

Diplomarbeit

Primordiale Schwarze Löcher
im
inflationären Universum

vorgelegt von
Torsten Bringmann

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Fakultät für Physik
November 2001

Wissenschaftliche Betreuung:
Prof. Dr. Claus Kiefer

*Nicht existierte Nichtseiendes,
noch auch existierte Seiendes damals -
nicht existierte der Raum,
noch auch der Himmel jenseits davon.*

[...]

*Finsternis war verborgen
durch Finsternis im Anfang.
Kennzeichenlose Salzflut war dieses All.
Der Keim, der von Leere bedeckt war,
wurde geboren als Einziges
durch die Macht einer [Brut-] Hitze.*

aus: Der Ursprung der Welt
(Bhāvavṛttam) RV 10, 129.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	3
1 Moderne Kosmologie	7
1.1 Das kosmologische Standardmodell	9
1.1.1 Friedmann-Lemaître-Modelle	9
1.1.2 Thermische Geschichte des Universums	12
1.1.3 Probleme des Standardmodells	15
1.2 Das inflationäre Universum	17
1.2.1 Inflation als Lösung	17
1.2.2 Mechanismus und allgemeines Konzept	20
1.2.3 Verschiedene Inflationsmodelle	23
1.3 Dichtefluktuationen im frühen Universum	24
1.3.1 Kosmologische Störungen und ihre Entwicklung	24
1.3.2 Entstehung aus Quantenfluktuationen	30
2 Schwarze Löcher	35
2.1 Klassische Behandlung	36
2.2 Quantenaspekte	41
3 Primordiale Schwarze Löcher (PBHs)	47
3.1 Entstehung im frühen Universum	49
3.2 Die weitere Entwicklung eines PBH	53
3.3 Dichteverteilung	56
3.4 Vergleich mit Beobachtungen	59
4 PBHs und Inflation	65
4.1 Normierung von Fluktuationsspektren	66
4.2 Skalenfreie Fluktuationsspektren	69
4.2.1 Normierung	69
4.2.2 Einschränkungen an den Spektralindex	71

4.3	Gebrochene Skaleninvarianz	75
4.3.1	Skalenfreie Spektren mit Stufe	75
4.3.2	Spektren aus BSI-Inflationsmodellen	79
	Fazit und Ausblick	85
	Literaturverzeichnis	87

Einleitung

Die Frage nach dem Ursprung des Universums und unserem Platz darin beschäftigt die Menschheit bereits seit Urzeiten und ist in vielen Sagen und (Schöpfungs-) Mythen wiederzufinden. Die wissenschaftliche Beschäftigung mit kosmologischen Fragestellungen, verbunden mit präzisen Beobachtungen und Vorhersagen, ist aber weitaus jüngeren Datums. Zwar konnten bereits die Babylonier die Bewegungen des Mondes und der Planeten voraussagen – die erste Entfernungsmessung zu einem anderen Stern als der Sonne gelang dennoch erst Bessel in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts mit Hilfe der Parallaxenbestimmung.

Im 20. Jahrhundert machte die Kosmologie dann rasante Fortschritte, beginnend mit der Aufstellung der Allgemeinen Relativitätstheorie durch Einstein. Diese konnte zwanglos die kurze Zeit später von Hubble gemachte Beobachtung erklären, daß sich entfernte Galaxien mit einer im wesentlichen nur von der Entfernung abhängigen Geschwindigkeit von uns fortbewegen. Aufgrund dieser Beobachtung und ihrer Erklärung entstand das Bild eines Universums, das seit einer als *Urknall* bezeichneten Anfangssingularität am Expandieren ist. Diese Vorstellung wurde 1965 durch die Entdeckung der schon 1949 als “Echo” des Urknalls vorhergesagten kosmischen Hintergrundstrahlung eindrucksvoll bestätigt. Seit den 80er Jahren ist erneut ein verstärktes Interesse an theoretischer Kosmologie und Astrophysik zu verzeichnen, was zum einen auf die immer besseren Beobachtungsmöglichkeiten zurückzuführen ist und zum anderen auf die Entwicklungen in der Astro- und Teilchenphysik, die ein immer genaueres Bild des sehr frühen Universums zu zeichnen vermögen und darüber auch zu einem immer präziseren Verständnis des heutigen Universums gelangen. Auf der Beobachtungsseite ist hier vor allem die immer genauere Vermessung der Hintergrundstrahlung zu nennen, da sie ein praktisch unverändertes “Photo” des sehr frühen Universums darstellt.

Man geht heute davon aus, daß sich das Universum zu einer sehr frühen Zeit – viel früher als zur Zeit der Entstehung der Hintergrundstrahlung –

kurzfristig explosionsartig aufgebläht hat. Diese Phase wird als *Inflation* bezeichnet und hilft, verschiedene Probleme der Kosmologie zu verstehen. Während sich das Augenmerk dabei zunächst auf eine Reihe von Feinabstimmungsproblemen¹ richtete, bestimmt heute vor allem die Frage nach der Entstehung von Strukturen im Universum die Bedeutung der Inflation: Nach heutigem Verständnis sind während der inflationären Phase zunächst kleine Dichteschwankungen aus spontanen Quantenfluktuationen entstanden und haben dann im Laufe der weiteren Entwicklung unter dem Einfluß der Gravitation die heute beobachtbaren großräumigen Strukturen wie interstellare Nebel, Galaxien und Galaxiencluster gebildet. Durch eine Analyse der heute zu beobachtenden Dichtefluktuationen (z.B. anhand der Anisotropie der Hintergrundstrahlung) lassen sich damit wertvolle Hinweise über die Form der ursprünglichen Quantenfluktuationen und damit über Theorien für das sehr frühe Universum gewinnen.

Eine besonders interessante Konsequenz derartiger Dichtefluktuationen im frühen Universum ist die Existenz von sogenannten *primordialen² Schwarzen Löchern*: Da die Dichtefluktuationen aufgrund ihres quantenmechanischen Ursprungs immer statistischer Natur sind, muß es nämlich Regionen gegeben haben, die so dicht waren, daß sie unter dem Einfluß ihrer eigenen Gravitationskraft sehr bald zu Schwarzen Löchern kollabierten. Diese Objekte können im Gegensatz zu Schwarzen Löchern, die aus dem Kollaps ausgebrannter Sterne entstehen, sehr klein sein und somit im Prinzip beobachtbare Quanteneffekte wie beispielsweise die Hawking-Strahlung aufweisen.

Das Ziel dieser Arbeit ist es, die Produktion primordialer Schwarzer Löcher im Lichte verschiedener inflationärer Theorien zu untersuchen. Aus den aus der Beobachtung verfügbaren Einschränkungen der Dichte primordialer Schwarzer Löcher im Universum sollen dann Bedingungen an diese Theorien über das sehr frühe Universum gewonnen werden. Im ersten Kapitel wird dazu zunächst ein Überblick über den heutigen Stand der Kosmo-

¹Im Zusammenhang mit den verschiedentlich auftauchenden Feinabstimmungsproblemen wird immer wieder das *anthropische Prinzip* herangezogen, das in seiner einfachsten Fassung fordert, daß die beobachteten Werte physikalischer Größen wie Naturkonstanten, Alter des Universums etc. in Übereinstimmung mit der Möglichkeit menschlicher Existenz stehen müssen. Die physikalische Bedeutung dieses Prinzips wird beispielsweise in [55] und den darin aufgeführten Verweisen diskutiert.

Es ist aber ohnehin fraglich, ob es sich bei Feinabstimmungsproblemen um physikalisch wohldefinierte Fragestellungen handelt, da hier die Plausibilität gewisser Anfangsbedingungen diskutiert wird, die ja üblicherweise eher als gegeben bzw. als dem Experiment zu entnehmen behandelt werden.

²d.h. "uranfänglichen", also im sehr frühen Universum entstandenen

logie gegeben, mit einem Schwerpunkt auf Inflation und der Entstehung von Strukturen im Universum. Außerdem werden hier einige grundsätzliche Eigenschaften statistischer Größen zusammengestellt, die später für die Behandlung der Dichtefluktuationen benötigt werden. Die allgemeinen Eigenschaften Schwarzer Löcher, sowohl klassisch als auch unter Berücksichtigung von Quanteneffekten, werden im zweiten Kapitel vorgestellt. Im dritten Kapitel sollen dann ausführlich primordiale Schwarze Löcher behandelt werden, von ihrer Entstehung im frühen Universum bis zu ihrer weiteren Entwicklung und den diversen Einschränkungen für ihre Häufigkeit. Die Berechnung der Anzahldichte primordialer Schwarzer Löcher schließlich wird im letzten Kapitel durchgeführt, und zwar sowohl für skaleninvariante Spektren der primordialen Dichtefluktuationen als auch für Spektren mit einer ausgezeichneten Skala. Beide Fälle sind durch entsprechende Inflationsmodelle motiviert und werden hier ausführlich diskutiert. Abschließend sollen dann die wesentlichen Ergebnisse dieser Arbeit, die auch in [8, 9] zu finden sind, zusammengefaßt und ihre Bedeutung für die Physik des frühen Universums betont werden.

Konventionen: In dieser Arbeit wurden Einheiten verwendet, in denen $c = \hbar = 1$ gilt. Die Signatur der Metrik ist $(+ - - -)$. Raumzeitliche Indizes werden mit griechischen, räumliche mit lateinischen Buchstaben bezeichnet; ferner gilt die Summenkonvention, d.h. über zwei gleichlautende (oben und unten stehende) Indizes wird summiert.

Kapitel 1

Moderne Kosmologie

Schon sehr bald nach Vollendung der Allgemeinen Relativitätstheorie im Jahre 1915 wurden von Friedmann Lösungen der Einsteinschen Feldgleichungen gefunden, die das Universum als Ganzes beschreiben. Entgegen der ursprünglichen Hoffnung Einsteins sind diese Lösungen allerdings nicht statisch, sondern beschreiben ein sich zeitlich entwickelndes Universum. Die aus diesem Grunde nachträglich zu den Feldgleichungen zugefügte sogenannte *kosmologische Konstante* ermöglichte zwar die Existenz eines zeitlich konstanten Universums – allerdings nur um den Preis, daß eine solche Lösung instabil gegenüber kleinen Störungen ist.

Die Beobachtungen legten jedoch bald eindeutig nahe, daß unser Universum tatsächlich nicht statisch ist, sondern sich den Friedmannschen Lösungen entsprechend aus einer Anfangssingularität entwickelt hat, für die der Begriff *Urknall* geprägt wurde. Sie entspricht einem Zustand unendlich hoher Dichte und Temperatur des frühen Universums. Offensichtlich ist spätestens hier die Grenze der klassischen Theorie erreicht und Effekte einer noch zu findenden Theorie der Quantengravitation müßten berücksichtigt werden.

