich hinschreiben!)

(d) Es gelte $\psi(x+L) = \psi(x)$. Wie folgt aus der Fourier-Transformation die Fourier-Reihe?

Zur Erinnerung die Konventionen zur Fourier-Transformation:

$$\tilde{f}(k) = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{-ikx} f(x)\,, \quad f(x) = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \mathrm{d}k\, \mathrm{e}^{ikx} \tilde{f}(k)\,.$$