

Einführung in die Quantentheorie

Hausübung, Blatt 8

SoSe 2018

Abgabe: 12.06.2018

[H19] Nullpunktsenergie des harmonischen Oszillators (3 Punkte)

Leiten Sie mit Hilfe der Unschärferelation eine untere Grenze für die Energie eines harmonischen Oszillators,

$$H = \frac{1}{2m}P^2 + \frac{m\omega^2}{2}X^2,$$

in einem stationären Zustand her.

Hinweis: Drücken Sie $\langle H \rangle$ durch $\langle X^2 \rangle$ aus und minimieren Sie.

[H20] Streuung am Delta-Potential (4 Punkte)

Ein Teilchen der Masse m wird gestreut am Potential

$$V(x) = v_0 \delta(x) \quad \text{mit} \quad v_0 \in \mathbb{R}.$$

- Setzen Sie die Wellenfunktion in den Bereichen $x > 0$ und $x < 0$ an. Welche Anschlussbedingungen muss die Wellenfunktion an der Stelle $x = 0$ erfüllen?
- Man bestimme die Transmissionsmatrix $Q(E)$ und die Streumatrix $S(E)$. Für welches Vorzeichen von v_0 und welche Energie gibt es einen Pol und was bedeutet er?
- Geben Sie Transmissions- und Reflexionskoeffizient als Funktion der Energie an (mit Skizze). Zeigen Sie, dass $R(E) + T(E) = 1$ gilt.

[H21] Reflexionsfreies Potential und Supersymmetrie (3 Punkte)

Betrachten Sie den Hamilton-Operator

$$H = \frac{1}{2}(Q^+Q^- - \mathbf{1}),$$

wobei die Operatoren Q^\pm im Ortsraum durch die Differentialoperatoren

$$Q^\pm = \mp \frac{d}{dx} + \tanh x$$

gegeben sind. Wir haben $\hbar = m = 1$ gesetzt.

- Wie lautet das Potential $V(x)$ in diesem Hamilton-Operator?
- Lösen Sie die Differentialgleichung $Q^- \psi_b = 0$. Was ist ψ_b in Bezug auf H ?
- Betrachten Sie den mit H verwandten Hamilton-Operator

$$\widehat{H} = \frac{1}{2}(Q^-Q^+ - \mathbf{1}).$$

Wie lauten die Eigenfunktionen $\phi_k(x)$ und die Eigenwerte E_k von \widehat{H} ?

- Berechnen Sie $\psi_k = Q^+ \phi_k$. Welche Bedeutung hat ψ_k für den ursprünglichen Hamilton-Operator H ? Geben Sie den Transmissionskoeffizienten für das Streuproblem am Potential $V(x)$ an.