Das kosmologische Standardmodell eines heißen Urknalls, das neben der Allgemeinen Relativitätstheorie auch noch Ergebnisse aus der Teilchenphysik und Quantenfeldtheorie berücksichtigt, erfreute sich dennoch lange Zeit großer Beliebtheit, da es für die Beschreibung der Entwicklung des Universums ab etwa 10^{-33} s nach dem Urknall sehr gut mit den zur Verfügung stehenden Beobachtungsdaten übereinstimmt. Dies sind im wesentlichen die Rotverschiebung entfernter Galaxien¹, die Existenz und (Nahezu-) Isotro-

¹Es war u. a. diese Entdeckung Hubbles, die Einstein dazu bewog, die Hoffnung auf ein zeitlich konstantes Universum aufzugeben und die nachträgliche Einfügung der kosmologischen Konstante angeblich als “größte Eselei seines Lebens” zu bezeichnen.

pie der 3-Kelvin-Hintergrundstrahlung sowie die relative Häufigkeit leichter Elemente im Universum als Ergebnis primordialer Nukleosynthese.

Trotz der unbestrittenen Erfolge dieses Modells bleiben jedoch einige Fragen offen, die nur mit einem Verweis auf sehr spezielle, nicht weiter motivierbare Anfangsbedingungen beantwortbar sind. Derartige *Feinabstimmungsprobleme* sind z.B. unter dem Namen Horizont- bzw. Flachheitsproblem bekannt und werden in Abschnitt 1.1.3 näher beschrieben.

Um dieser unbefriedigenden Situation zu begegnen, wurden Anfang der 80er Jahre Modelle eines *inflationären Universums* vorgeschlagen, denen zufolge das frühe Universum eine Phase beschleunigten Wachstums durchlaufen hat, bevor es sich dem Modell eines heißen Urknalls entsprechend weiterentwickelte. Diese ersten konkreten Ansätze und Modelle wurden jedoch bald zu einem allgemeinen Konzept abstrahiert. Es löst nicht nur die erwähnten Anfangswertprobleme, sondern liefert zudem noch einen Entstehungsmechanismus für Dichtefluktuationen im frühen Universum und damit verbunden eine Grundlage für die Erklärung der beobachteten großräumigen Strukturen im heutigen Universum.

In diesem Kapitel soll im ersten Teil zunächst ein Überblick über das kosmologische Standardmodell des heißen Urknalls gegeben werden. Dazu werden die Friedmann-Lemaître-Modelle eingeführt und motiviert, die die zeitliche Entwicklung des Universums beschreiben. Danach wird kurz auf die thermische Geschichte des Universums und die Probleme des Standardmodells eingegangen. Im zweiten Teil wird dann das allgemeine Konzept der Inflation als Antwort auf diese Probleme beschrieben und ein kurzer Überblick über verschiedene Inflationsmodelle gegeben. Der letzte Teil schließlich beschäftigt sich mit der Entstehung kosmologischer Störungen aus Quantenfluktuationen im Rahmen einer inflationären Kosmologie, sowie mit der weiteren zeitlichen Entwicklung dieser Störungen.

Darstellungen der Standardkosmologie finden sich in Lehrbüchern zur Kosmologie, z.B. [61, 39, 62], oder auch – speziell für eine ausführliche Diskussion der Friedmann-Modelle – in Standardwerken zur Allgemeinen Relativitätstheorie [53, 68, 72]. Einen guten Überblick über inflationäre Kosmologie geben [73, 4], oder auch die schon genannten [61, 39, 62]. [7, 6] und vor allem [46] gehen ausführlich auf die Bedeutung der Inflation für die Entstehung von Dichtestörungen und damit schließlich auch für die Bildung von Strukturen im Universum ein.

1.1 Das kosmologische Standardmodell

1.1.1 Friedmann-Lemaître-Modelle

Die Standardkosmologie basiert auf drei wesentlichen Grundvoraussetzungen: dem kosmologischen Prinzip, der Allgemeinen Relativitätstheorie und einer Beschreibung der Materie als ideale Flüssigkeit.

Das *kosmologische Prinzip* fordert, daß das Universum (auf großen Skalen) homogen und isotrop ist. Aus dieser Forderung ergibt sich zwangsläufig, daß der räumliche Teil der Raumzeit² einen Raum konstanter Krümmung darstellt [53]. Eine solche Raumzeit wird durch die *Robertson-Walker-Metrik* beschrieben:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right]. \quad (1.1)$$

Dabei ist $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$ und k eine Konstante, die beschreibt, ob es sich um ein flaches ($k = 0$), ein positiv ($k = +1$) oder ein negativ ($k = -1$) gekrümmtes Universum handelt. $a(t) > 0$ ist der sog. *Skalenfaktor*. Physikalische (meßbare) Abstände lassen sich damit schreiben als $r = x \cdot a$, wobei x der sog. *mitbewegte* oder Koordinatenabstand ist.

Eine *ideale Flüssigkeit* wird durch eine Zustandsgleichung der Form

$$p = f\rho \quad (1.2)$$

beschrieben. Darin sind p der Druck, ρ die Dichte und f im Normalfall eine Konstante zwischen 0 und 1. Der Energie-Impulstensor einer idealen Flüssigkeit lautet in einem lokalen Ruhesystem $T^{\mu\nu} = \text{diag}(\rho, p, p, p)$ und in einem dazu mit der Vierergeschwindigkeit u^ν bewegten System

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^\nu u^\mu - pg^{\mu\nu}. \quad (1.3)$$

Setzt man nun den Energie-Impulstensor (1.3) und die Metrik (1.1) in die *Einsteinschen Feldgleichungen*

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = -8\pi GT^{\mu\nu} - \Lambda g^{\mu\nu} \quad (1.4)$$

²Um festzulegen, was unter "räumlich" überhaupt zu verstehen ist, fordert man in der Kosmologie üblicherweise die Existenz eines globalen zeitartigen Vektorfeldes X^μ , das für die durchschnittliche Materie- und Energieflußdichte steht. Die vierdimensionale Raumzeit läßt sich dann beschreiben als parametrisierte Abfolge von raumartigen (d.h. orthogonal zu X^μ liegenden) dreidimensionalen Hyperflächen Σ_X . Eine solche Aufspaltung in raum- und zeitartige Anteile der Raumzeit bzw. der Metrik bezeichnet man auch als *Foliation*.

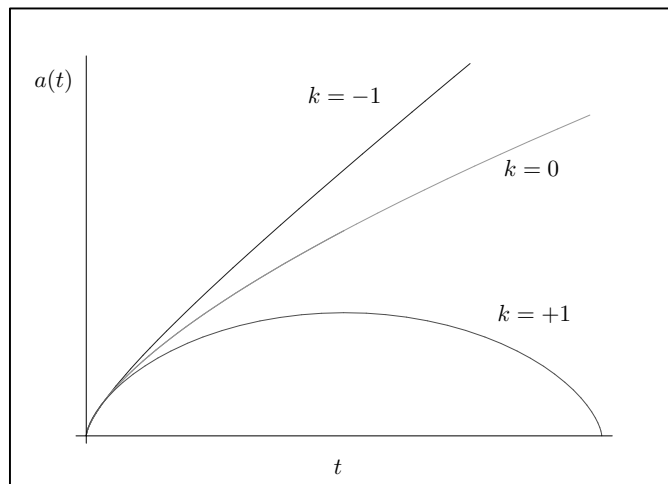


Abb. 1.1: Entwicklung des Skalenfaktors $a(t)$ für $p = 0$, $\Lambda = 0$.

ein, so erhält man die drei *Friedmann-Gleichungen*³:

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p)a + \frac{\Lambda a}{3}, \quad (1.5)$$

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho a^2 + \frac{\Lambda a^2}{3} - k, \quad (1.6)$$

$$(\rho a^3)' + p(a^3)' = 0, \quad (1.7)$$

mit $\dot{} := \frac{d}{dt}$. Von diesen drei Gleichungen sind allerdings nur jeweils zwei unabhängig voneinander und man benötigt daher zur Lösung noch die Zustandsgleichung (1.2).

Aus Gl. (1.7) und (1.2) ergibt sich die folgende wichtige Beziehung zwischen Energiedichte ρ und Skalenfaktor $a(t)$:

$$\rho \propto a^{-3(f+1)}. \quad (1.8)$$

Vernachlässigt man die kosmologische Konstante Λ , so ergibt sich daraus im Falle eines flachen Universums ($k = 0$) durch Einsetzen in Gl. (1.6) unmittelbar

$$a(t) \propto t^{\frac{2}{3(f+1)}}, \quad (1.9)$$

³Zuerst von Friedmann und einige Jahre später unabhängig davon von Lemaitre hergeleitet.

und somit

$$\rho(t) \propto t^{-2}. \quad (1.10)$$

Abb. 1.1 zeigt für den Fall eines materiedominierten Universums ($f = 0$, “Staub”) zum Vergleich auch noch die Entwicklung von $a(t)$ im positiv ($k = +1$) bzw. negativ ($k = -1$) gekrümmten Fall: Während das Universum für $k = 0$ und $k = -1$ für alle Zeiten expandiert, beginnt ein Universum mit $k = +1$ nach Erreichen einer maximalen Ausdehnung wieder zu kollabieren.

Welche Krümmungssituation im Universum vorliegt, läßt sich durch einen Vergleich der Energiedichte ρ mit einer kritischen Dichte ρ_c entnehmen. Durch Umformung von (1.6) erhält man nämlich

$$\rho + \rho_\Lambda - \frac{3}{8\pi G a^2} k = \frac{3H^2}{8\pi G} =: \rho_c, \quad (1.11)$$

wobei $H(t) := \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$ der *Hubble-Parameter* und $\rho_\Lambda := \frac{\Lambda}{8\pi G}$ die Energiedichte des Vakuums ist. Falls $\rho_{ges} := \rho + \rho_\Lambda = \rho_c$ ($\rho_{ges} < \rho_c$, $\rho_{ges} > \rho_c$), so folgt $k = 0$ ($k = -1$, $k = +1$).

Den Dichteanteil einer Energie- oder Materieart x bezieht man oft auf die kritische Dichte, indem man $\Omega_x := \frac{\rho_x}{\rho_c}$ definiert. Beobachtungen ergeben für das heutige Universum $\Omega \approx 1$, also $\rho_{ges,0} \approx \rho_{c,0}$ ⁴: das Universum ist demnach heute nahezu flach und Krümmungseffekte sind vernachlässigbar. Wie in Abschnitt (1.1.3) erläutert werden wird, gilt dies auch für frühere Stadien in der Entwicklung des Universums. Die aktuellsten Beobachtungsergebnisse [2] legen außerdem nahe, daß die Vakuumsenergie einen entscheidenden Beitrag ($\Omega_\Lambda \approx 0.7$) zur heutigen Energiedichte liefert⁵. Vom verbleibenden Materieanteil ($\Omega_m \approx 0.3$) wiederum besteht nur ein ziemlich kleiner Teil aus der bekannten, sog. baryonischen Materie ($\Omega_B \approx 0.05$); der bis jetzt noch unbekannt Rest wird als *dunkle Materie* bezeichnet, da er sich nur durch seine gravitative Wirkung bemerkbar macht und insbesondere auch nicht an Strahlung koppelt.

