

Einführung in die Quantentheorie

Hausübung, Blatt 1

SoSe 2018

Abgabe: 17.04.2018

[H1] Exponentialfunktion einer Matrix

(4 Punkte)

Auch für Matrizen definiert man die Exponentialfunktion mit Hilfe der Potenzreihenentwicklung:

$$\exp M = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} M^n.$$

- (a) Sei M eine konstante Matrix. Zeigen Sie, dass die Lösung der Differentialgleichung $\frac{d}{dt}\vec{x}(t) = iM\vec{x}(t)$ durch $\vec{x}(t) = \exp(itM)\vec{x}(0)$ gegeben ist.
- (b) Sei M eine spurlose, imaginäre 2×2 -Matrix und deshalb eine Linearkombination der drei Matrizen

$$M_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Welche der M_i sind hermitesch, welche antihermitesch?

Berechnen Sie $U_i = \exp(itM_i)$; welche der U_i sind unitär?

Verifizieren Sie für die drei Fälle die Beziehung $\det(\exp A) = \exp(\operatorname{tr} A)$.

[H2] Basistransformationen

(3 Punkte)

Es bezeichnen $|x'(\theta)\rangle$ und $|y'(\theta)\rangle$ die Basisvektoren eines um den Winkel θ bzgl. der (x, y) -Basis gedrehten Koordinatensystems. Man zeige, dass die Komponenten $\langle x'(\theta)|\psi\rangle$, $\langle y'(\theta)|\psi\rangle$ eines Vektors $|\psi\rangle$ in dieser Basis die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} -i \frac{\partial}{\partial \theta} \langle x'(\theta)|\psi\rangle &= \langle x'(\theta)|S|\psi\rangle, \\ -i \frac{\partial}{\partial \theta} \langle y'(\theta)|\psi\rangle &= \langle y'(\theta)|S|\psi\rangle, \end{aligned}$$

erfüllen (wobei $S = M_2$ aus Aufgabe [H1](b)). Konstruieren Sie die explizite Lösung dieser Dgl. für $|\psi\rangle = |R\rangle$ und $|\psi\rangle = |L\rangle$. ($|R\rangle$ und $|L\rangle$ wie in der Vorlesung.)

Bitte wenden

[H3] Aufspaltung eines Atomstrahls**(3 Punkte)**

Jemand experimentiert mit einem Strahl von Helium-Atomen im angeregten 3S_1 Triplett-Zustand (Elektron-Konfiguration $1s2s$, Kernspin 0). Die Atome werden demnach durch Zustandsvektoren in \mathbb{C}^3 charakterisiert. In einer geeigneten Basis wird die benutzte Stern-Gerlach-Messapparatur durch die Matrix

$$M \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

beschrieben. Sie spaltet den Atomstrahl auf in drei Teile, deren Atome sich dann jeweils in den Eigenzuständen

$$|\rightarrow\rangle \doteq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\circ\rangle \doteq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\leftarrow\rangle \doteq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

befinden. Die drei Teilstrahlen passieren unmittelbar darauf eine zweite, identische Messapparatur, welche gegenüber der ersten um 90° gedreht ist. Diese Drehung ist in \mathbb{C}^3 realisiert durch die Matrix

$$\mathcal{R} \doteq \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

so dass der zweite Satz von Eigenzuständen lautet

$$|\uparrow\rangle = \mathcal{R} |\rightarrow\rangle, \quad |\bullet\rangle = \mathcal{R} |\circ\rangle, \quad |\downarrow\rangle = \mathcal{R} |\leftarrow\rangle. \quad (4)$$

Bestimmen Sie die Intensitäten $W_{\alpha i}$ mit $i = \rightarrow, \circ, \leftarrow$ und $\alpha = \uparrow, \bullet, \downarrow$ der neun Teilstrahlen nach der zweiten Aufspaltung.