Zum Abschluß dieses Abschnittes soll noch der Ursprung der Rotverschiebung entfernter Galaxien erklärt werden. Dazu betrachtet man zwei

⁴Ein Index “0” bezeichnet hier und im folgenden immer den heutigen Wert der entsprechenden Größe: $\rho_0 := \rho(t_0)$.

⁵ An der Form (1.11) der Friedmann-Gleichung (1.6) erkennt man aber auch, daß die Vernachlässigung von Λ für frühe Zeiten dennoch gerechtfertigt ist: wegen $\rho \propto a^{-n}$, $n > 0$ (1.8) gilt dann nämlich $\rho \gg \rho_\Lambda = konst.$

Es gibt im übrigen noch eine Reihe weiterer Erklärungen für die Natur des heute beobachteten $\Omega_\Lambda \approx 0.7$ – die “nackte” kosmologische Konstante der Einsteinschen Feldgleichungen ist nur eine dieser Möglichkeiten. Für einen aktuellen Überblick über die kosmologische Konstante und das Problem der *dunklen Energie* siehe [17, 18].

“benachbarte” Galaxien, die sich an den Koordinatenpositionen x_1 bzw. x_2 befinden. Ihr physikalischer Abstand zur Zeit t in der Metrik (1.1) ist dann $d = a(t)(x_1 - x_2)$ und ihre Relativgeschwindigkeit

$$v = \dot{d} = Hd. \quad (1.12)$$

Dies ist die von Hubble empirisch gefundene Beziehung zwischen der Entfernung einer Galaxie und der Geschwindigkeit, mit der sie sich von uns fortbewegt. Bei sehr grossen Entfernungen gilt natürlich nicht mehr $d = a(t)(x_1 - x_2)$ und (1.12) muß durch eine nichtlineare Beziehung zwischen v und d ersetzt werden.

Die Fortbewegung fremder Galaxien äußert sich aufgrund des Dopplereffektes in einer Rotverschiebung z ihres Spektrums. Durch die Betrachtung eines Lichtsignals ($ds = 0$) in der Metrik (1.1) gelangt man zu der Beziehung

$$1 + z := \frac{\omega_s}{\omega_0} = \frac{a_0}{a(t_s)}, \quad (1.13)$$

wobei ω_s die zur Zeit t_s ausgesandte und ω_0 die heute empfangene Frequenz ist. Die Beobachtung dieser Rotverschiebung war die Grundlage für Hubbles Entdeckung der Beziehung (1.12).

1.1.2 Thermische Geschichte des Universums

Das heutige Universum ist materiedominiert, d.h. die durchschnittliche Energiedichte ρ_m der Materie überwiegt bei weitem die der Strahlung $\rho_r \approx 10^{-4}\rho_m$ (die wiederum deutlich von der thermischen 3K - Hintergrundstrahlung dominiert wird). Blickt man auf die Entwicklung von $\rho(t)$, so ergibt sich aus Gl. (1.8) für Materie⁶ ($f = 0$) wie erwartet

$$\rho_m(t) \propto \frac{1}{a(t)^3}, \quad (1.14)$$

für Strahlung ($f = \frac{1}{3}$) hingegen

$$\rho_r(t) \propto \frac{1}{a(t)^4}. \quad (1.15)$$

Den Ursprung des zusätzlichen Faktors $\propto \frac{1}{a}$ für ρ_r kann man aus der Abschwächung von Strahlung durch Rotverschiebung (Gl. (1.13)) verstehen,

⁶Mit “Materie” sind hier nicht-relativistische, mit “Strahlung” relativistische Teilchen gemeint.

die zu der “normalen” Abschwächung $\propto \frac{1}{a^3}$ durch Ausdünnung aufgrund der Expansion hinzukommt.

Da die Energiedichte von Strahlung im expandierenden Universum schneller abgeschwächt wird als die von Materie, müssen zu einem früheren Zeitpunkt t_{eq} Strahlung und Materie im Gleichgewicht gestanden haben: Durch Gleichsetzen von $\rho_r(t_{eq}) = \rho_m(t_{eq})$ ergibt sich aus Gl. (1.14) und (1.15)

$$1 + z_{eq} \stackrel{(1.13)}{=} \frac{a_0}{a(t_{eq})} = \frac{\rho_{m,0}}{\rho_{r,0}} \approx 10^4. \quad (1.16)$$

Für Zeiten $t < t_{eq}$ war das Universum also sogar strahlungsdominiert, d.h. $\rho_r(t) > \rho_m(t)$.

Betrachtet man eine thermische Verteilung im expandierenden Universum, so ergibt sich, daß sie thermisch bleibt, wenn die Expansion adiabatisch ist, d.h. die Gesamtentropie des Universums erhalten bleibt. Dies ist im hier beschriebenen Standardmodell aber mit sehr hoher Genauigkeit erfüllt. Die Temperatur T der Verteilung nimmt dabei allerdings entsprechend der Beziehung

$$T \propto \frac{1}{a} \quad (1.17)$$

ab⁷. Ausgehend von der Temperatur der heute beobachteten Hintergrundstrahlung, $T_0 \approx 2.7K$, kann man damit dem Strahlungsanteil des Universum eine Temperatur $T(t)$ für alle Zeiten t zuordnen. Die Beziehung (1.17) motivierte das Bild eines *heißen Urknalls*.

Die Kenntnis der Temperatur zu einem gegebenen Zeitpunkt ist die Voraussetzung, um die Entwicklung des frühen Universums näher beschreiben zu können. Teilchenphysik und Quantenfeldtheorie stellen dazu Reaktionsraten der bei den entsprechenden Temperaturen existierenden Teilchen zur Verfügung. Im thermodynamischen Gleichgewicht erwartet man, daß diese Reaktionsraten sehr groß sind im Vergleich zur Expansionsrate des Universums $H(t) := \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$. Sinkt die Temperatur und somit auch die Reaktionsrate dagegen unter eine gewisse Schwelle, so sind die bei dieser Reaktion beteiligten Teilchen in ihrer weiteren Entwicklung im wesentlichen entkoppelt. Auf diese Weise läßt sich eine Chronologie der Ereignisse im expandierenden (und sich dabei abkühlenden) Universum finden, die bis zu den

⁷Dies ergibt sich unmittelbar aus (1.15) sowie der für (schwarze) Strahlung gültigen Beziehung $\rho_r \propto T^4$. Berücksichtigt man, daß sich im Universum nicht nur *eine* (relativistische) Teilchensorte befindet, so muß man die obige Beziehung noch durch eine von der Temperatur abhängige Zahl g ergänzen, die die jeweils effektive Anzahl der zu Verfügung stehenden (relativistischen) Teilchen angibt.

t	T	Ereignis
10^{-42} s	10^{15} GeV	Plank-Epoche (Quantengravitation)
$\sim 10^{-35}$ s	~ 0	Inflation (siehe Abschnitt 1.2)
10^{-10} s	100 GeV	Elektroschwacher Phasenübergang
10^{-4} s	100 MeV	Erzeugung von Protonen und Neutronen
10^{-2} s	10 MeV	$\gamma, \nu, e, \bar{e}, n, p$ in thermischem Gleichgewicht
1 s	1 MeV	ν Entkopplung, $e\bar{e}$ Annihilation
100 s	0.1 MeV	Nukleosynthese
10^4 J	1 eV	Materie beginnt zu dominieren
10^5 J	0.1 eV	Bildung von Atomen, γ Entkopplung
10^9 J	10^{-4} eV	Protogalaxien, erste Sterne
10^{10} J	2.728 K	Heute

Tabelle 1.1: Thermische Geschichte des Universums

Energieskalen zurückreicht, die die Grenze des heutigen Standardmodells der Elementarteilchenphysik markiert. Für eine umfassende Darstellung sei hier jedoch aus Platzgründen auf Standardlehrbücher [61, 39, 62] verwiesen; eine Übersicht der Ergebnisse gibt Tab. 1.1.

Besonders betont sei noch die schon in der Einleitung zu diesem Kapitel angesprochene bemerkenswerte Übereinstimmung zwischen der im heutigen Universum beobachteten Elementverteilung und derjenigen, die sich als Folge primordialer Nukleosynthese im Rahmen der oben angedeuteten Synthese von Teilchenphysik und Kosmologie ergibt.

Ein weiteres wichtiges experimentelles Standbein des hier beschriebenen Modells eines heißen Urknalls ist außerdem die schon mehrfach erwähnte kosmische Hintergrundstrahlung, deren Verteilung zu einem hohen Grad isotrop und thermisch ist. Sie wird interpretiert als “Echo des Urknalls” oder – etwas weniger prosaisch ausgedrückt – als die Strahlung, die bei einer Temperatur $T_{dec} \approx 0.26$ eV von der Materie entkoppelte und sich seitdem entsprechend Gl. (1.15) entwickelt hat. Dies geschah kurz nachdem sich Nukleonen und Elektronen zu Atomen (zunächst einmal Wasserstoff) zusammenschlossen und das zuvor opake Universum innerhalb kürzester Zeit transparent, d.h. für Photonen durchlässig wurde.

1.1.3 Probleme des Standardmodells

Obwohl das vorgestellte Modell eines heißen Urknalls hervorragend durch die vorliegenden Beobachtungsdaten gestützt wird, wirft es Fragen auf, die es nicht befriedigend beantworten kann. Dies sind im wesentlichen das Flachheitsproblem, das Horizontproblem und das Monopolproblem.

Das *Flachheitsproblem* thematisiert die Frage, warum das heutige Universum nahezu flach ist. Gl. (1.11) läßt sich nämlich in die Form

$$\frac{|\rho - \rho_c|}{\rho} = \frac{3|k|}{8\pi G} \frac{1}{a^2 \rho} \quad (1.18)$$

bringen, wobei $\rho \approx \rho_{ges}$ gesetzt wurde. $\rho = \rho_c$ ist offensichtlich ein Fixpunkt der zeitlichen Entwicklung. Er ist instabil für $\rho \propto a^{-n}$, $n > 2$. Dies entspricht $f > -\frac{1}{3}$ in Gl. (1.8), ist also sowohl in einem materie- als auch in einem strahlungsdominierten Universum erfüllt: Wenn das Universum nicht exakt flach ist, so wird es sich immer weiter vom flachen Fall weg entwickeln. Geht man von einem heutigen Wert von $\frac{|\rho - \rho_c|}{\rho} \approx 10^{-1}$ aus, so darf die relative Abweichung der tatsächlichen Dichte ρ von der kritischen Dichte ρ_c bei Strahlungs- und Materiegleichgewicht im Universum nur 10^{-3} und zu Zeiten, zu denen sog. Große Vereinheitlichte Theorien berücksichtigt werden müssen (d.h. bei Energieskalen von etwa 10^{14} GeV), sogar nur 10^{-50} betragen haben. Um den heutigen Wert von ρ erhalten zu können, ist also eine unglaublich genaue Feinabstimmung der Anfangsbedingungen nötig, für die es keinerlei befriedigende Erklärung gibt⁸.

Das *Horizontproblem* wirft die Frage auf, warum das Universum auf sehr großen Skalen so homogen und isotrop ist (die Hintergrundstrahlung beispielsweise weist einen Anisotropiegrad von nur etwa 10^{-5} auf). Wie die nachfolgende Diskussion verdeutlichen soll, kann nämlich zwischen weiten Teilen des heutigen Universums nie ein kausaler Kontakt bestanden haben.

Eine fundamentale Längenskala im Friedmann-Universum ist der sogenannte *Hubble-Horizont* $H^{-1}(t) = \frac{a(t)}{\dot{a}(t)}$. Er ist das lokale Pendant zum *Teilchenhorizont*

$$d_H(t) = a(t) \int_0^{r(t)} \frac{dr'}{\sqrt{1 - kr'^2}} = a(t) \int_0^t \frac{dt'}{a(t')}, \quad (1.19)$$

dem maximalen Weg, den ein Teilchen seit dem Urknall in der Metrik (1.1) zurücklegen konnte. Das letzte Gleichheitszeichen resultiert dabei daher, daß

⁸Am Rande bemerkt folgt aus dieser Diskussion übrigens auch, daß der Krümmungsterm in den Friedmann-Gleichungen nicht nur für das heutige, sondern ebenso bzw. erst recht für das frühe Universum vernachlässigbar ist.

radiale ($d\Omega^2 = 0$), lichtartige ($ds^2 = 0$) Teilchen betrachtet werden. Der Teilchenhorizont stellt also den maximalen Abstand zweier Regionen im Universum dar, die jemals im kausalen Kontakt miteinander gestanden haben können. Für $a(t) \propto t^n$, $n < 1$ (1.9) konvergiert der Ausdruck (1.19). Es gilt dann

$$H^{-1}(t) = \frac{t}{n} \quad \text{und} \quad d_H(t) = \frac{t}{1-n}; \quad (1.20)$$

für die typischerweise innerhalb einer Region mit Horizontgröße enthaltene Masse erhält man daraus mit $\rho \approx \rho_c$

$$M_H(t) := \frac{4\pi}{3} \rho_c(t) H^{-3}(t) \stackrel{(1.11)}{=} \frac{1}{2Gn} t. \quad (1.21)$$

Eine beliebige (physikalische) Längenskala $\lambda(t)$ entwickelt sich auf der anderen Seite aber entsprechend

$$\lambda(t) = \lambda a(t) \propto t^n, \quad (1.22)$$

d.h. der Horizont wächst schneller als jede Skala. Zwei beliebige Punkte im Universum mit einem heutigen Abstand $\lambda \cdot a_0$ voneinander waren also mit anderen Worten vor einer Zeit $t_H \approx t_0 \left(\frac{\lambda a_0}{t_0} \right)^{\frac{1}{1-n}}$ weiter entfernt voneinander als der Horizont. Kausaler Austausch vor diesem Zeitpunkt des Horizont-eintrittes t_H war folglich nicht möglich.

Betrachtet man beispielsweise die Hintergrundstrahlung, so findet man, daß der Koordinatenbereich des Horizontes (1.19) zum Zeitpunkt t_{dec} ihrer Entstehung sehr viel kleiner ist als der des heute beobachtbaren Universums, d.h. als der Bereich, in dem man heute diese Hintergrundstrahlung beobachten kann⁹:

$$\lambda_H(0, t_{dec}) := \int_0^{t_{dec}} \frac{dt}{a(t)} \ll \int_{t_{dec}}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} =: \lambda_H(t_{dec}, t_0) \quad (1.23)$$

Die hohe Isotropie der Hintergrundstrahlung kann also nicht auf kausale Mechanismen zurückgeführt werden, sondern unbefriedigenderweise wieder nur auf sehr spezielle Anfangsbedingungen.

Die beobachtete Anisotropie des Universums, etwa in der Hintergrundstrahlung oder auch in der Galaxienverteilung, läßt sich aus den genannten Gründen ebenfalls nicht im Rahmen des Standardmodells verstehen: Es kann keinen kausalen Mechanismus für Strukturbildung geben, wenn diese

⁹Bei dieser Betrachtung setzt man natürlich stillschweigend voraus, daß die Entwicklung von $a(t)$ für beliebig kleine Zeiten als strahlungsdominiert ($a(t) \propto \sqrt{t}$) oder zumindest in der allgemeineren Form $a(t) \propto t^n$ angesetzt werden kann. Dies ist aber wie schon eingangs betont spätestens für Zeiten $t < t_{pl} \approx 10^{-43} s$ äußerst fragwürdig.

auf Skalen stattfindet, die größer als der Horizont sind. Die heute beobachteten großräumigen Strukturen im Universum müssen aber wegen Gl. (1.22) sowie aufgrund ihres geschätzten Alters früher alle außerhalb des Horizontes gewesen sein.

Das *Monopolproblem* schließlich wirft die Frage auf, warum man noch nie einen Monopol beobachtet hat. Laut Teilchenphysik kommt es nämlich in der Frühzeit des Universums zu Phasenübergängen und spontanen Symmetriebrechungen, wenn sich das anfangs sehr heiße Universum abkühlt. An den Grenzen von Gebieten unterschiedlich gebrochener Symmetrie kommt es dabei zur Bildung sog. *topologischer Defekte*. Zu den wichtigsten zählen die Monopole, punktförmige Defekte mit einer charakteristischen Masse. Den gängigen Teilchentheorien zufolge sollten in der Frühzeit des Universums so viele von ihnen produziert worden sein, daß sie heute die Gesamtmasse des Universums dominieren müßten. Dies ist natürlich ein massiver Widerspruch zu der Tatsache, daß man bisher noch keinen einzigen beobachten konnte.

1.2 Das inflationäre Universum

1.2.1 Inflation als Lösung

Die Grundidee inflationärer Kosmologie besteht in der Annahme einer Phase beschleunigter Expansion

$$\ddot{a}(t) > 0 \quad \text{für } t_i < t < t_f \quad (1.24)$$

in der Frühzeit des Universum. Für $t > t_f$ soll sich das Universum dann entsprechend dem in den vorigen Abschnitten vorgestellten Modell eines heißen Urknalls weiterentwickeln, wobei es zunächst strahlungsdominiert ist. Das kosmologische Standardmodell wird also nicht ersetzt, sondern ergänzt. In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, daß ein solcher Ansatz die zuvor beschriebenen Probleme des Standardmodells behebt.

Aus (1.5) ergibt sich unter Vernachlässigung von Λ die folgende alternative Formulierung von Inflation:

$$\ddot{a} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \rho + 3p < 0. \quad (1.25)$$

$p < -\frac{\rho}{3}$ war aber gerade das Kriterium dafür, daß $\rho = \rho_c$ in Gl. (1.18) im Gegensatz zur Standardkosmologie ein *stabiler* Fixpunkt ist – das Universum wird durch die schnelle Expansion also notwendigerweise immer flacher und das Flachheitsproblem ist gelöst.

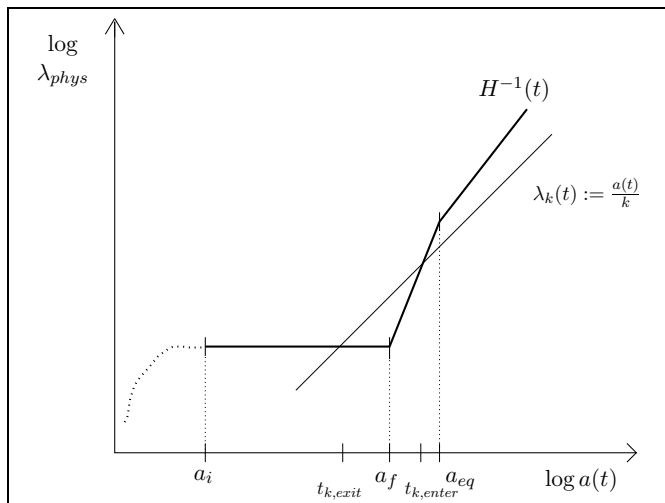


Abb. 1.2: Entwicklung von (physikalischen) Längenskalen $\lambda(t)$ und Hubble-Horizont $H^{-1}(t)$. Während der inflationären Phase bleibt $H^{-1}(t)$ nahezu konstant (siehe Gl. (1.27)) und jede Skala $\lambda_k(t)$ wächst schneller. Ist $\lambda_k = \frac{1}{k}$ groß genug, so erreicht eine solche Skala also vor Ende der Inflation den Wert von H^{-1} und verläßt den Horizont zu einem Zeitpunkt $t_{k,exit}$. Nach Ende der Inflation (a_f) wächst $H^{-1}(t)$ schneller als jede beliebige Skala und die Skala λ_k tritt zu einem Zeitpunkt $t_{k,enter}$ wieder in den Horizont ein. Die Entwicklung des Universums vor Beginn (a_i) der Inflation kann nur durch eine Theorie der Quantengravitation geklärt werden und ist deswegen hier auch nur gepunktet dargestellt.

Es gibt noch eine weitere Weise, Inflation zu formulieren:

$$\ddot{a} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{H^{-1}}{a} < 0 \quad (\text{falls } \dot{a} > 0). \quad (1.26)$$

Der mitbewegte Hubble-Horizont H^{-1}/a , die charakteristische Längenskala des Universums, nimmt also ab. Insbesondere wird er kleiner als jede beliebige (mitbewegte) Längenskala λ , die man oft auch durch die zugehörige Wellenzahl $k := \frac{2\pi}{\lambda}$ bzw. einfach $k := \frac{1}{\lambda}$ charakterisiert. Anders ausgedrückt wächst jede *physikalische* Längenskala $\lambda(t) = \lambda \cdot a(t)$ während der Inflation schneller als der Horizont H^{-1} . Dieser Sachverhalt ist in Abb. 1.2 dargestellt.

Damit wird auch die Lösung des Horizontproblem es deutlich: Eine Skala $\lambda(t)$, die zu einer Zeit $t_{enter}(\lambda)$ in den Horizont eintrat, kann – im Gegensatz zum Standardmodell – zu einer früheren Zeit sehr wohl bereits innerhalb des Horizontes gewesen sein und diesen dann erst während der inflationären Phase zum Zeitpunkt $t_{exit}(\lambda)$ verlassen haben. Für Zeiten $t < t_{exit}$ lassen sich also durchaus kausale Entstehungsmechanismen für Strukturen der Größenordnung λ denken.

Exponentielles Wachstum des Skalenfaktors ist eine (im nächsten Abschnitt näher motivierte) spezielle Form von Inflation:

$$a(t) = a_i e^{H_I(t-t_i)} \quad \text{für } t_i < t < t_f, \quad H_I \approx \text{konst.} \quad (1.27)$$

Die Lösung des Horizontproblems kann man sich damit gut am Beispiel der Hintergrundstrahlung verdeutlichen. Dazu betrachtet man wie zuvor den Koordinatenbereich des Horizontes zur Zeit t_{dec} . Durch den Einfluss der Inflation lautet die linke Seite von (1.23) jetzt

$$\lambda_H(0, t_{dec}) = \int_0^{t_i} \frac{dt}{a_i \left(\frac{t}{t_i}\right)^{\frac{1}{2}}} + \int_{t_i}^{t_f} \frac{dt}{a_i e^{H_I(t-t_i)}} + \int_{t_f}^{t_{dec}} \frac{dt}{A a_i \left(\frac{t}{t_f}\right)^{\frac{1}{2}}}, \quad (1.28)$$

wobei die Entwicklung des Universums außerhalb der inflationären Phase als strahlungsdomiert angenommen wurde (siehe Gl. (1.9)). $A := \frac{a_f}{a_i} = e^{H_I(t_f-t_i)}$ ist die Zunahme des Skalenfaktors während der Inflation. Setzt man für $H_I \approx 10^{10}$ GeV (zur Motivation siehe den folgenden Abschnitt 1.2.2), so erhält man nach einiger (elementarer) Rechnung:

$$\frac{\lambda_H(0, t_{dec})}{\lambda_H(t_{dec}, t_0)} = 10^{-26} A \quad (1.29)$$

Die Diskussion des vorigen Abschnittes hat gezeigt, daß das Horizontproblem für $\lambda_H(0, t_{dec}) \gtrsim \lambda(t_{dec}, t_0)$ gelöst ist. Dies entspricht der Forderung nach $N := \ln A \gtrsim 60$ sog. *e-folds* bzw. einer Inflationsdauer von $t_f - t_i \approx t_f \approx 10^{-32}$ s.

Auch das Monopolproblem läßt sich mit Hilfe der Inflation elegant lösen: Die Inflation muß lediglich nach der Monopolproduktion einsetzen (bzw. lange genug danach andauern) – und die Monopole werden so weit hinter den Horizont geschafft, daß auch heute noch keine oder nur sehr wenige von ihnen beobachtbar sind. Da jeder Abstand während der Inflation um einen Faktor $A = e^N$ vergrößert wird, wird die Anzahldichte der Monopole dabei genauer gesagt um einen Faktor von etwa $A^3 \approx 10^{80}$ verringert.

Auf der anderen Seite muß die inflationäre Phase natürlich *vor* Beginn der Baryogenese beendet sein – sonst gäbe es heute ebensowenig Baryonen wie Monopole. Außerdem stimmen die vom Standardmodell erwarteten Verteilungen leichter Elemente wie schon mehrfach betont ausgezeichnet mit den Beobachtungen überein.

1.2.2 Mechanismus und allgemeines Konzept

In diesem Abschnitt soll nun der Ursprung einer inflationären Aufblähung des Universums erklärt und ein allgemeiner Entstehungsmechanismus für Entwicklungen der Form (1.24) aus feldtheoretischen Modellen heraus motiviert werden.

Dazu ist zunächst zu bemerken, daß die Zustandsgleichung (1.25) normalerweise nicht von “üblicher” Materie im Sinne von Gl. (1.2) erfüllt werden kann. Interessanterweise hat aber der kosmologische Term $\Lambda g_{\mu\nu}$ in den Einsteinschen Feldgleichungen (1.4) die Form eines Energie-Impulstensors einer idealen Flüssigkeit mit der Zustandsgleichung

$$\rho = \frac{\Lambda}{8\pi G} = -p. \quad (1.30)$$

Daher interpretiert man die kosmologische Konstante Λ auch als die Energiedichte des Vakuums. Eine Zustandsgleichung der Form (1.30) bewirkt zwangsläufig $\rho = \text{konst.}$, wie man sich leicht durch Einsetzen in Gl. (1.7) überzeugen kann. Eine konstante Energiedichte führt jedoch wegen der Friedmann-Gleichung (1.6) gerade zu einer Expansion der Form

$$a(t) \propto e^{H_I t} \quad H_I = \sqrt{\frac{8\pi}{3} G \rho} = \text{konst.}, \quad (1.31)$$

zunächst für alle Zeiten t . Diese Lösung der Einstein-Gleichungen wird auch als *de Sitter-Raum* bezeichnet.

Wie aus der Diskussion des vorigen Abschnittes deutlich wurde, ist man jedoch an einem Mechanismus interessiert, der *kurzfristig* eine solche Inflation produziert. Wegen $\Lambda = \text{konst.}$ kann diese Aufgabe nicht von der kosmologischen Konstante selbst erfüllt werden.

Vielversprechende Kandidaten sind aber *skalare Felder* Φ , wie sie in allen vereinheitlichten Theorien vorkommen. Ihre Lagrangedichte ist (bei minimaler Kopplung) gegeben durch

$$\mathcal{L} = \left(\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi - V(\Phi)\right) \cdot \sqrt{-g}, \quad (1.32)$$

wobei $g := \det g_{\mu\nu}$. Aus dem zugehörigen Energie-Impuls-Tensor

$$T^{\mu\nu} = \partial^\mu \partial^\nu \Phi - g^{\mu\nu} \mathcal{L} / \sqrt{-g} \quad (1.33)$$

lassen sich dann für die Robertson-Walker-Metrik (1.1) Dichte

$$\rho_\Phi = T^{00} = \frac{1}{2} \dot{\Phi}^2 + V(\Phi) + \frac{(\vec{\nabla}\Phi)^2}{2a^2} \quad (1.34)$$

und Druck

$$p_\Phi = \frac{1}{3} T^i_i = \frac{1}{2} \dot{\Phi}^2 - V(\Phi) - \frac{(\vec{\nabla}\Phi)^2}{6a^2} \quad (1.35)$$

berechnen. Vernachlässigt man die Gradiententerme (das Universum soll in erster Näherung homogen sein) und fordert zusätzlich

$$\frac{1}{2} \dot{\Phi}^2 \ll V(\Phi), \quad (1.36)$$

so gilt $\rho_\Phi \approx V(\Phi) \approx -p_\Phi$. Dies ist genau die Zustandsgleichung, die zu einem inflationären Wachstum der Form (1.31) führt. Bedingung (1.36) garantiert, daß sich das Feld Φ nur langsam ändert (die kinetische Energie wird gegenüber der potentiellen vernachlässigt) und so die für eine Inflation nötige Zustandsgleichung einige Zeit erfüllt bleiben kann. Die genaue Form von $V(\Phi)$ hängt natürlich von der konkret verwendeten Theorie ab. Zu Beginn der Inflation sollte $V(\Phi)$ jedoch immer etwa von der Größenordnung 10^{14} GeV sein, also in Übereinstimmung mit den Überlegungen des vorigen Abschnittes im Energiebereich großer vereinheitlichter Theorien (sog. *GUTs*).

Die zeitliche Entwicklung von Φ ist durch die Bewegungsgleichung gegeben, die nach dem Wirkungsprinzip aus der Lagrangedichte folgt. In diesem Fall ist das die *Klein-Gordon-Gleichung*

$$\square_g \Phi + V'(\Phi) = \ddot{\Phi} + 3H\dot{\Phi} + V'(\Phi) = 0, \quad (1.37)$$

mit $\square_g = \nabla^\mu \nabla_\mu = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu)$. Gradiententerme wurden wieder vernachlässigt.

Eine Standard-Methode zur Analyse dieser Gleichung besteht in der *slow-roll*-Näherung. Dazu fordert man

$$\ddot{\Phi} \ll V'(\Phi), \quad (1.38)$$

was nur eine andere Formulierung der Bedingung (1.36) ist. Nutzt man $H = \sqrt{\frac{8\pi}{3} G\rho} \approx \sqrt{\frac{8\pi}{3} G V(\Phi)}$, so erhält man unter Verwendung von Gl. (1.37) als

notwendige Bedingung für die slow-roll-Näherung

$$\epsilon(\Phi) := \frac{1}{48\pi G} \left(\frac{V'}{V} \right)^2 \ll 1, \quad (1.39)$$

und, durch Differentiation von Gl. (1.37) nach t , nach einiger Rechnung außerdem

$$\eta(\Phi) := \frac{1}{24\pi G} \frac{V''}{V} \ll 1. \quad (1.40)$$

ϵ und η werden als *slow-roll-Parameter* bezeichnet.

Betrachtet man die weitere zeitliche Entwicklung von Φ , während es das Potential herunter“rollt”, so wird $V(\Phi)$ irgendwann ein Minimum erreichen, falls es ein solches besitzt. Bei verschwindend kleinem $V(\Phi)$ ist die potentielle Anfangsenergie dann fast vollständig in kinetische umgewandelt und Bedingung (1.36) ist sicher nicht mehr erfüllt. Berücksichtigt man die Kopplung von Φ an andere Materiefelder, so ergibt sich in der Bewegungsgleichung (1.37) aber noch ein zusätzlicher, phänomenologischer Term proportional zu $\dot{\Phi}$:

$$\ddot{\Phi} + 3H\dot{\Phi} + \Gamma\dot{\Phi} + V'(\Phi) = 0. \quad (1.41)$$

Γ ist dabei die Zerfallsrate von Φ in andere Teilchen; die genaue Form folgt je nach verwendetem Modell aus der Teilchenphysik. Gl. (1.41) beschreibt einen gedämpften harmonischen Oszillator: Das Feld beginnt um das Minimum zu oszillieren, wobei die Expansion des Universums und die Teilchenproduktionsrate Γ diese Oszillation dämpfen. Für $\Gamma^{-1} \ll H^{-1}$, wie es in den meisten Modellen erfüllt ist, wird praktisch die gesamte Feldenergie $\frac{1}{2}\dot{\Phi}^2 + V(\Phi)$ in relativistische Teilchen umgewandelt und das Universum wieder auf die Temperatur vor Beginn der Inflation ($T_i \approx T_{RH} \approx 10^{14}$ GeV) aufgeheizt. Die Inflation wandelt also schließlich das skalare Feld Φ in normale Materie um und das Universum wird in seiner weiteren Entwicklung durch die in Kap. 1.1 vorgestellte Standardkosmologie beschrieben.

1.2.3 Verschiedene Inflationsmodelle

Die sogenannte *alte Inflation* ist das ursprünglich von A. H. Guth vorgeschlagene Modell [24]. Das skalare Feld Φ durchläuft hierbei einen Phasenübergang erster Ordnung, sobald sich das Universum unter eine kritische Temperatur T_C abkühlt. Unterhalb von T_C ist der Vakuumzustand $\Phi = 0$ nicht länger das globale Minimum von $V(\Phi)$. Das Feld kann jedoch aus diesem metastabilen Zustand, dem sog. *falschen Vakuum*, in den Zustand $\Phi = a$ tunneln, der dann das globale Minimum von $V(\Phi)$ ist. Die Inflation dauert so lange an, bis das falsche Vakuum vollständig zerfallen ist. Die entscheidende Schwäche dieses Modells, das sog. *graceful exit*-Problem, wurde jedoch schon in der Originalarbeit von Guth beschrieben: Gebiete mit $\Phi = a$, die sich aufgrund des Tunneleffektes innerhalb des falschen Vakuums ($\Phi = 0$) bilden und mit der dann einsetzenden Inflation aufblähen, würden heute deutlich kleiner sein als der Horizont. Ein solches Modell sagt also entgegen der Beobachtung große Inhomogenitäten innerhalb des Hubble-Radius voraus.¹⁰

Schon bald nach dem Vorschlag Guths wurde u. a. von A. Linde [47] das Modell der sog. *neuen Inflation* vorgeschlagen. Das Potential ist hier typischerweise von der Form $V(\Phi) = \frac{1}{2}\lambda\sigma^4 + \lambda\Phi^4 \left[\ln \frac{\Phi^2}{\sigma^2} - \frac{1}{2} \right]$ (*Coleman-Weinberg-Potential*) und das Feld Φ ist zunächst wieder aufgrund endlicher Temperatureffekte in einem falschen Vakuum gefangen. Unterhalb einer kritischen Temperatur T_C entwickelt es sich dann langsam zum "richtigen" Vakuumzustand, also dem globalen Minimum von $V(\Phi)$, hin und treibt so die Inflation an. In diesem Modell handelt es sich jedoch um einen Phasenübergang zweiter Ordnung und das Feld kann das Potentialminimum ohne Tunneln erreichen. Die neue Inflation leidet nicht mehr unter dem Problem des ursprünglichen Modells, dafür aber unter einem nicht minder unbefriedigenden Feinabstimmungsproblem: Die von diesem Modell vorhergesagten Dichtefluktuationen (siehe Abschnitt 1.3) stimmen nur dann mit den Beobachtungen überein, wenn die Kopplungskonstante den nicht näher motivierbaren, äußerst kleinen Wert von $\lambda < 10^{-12}$ annimmt.

Ein weiteres Konzept, die *chaotische Inflation* [48], kommt ganz ohne Phasenübergänge aus. Hier ist das Feld zu Beginn durch einen beliebigen Mechanismus, z.B. thermische oder Quanten-Fluktuationen, aus dem richtigen Vakuum verschoben und entwickelt sich nun langsam wieder dorthin

¹⁰Solche Inhomogenitäten könnten umgangen werden, wenn genügend derartiger "Blasen" miteinander zu einem großen homogenen Gebiet verschmelzen könnten. Da die Abstände zwischen den Blasen inflationsbedingt exponentiell wachsen, ist dies jedoch nicht möglich.

zurück. Man kann sich auch vorstellen, daß das Feld ursprünglich in verschiedenen Regionen des Universums unterschiedliche Werte angenommen hat – diejenigen Regionen, in denen es weit genug vom (richtigen) Vakuum entfernt ist, werden dann durch die einsetzende Inflation aufgebläht und dabei zunehmend homogen. Im Gegensatz zu den beiden ersten Ansätzen ist dieses Modell nicht mehr an irgendwelche konkrete Theorien für das skalare Feld Φ gebunden. Man spricht nun ganz allgemein von Φ als dem *Inflaton*-Feld und jedes Potential, das den slow roll-Bedingungen (1.36) und (1.38) bzw. (1.39) und (1.40) genügt, kann eine inflationäre Phase des Universums erzeugen. Auf diese Weise lassen sich auch die extremen Feinabstimmungsprobleme umgehen, die sich mit der neuen Inflation ergaben.

Heute gibt es eine Vielzahl von Inflations-Szenarien – selbst solche, die die slow-roll-Bedingungen nicht erfüllen, mehrere skalare Felder betrachten, den kinetischen Term $\partial^\mu \partial_\mu \Phi$ in der Lagrangedichte abändern oder auch R^2 -Beiträge in der Wirkung zulassen. Das Konzept einer beschleunigten Expansion des frühen Universums mit den beschriebenen Konsequenzen ist ihnen jedoch allen gemeinsam.

1.3 Dichtefluktuationen im frühen Universum

1.3.1 Kosmologische Störungen und ihre Entwicklung

Bis hierhin ging die Darstellung von einem homogenen Universum aus. Zu einem vollständigen kosmologischen Modell gehört aber natürlich ebenso die Beschreibung von Abweichungen von diesem homogenen Hintergrund, um den beobachteten Strukturen im Universum Rechnung tragen zu können. In diesem Abschnitt sollen einige allgemeine Eigenschaften gaußscher Störungen zusammengestellt sowie die Entwicklung von Dichtefluktuationen in einem expandierenden Friedmann-Universum vorgestellt werden.

Bei der zu betrachtenden Störung handele es sich zunächst um eine beliebige (reelle, skalare) physikalische Größe $g(\mathbf{x})$, deren Fouriertransformierte $g_{\mathbf{k}}$ im diskreten Fall durch

$$g(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad (1.42)$$

gegeben ist. Die Diskretisierung der \mathbf{k} -Werte erfolgt dadurch, daß man als Randbedingung fordert, daß $g(\mathbf{x})$ an den Rändern eines Kastens mit Kantenlänge L verschwindet. \mathbf{x} und \mathbf{k} sollen in dieser Beschreibung als mitbewegte Größen verstanden werden, die entsprechenden physikalischen Orte und Längenskalen sind durch $\mathbf{r} = a\mathbf{x}$ bzw. $\lambda_{phys.} = a \frac{2\pi}{k}$ gegeben.

Zerlegt man $g_{\mathbf{k}} = R_{\mathbf{k}} + iI_{\mathbf{k}}$ in Real- und Imaginärteil, so soll die Wahrscheinlichkeit, $R_{\mathbf{k}}$ im Intervall $[R_{\mathbf{k}}, R_{\mathbf{k}} + dR_{\mathbf{k}}]$ zu finden, durch $P(R_{\mathbf{k}}) dR_{\mathbf{k}}$ gegeben sein. Dabei sei

$$P(R_{\mathbf{k}}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_k} e^{-\frac{1}{2} \frac{R_{\mathbf{k}}^2}{\sigma_k^2}}. \quad (1.43)$$

Das gleiche soll für den Imaginärteil gelten. Es handelt sich also um eine statistische Verteilung, bei der alle Moden unkorreliert sind und zudem eine zufällige Phasenverteilung haben¹¹. Mit dem obigen Ausdruck für die Wahrscheinlichkeitsdichte sieht man leicht, daß

$$\sigma_k^2 = \langle R_{\mathbf{k}}^2 \rangle = \langle I_{\mathbf{k}}^2 \rangle = \frac{1}{2} \langle |g_{\mathbf{k}}|^2 \rangle. \quad (1.44)$$

Wegen der geforderten Isotropie des Universums soll die Varianz σ_k^2 wie angedeutet nur vom Betrag $k = |\mathbf{k}|$ abhängen. Im allgemeinen Fall wird der Ensemble-Mittelwert gebildet durch

$$\langle \dots \rangle = \prod_{\mathbf{k}} \int \int dR_{\mathbf{k}} dI_{\mathbf{k}} P(R_{\mathbf{k}}) P(I_{\mathbf{k}}) \dots \quad (1.45)$$

Damit läßt sich zeigen¹², daß

$$\langle g^2(\mathbf{x}) \rangle = \sum_{\mathbf{k}} \langle |g_{\mathbf{k}}|^2 \rangle = 2 \sum_{\mathbf{k}} \sigma_k^2. \quad (1.46)$$

Definiert man das *Spektrum* $\mathcal{P}_g(k)$ von g als

$$\mathcal{P}_g(k) := \left(\frac{L}{2\pi} \right)^3 4\pi k^3 \langle |g_{\mathbf{k}}|^2 \rangle, \quad (1.47)$$

so erhält man daraus im kontinuierlichen Fall¹³ den einfachen Ausdruck

$$\sigma_g^2 := \langle g^2(\mathbf{x}) \rangle = \frac{L^3}{(2\pi)^3} \int_0^\infty 4\pi k^2 dk \langle |g_{\mathbf{k}}|^2 \rangle = \int_0^\infty \mathcal{P}_g(k) \frac{dk}{k}. \quad (1.48)$$

Wegen des zentralen Grenzwertsatzes ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung von $g(\mathbf{x})$ an einem bestimmten Ort wieder gaußsch (und zwar mit der Varianz σ_g^2).

¹¹Weil $g(\mathbf{x})$ reell ist, gilt aber natürlich $g(\mathbf{k}) = g^*(-\mathbf{k})$.

¹²Dazu zeigt man zunächst, daß $\langle g^2(\mathbf{x}) \rangle = \langle g^2(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \rangle \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y}$ und berechnet dann $\langle g^2(\mathbf{0}) \rangle$ unter Berücksichtigung von Gl. (1.42) und $\langle g^*(\mathbf{k})g(\mathbf{k}') \rangle = \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \langle |g_{\mathbf{k}}|^2 \rangle$.

¹³Der Limes $L \rightarrow \infty$ entspricht der formalen Ersetzung $(\frac{2\pi}{L})^3 \sum_{\mathbf{k}} \rightarrow \int d^3k$.

Für den Übergang zum kontinuierlichen Fall muß natürlich auch (1.42) durch ein Fourierintegral

$$g(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k g(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad (1.49)$$

ersetzt werden. Mit dem kontinuierlichen Ausdruck für das Spektrum

$$\langle g^*(\mathbf{k})g(\mathbf{k}') \rangle =: \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \frac{2\pi^2}{k^3} \mathcal{P}_g(k), \quad (1.50)$$

wobei δ^3 hier die dreidimensionale Diracsche Deltafunktion bezeichnet, erhält man dann gerade wieder den Zusammenhang (1.48) zwischen $\langle g^2(\mathbf{x}) \rangle$ und Spektrum $\mathcal{P}_g(k)$.

Die Mittelwerte $\langle \dots \rangle$ sind wie schon erwähnt eigentlich als Ensemble-Mittelwerte zu verstehen. Im kosmologischen Rahmen ist diese Interpretation aber natürlich nicht anwendbar, da nur *ein* Universum zur Beobachtung zur Verfügung steht. Da die Wahrscheinlichkeitsverteilungen für verschiedene Orte (so gut wie) unkorreliert sein sollen, kann man die Ensemble-Mittelwerte aber für genügend große L auch durch räumliche Mittelwerte ($L^{-3} \int d^3x \dots$) ersetzen. Dies wird als *Ergodenhypothese* bezeichnet. Gl. (1.46) wird damit zur bekannten Parsevalschen Gleichung.

Der Ausdruck (1.48) divergiert, falls $\mathcal{P}_g(k)$ für sehr kleine bzw. große Werte von k nicht schnell genug abfällt. Letzteres bekommt man durch eine *Glättung* von $g(\mathbf{x})$ in den Griff. Dadurch werden alle Strukturen kleiner als eine gewisse Skala R entfernt, ohne jedoch größere Skalen zu beeinflussen. Faktisch geschieht dies z.B. immer durch die endliche Auflösung von Meßgeräten. Die geglättete Größe $g(R, \mathbf{x})$ erhält man durch die folgende Ersetzung:

$$g(\mathbf{x}) \longrightarrow g(R, \mathbf{x}) := V^{-1} \int W\left(\frac{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|}{R}\right) g(\mathbf{x}') d^3x', \quad (1.51)$$

mit $V := \int W(x/R) d^3x = 4\pi R^3 \int_0^\infty y^2 W(y) dy$. $W(y)$ ist eine sog. *Fensterfunktion*, die für $y \gtrsim 1$ schnell gegen Null gehen soll. Als einfachste Beispiele kommen die sog. *top-hat*-Funktion

$$W_{TH}(y) = \begin{cases} 1 & \text{für } y \leq 1 \\ 0 & \text{für } y > 1 \end{cases} \quad (1.52)$$

oder eine Gaußverteilung in Frage.

Mit Hilfe des Konvolutionstheorems erhält man die Fouriertransformierte von $g(R, \mathbf{x})$,

$$g(R, \mathbf{k}) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int g(R, \mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3x = W(kR)g(\mathbf{k}), \quad (1.53)$$

mit

$$W(kR) := V^{-1} \int d^3x W\left(\frac{x}{R}\right) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \quad (1.54)$$

und schließlich entsprechend Gl. (1.48) den Ausdruck

$$\sigma_g^2(R) := \langle g^2(R, \mathbf{x}) \rangle = \int_0^\infty W^2(kR) \mathcal{P}_g(k) \frac{dk}{k}. \quad (1.55)$$

Üblicherweise steigt $\mathcal{P}_g(k)$ sehr stark mit k an und $W^2(kR)\mathcal{P}_g(k)$ hat bei $kR \sim \frac{1}{R}$ ein Maximum. Dann erhält man

$$\sigma_g^2(R) \sim \mathcal{P}_g(kR). \quad (1.56)$$

$\sigma_g^2(R)$ ist das physikalisch zugängliche Maß für Fluktuationen auf der Skala R . Bei Dichtefluktuationen $\delta := \frac{\Delta\rho}{\bar{\rho}}$, mit $\bar{\rho} := \langle \rho \rangle$, beispielsweise gibt es die Varianz der Verteilung $\frac{\delta m}{\bar{m}}$ an, wobei $\bar{m} = \bar{\rho}V a^3$ die durchschnittlich in einem Gebiet mit (mitbewegtem) Volumen V eingeschlossene Masse und $\delta m = \bar{\rho}V a^3 \delta(R, \mathbf{x})$ die Abweichung davon im gerade betrachteten Gebiet darstellt.

Für die hier interessierenden Dichtefluktuationen δ wird meistens ein Potenzgesetz für das Spektrum angenommen¹⁴:

$$\mathcal{P}_\delta(k) \propto k^{3+n}. \quad (1.57)$$

Für $n = 1$ erhält man das sog. *Harrison-Zel'dovich* oder *skaleninvariante Spektrum*, das man zur Erklärung der Bildung von Galaxien aus solchen Dichteschwankungen benötigt [26]. Physikalisch ist es dadurch ausgezeichnet, daß es zum Zeitpunkt des Horizonteintrittes $t_H(k)$ einer Skala k unabhängig von k ist. Dies soll hier für den strahlungsdominierten Fall ($t < t_{eq}$) kurz gezeigt werden, im materiedominierten Fall folgt die Behauptung ganz analog. Zum Zeitpunkt des Horizonteintrittes gilt nämlich

$$a(t_H) \frac{2\pi}{k} = H^{-1}(t_H). \quad (1.58)$$

¹⁴Da sich Dichtefluktuationen unter dem Einfluß der Gravitation zeitlich entwickeln, ist natürlich auch das Spektrum eine zeitabhängige Größe – auch wenn diese Zeitabhängigkeit nicht immer explizit mit angegeben wird.

Wegen $H^{-1}(t) \propto t$ und $a(t) \propto t^{1/2}$ (1.9) folgt damit

$$t_H(k) \propto k^{-2} \quad \text{bzw.} \quad a(t_H) \propto k^{-1}. \quad (1.59)$$

Mit $\delta_{\mathbf{k}}(t) \propto a^2(t)$ (siehe Gl. (1.68) weiter unten) erhält man dann

$$\mathcal{P}_\delta(k) \Big|_{t_H(k)} \stackrel{(1.47)}{\propto} k^3 \langle |\delta_{\mathbf{k}}|^2 \rangle(t_H) = k^3 \underbrace{\langle |\delta_{\mathbf{k}}|^2 \rangle(t)}_{\propto k^n} \cdot \underbrace{\left(\frac{a(t_H)}{a(t)} \right)^4}_{\propto k^{-4}} \propto k^{n-1}. \quad (1.60)$$

Für $n = 1$ ist das Spektrum also wie behauptet unabhängig von der betrachteten Skala k . Es sei hier noch einmal ausdrücklich darauf hingewiesen, daß t_H eine Funktion von k ist. Während Gl. (1.57) das Spektrum zu einer festen (skalenunabhängigen) Zeit t darstellt, beschreibt Gl. (1.60) eine Skalenabhängigkeit, die sich für jedes k auf eine *andere* Zeit $t_H(k)$ bezieht.

Nun soll die zeitliche Entwicklung von kleinen Dichtefluktuationen $\delta(\mathbf{x}, t)$ in einem ansonsten homogenen, expandierenden Universum betrachtet werden. Dazu beschränkt man sich zunächst auf eine Newtonsche Analyse. Deren Geltungsbereich bleibt allerdings von vorneherein beschränkt auf vernachlässigbare Drücke $p \ll \rho$ und Skalen λ , die deutlich kleiner sind als der Hubble-Horizont¹⁵. Ausgangspunkt sind hier die *Kontinuitäts-, Euler- und Poisson-Gleichung*

$$\dot{\rho} + \nabla(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (1.61)$$

$$\dot{\mathbf{v}} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla\phi - \frac{1}{\rho} \nabla p, \quad (1.62)$$

$$\Delta\phi = 4\pi G\rho, \quad (1.63)$$

wobei ϕ das Newtonsche Gravitationspotential ist. Die Geschwindigkeit $\mathbf{v} = \frac{d}{dt}(a(t)\mathbf{x}) = \dot{a}(t)\mathbf{x} + a(t)\mathbf{u}$ spaltet sich auf in einen Anteil proportional zur Expansion des Skalenfaktors, $\dot{a}(t)$, und einen Anteil proportional zur Eigengeschwindigkeit $\mathbf{u} := \dot{\mathbf{x}}$. Für $p \ll \rho$ gilt außerdem $\bar{\rho}(t) \propto a(t)^3$ (1.14).

Schreibt man nun alle auftauchenden Größen in der Form $\rho(\mathbf{x}, t) = \bar{\rho}(t)(1 + \delta(\mathbf{x}, t))$ als Kombination aus (homogener) Hintergrundgröße und kleiner Störung, so erhält man nach Linearisierung und Fouriertransformation die folgende Gleichung für $\delta_{\mathbf{k}}(t)$:

$$\ddot{\delta}_{\mathbf{k}} + 2H\dot{\delta}_{\mathbf{k}} + \left(\frac{c_s^2 k^2}{a^2} - 4\pi G\bar{\rho} \right) \delta_{\mathbf{k}} = 0. \quad (1.64)$$

¹⁵Die Newtonsche Theorie berücksichtigt nämlich im Gegensatz zur ART nicht, daß Druck ebenfalls eine Quelle der Gravitation ist. Ein weiteres Indiz für das Verlassen des klassischen Bereiches ist, daß sich zwei Galaxien aufgrund der Expansion des Skalenfaktors automatisch schneller als mit Lichtgeschwindigkeit voneinander fortbewegen, sobald ihr Koordinaten-Abstand größer ist als der mitbewegte Hubble-Radius $\dot{a}(t)^{-1}$.

Dabei ist $c_s^2 := \frac{\partial p}{\partial \rho} = f$ die Schallgeschwindigkeit. Eine ausgezeichnete Längenskala dieser Gleichung ist die *Jeans-Länge*

$$\lambda_J := \frac{2\pi}{k_J} a \quad \text{mit} \quad \left(\frac{k_J}{a}\right)^2 := \frac{4\pi G \bar{\rho}}{c_s^2}. \quad (1.65)$$

Für Dichteschwankungen auf Längenskalen $\lambda_{phys} \lesssim \lambda_J$ nimmt Gl. (1.64) die Form eines gedämpften harmonischen Oszillators an: Die Störungen oszillieren und zerfallen dabei langsam. Man spricht hier von *akustischen Oszillationen*. Für $\lambda_{phys} \gtrsim \lambda_J$ hat die obige Differentialgleichung dagegen eine anwachsende und eine abfallende Lösung. Erstere dominiert nach kurzer Zeit die Entwicklung und ist (für den hier betrachteten Fall $p \ll \rho$) von der Form

$$\delta_{\mathbf{k}}(t) \propto t^{\frac{2}{3}} \propto a(t). \quad (1.66)$$

Die volle relativistische Analyse ist ziemlich aufwendig und soll hier nur skizziert werden (für weitere Details siehe z.B. [61]). Sie besteht darin, die FRW-Hintergrund-Metrik (1.1) mit einer kleinen Störung zu versehen, in die Feldgleichungen (1.4) einzusetzen und diese zu linearisieren. Man erhält dann

$$\delta G_{\mu\nu} = 8\pi G \delta T_{\mu\nu} \quad (1.67)$$

Das Problem ist es nun, zu bestimmen, welche Größen überhaupt eichinvariant, d.h. nicht bloß Effekte der Koordinatenwahl sind. Insbesondere ist $\delta_{\mathbf{k}}$ nur für Skalen $\lambda \lesssim H^{-1}$ näherungsweise eichinvariant, weswegen die Newtonsche Analyse auch zunächst auf solche Skalen beschränkt bleiben muß. Grundsätzlich hat man zwei Möglichkeiten: Man kann die Eichung durch eine physikalische Motivation fixieren oder einen eichinvarianten Formalismus verwenden. Im ersten Fall erhält man für $t > t_{eq}$ das gleiche Ergebnis wie weiter oben für die Newtonsche Analyse, $\delta_{\mathbf{k}}(t) \propto a(t)$, jetzt allerdings auch für Skalen, die sehr viel größer als der Horizont sind. Im strahlungsdominierten Fall ($t < t_{eq}$) erhält man für Skalen außerhalb des Horizontes

$$\delta_{\mathbf{k}}(t) \propto a(t)^2. \quad (1.68)$$

Sobald solche Störungen in den Horizont eintreten, beginnen sie (akustisch) zu oszillieren und man kann sie für die weitere Entwicklung näherungsweise als konstant annehmen.

Im zweiten Fall findet man schließlich für Skalen $\lambda \gg H^{-1}$ das folgende, eichinvariante Ergebnis:

$$\xi := \frac{2}{3} \frac{H^{-1} \dot{\Phi} + \Phi}{1 + f} + \Phi \approx \text{konst.} \quad (1.69)$$

Dabei ist Φ ein eichinvariantes Maß sog. skalarer Metrik-Störungen (die einzigen Störungen, die an ρ und p koppeln). Bei Horizontdurchquerung (siehe Gl. (1.58)) entspricht Φ in etwa dem zuvor eingeführten $\delta_{\mathbf{k}}$:

$$\delta_{\mathbf{k}}(t_H(k)) \sim \Phi(k, t_H(k)). \quad (1.70)$$

Als Ergebnis des eichinvarianten Zugangs erhält man damit näherungsweise (für $f \lesssim \frac{1}{3}$ und $\dot{\Phi} \approx 0$)

$$\frac{\delta_{\mathbf{k}}(t_H(k))}{1+f} \sim \text{konst.}, \quad (1.71)$$

also eine Beziehung zwischen den $\delta_{\mathbf{k}}$ zum Zeitpunkt des Horizontaus- bzw. -eintrittes der entsprechenden Skala k .

1.3.2 Entstehung aus Quantenfluktuationen

Das Szenario einer inflationären Phase des frühen Universums löst nicht nur die Anfangswertprobleme des kosmologischen Standardmodells, sondern liefert auch eine kausale Erklärung für die beobachteten großräumigen Strukturen, etwa in Form der Galaxienverteilung oder der Anisotropien in der kosmischen Hintergrundstrahlung. Man nimmt an, daß sich diese großräumigen Strukturen aus kleinen primordialen Dichtefluktuationen entwickelt haben, deren Entstehungsmechanismus im Rahmen einer inflationären Kosmologie nun in diesem Abschnitt vorgestellt werden soll.

Dazu betrachtet man zunächst ein klassisches skalares Feld $\Phi_{ges}(t, \mathbf{x})$ und zerlegt es in einen (dominanten) homogenen Teil $\Phi_0(t)$ und eine kleine, ortsabhängige Störung $\Phi(t, \mathbf{x})$:

$$\Phi_{ges}(t, \mathbf{x}) = \Phi_0(t) + \Phi(t, \mathbf{x}) \quad (1.72)$$

Der homogene Teil $\Phi_0 = \overline{\Phi_{ges}}$ ist für die eigentliche Inflation verantwortlich und soll den wesentlichen Materieanteil des Universums ausmachen. Mit dem Ausdruck für die Energiedichte eines skalaren Feldes (1.34) erhält man dann unter Vernachlässigung der Gradiententerme als Ausdruck für die Dichtefluktuationen $\delta(t, \mathbf{x}) := \frac{\rho_{\Phi_{ges}} - \rho_{\Phi_0}}{\rho_{\Phi_0}}$

$$\delta(t, \mathbf{x}) \approx \frac{\frac{1}{2}(\dot{\Phi}_0 + \dot{\Phi})^2 + V(\Phi_0 + \Phi) - \frac{1}{2}\dot{\Phi}_0^2 - V(\Phi_0)}{\frac{1}{2}\dot{\Phi}_0^2 + V(\Phi_0)} \approx \frac{\dot{\Phi}_0}{V(\Phi_0)} \dot{\Phi}. \quad (1.73)$$

Im letzten Schritt wurde dabei die slow-roll-Bedingung (1.36) verwendet.

Man kann nun noch das Ergebnis des letzten Abschnittes, Gl. (1.71), nutzen, um die Dichtefluktuationen zum Zeitpunkt des Horizonteintrittes

t_{enter} vollständig durch Größen auszudrücken, die zum Zeitpunkt des Horizontaustrittes t_{exit} ausgewertet werden:

$$\delta_{\mathbf{k}}(t_{enter}) = \delta_{\mathbf{k}}(t_{exit}) \cdot \frac{1 + f_{enter}}{1 + f_{exit}} \quad (1.74)$$

Nimmt man an, daß die Skalen während der strahlungsdominierten Phase in den Horizont eintreten, so gilt $f_{enter} = \frac{1}{3}$. Aus Gl. (1.34) und (1.35) erhält man ferner mit der slow-roll-Bedingung (1.36) $1 + f_{exit} \approx \dot{\Phi}^2/V_0$. Insgesamt gilt dann

$$\delta_{\mathbf{k}}(t_{enter}) \approx \delta_{\mathbf{k}} \frac{4V_0}{3\dot{\Phi}_0^2} \Big|_{t_{exit}} \approx \frac{\dot{\Phi}_{\mathbf{k}}}{\dot{\Phi}_0} \Big|_{t_{exit}}, \quad (1.75)$$

wobei im letzten Schritt Gl. 1.73 verwendet und $\Phi_{\mathbf{k}} := (2\pi)^{-3/2} \int \Phi e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} d^3x$ eingeführt wurde.

Um nun den Ursprung der klassischen Fluktuationen $\delta_{\mathbf{k}}$ zu erklären, betrachtet man Φ_0 weiterhin als klassisches Feld und quantisiert lediglich Φ auf dem durch Φ_0 erzeugten Hintergrund, indem man vom klassischen Ausdruck $\Phi_{\mathbf{k}}$ übergeht zu einem Operator $\hat{\Phi}_{\mathbf{k}}$. Diese Methode der *Quantenfeldtheorie auf gekrümmter Raumzeit* ist ausführlich in [5] dargestellt. In diesem Fall stellt es sich jedoch heraus, daß die einzelnen Moden $\Phi_{\mathbf{k}}$ nicht gekoppelt sind. Es ist also keine Quantenfeldtheorie im eigentlichen Sinne nötig, sondern ausreichend, jede Mode für sich im Sinne der üblichen Quantenmechanik zu quantisieren. Die Varianz der klassischen Fluktuationen $\langle |\Phi_{\mathbf{k}}|^2 \rangle$ wird dann identifiziert mit dem quantenmechanischen Erwartungswert $\langle \hat{\Phi}_{\mathbf{k}} \hat{\Phi}_{\mathbf{k}}^\dagger \rangle$ ¹⁶. In [1] wurde zuerst darauf hingewiesen, daß es sich bei den quantenmechanischen Fluktuationen um (2-Moden-) *gequetschte Zustände*¹⁷ handelt. Der Vorteil einer solchen Beschreibung ist nicht nur, daß die Analyse einfacher wird – sie ermöglicht auch ein Verständnis für den Prozeß, der die quantenmechanischen Fluktuationen in klassische überführt. Dieser Vorgang der *Dehohärenz* kosmologischer Störungen wird ausführlich in [64, 36, 34] beschrieben. Die folgende Darstellung wird sich hauptsächlich an [64] orientieren.

Wenn man keine Selbstkopplung annimmt, genügt es, Φ als masseloses, freies Feld zu betrachten. Auf einem flachen Friedmann-Robertson-Walker-

¹⁶Diese Identifikation ist keineswegs eindeutig und hängt u.a. davon ab, wie man sich den Übergang von Quanten- zu klassischen Fluktuationen vorstellt.

¹⁷Gequetschte Zustände sind Verallgemeinerungen der bekannten *kohärenten Zustände*. Eine Übersicht über wesentliche Eigenschaften findet sich ebenfalls in [1], ausführlichere Darstellungen in vielen Lehrbüchern zur Quantenoptik.

Hintergrund

$$ds^2 = a^2(\eta)(d\eta^2 - \delta_{ij}dx^i dx^j), \quad (1.76)$$

wobei die sogenannte *konforme Zeit* η durch $d\eta := \frac{1}{a}dt$ definiert ist, lautet die Lagrangedichte (1.32) dann

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\mu\Phi\partial_\nu\Phi = \frac{a^2}{2}[(\partial_\eta\Phi)^2 - (\nabla\phi)^2]. \quad (1.77)$$

Es ist hilfreich, statt Φ als kanonische Variable $y := a\Phi$ einzuführen. Für den dazu konjugierten Impuls findet man dann

$$p = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y'} = y' - \frac{a'}{a}y, \quad (1.78)$$

mit $' := \frac{d}{d\eta}$, und für die Hamiltonfunktion

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x (py' - \mathcal{L}(y, y')) \\ &= \frac{1}{2} \int d^3k \left[p_{\mathbf{k}}p_{\mathbf{k}}^* + k^2 y_{\mathbf{k}}y_{\mathbf{k}}^* + \frac{a'}{a} (y_{\mathbf{k}}p_{\mathbf{k}}^* + p_{\mathbf{k}}y_{\mathbf{k}}^*) \right]. \end{aligned} \quad (1.79)$$

Aus den Hamilton-Gleichungen erhält man hieraus als Bewegungsgleichung für die Moden $y_{\mathbf{k}}$

$$y_{\mathbf{k}}'' + \left(k^2 - \frac{a''}{a} \right) y_{\mathbf{k}} = 0. \quad (1.80)$$

Zur Quantisierung ersetzt man nun y und p durch Operatoren mit den üblichen Kommutator-Eigenschaften und führt Vernichtungsoperatoren

$$\hat{a}_{\mathbf{k}} := \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{k}\hat{y}_{\mathbf{k}} + \frac{i}{\sqrt{k}}\hat{p}_{\mathbf{k}}^\dagger \right) \quad (1.81)$$

ein. Solange keine Verwechslungsgefahr mit den klassischen Größen besteht, werden die Operatoren-“Dächer” im folgenden wieder weggelassen. Die Operatoren y und p lassen sich durch a und a^\dagger wie folgt ausdrücken:

$$y_{\mathbf{k}} = y_{-\mathbf{k}}^\dagger = \frac{a_{\mathbf{k}} + a_{-\mathbf{k}}^\dagger}{\sqrt{2k}} \quad \text{bzw.} \quad p_{\mathbf{k}} = p_{-\mathbf{k}}^\dagger = -i\sqrt{\frac{k}{2}} (a_{\mathbf{k}} - a_{-\mathbf{k}}^\dagger). \quad (1.82)$$

Die erste Gleichung gilt dabei jeweils, weil die entsprechenden klassischen Größen reell sind. Aus den Vertauschungsrelationen von y und p erhält man den Kommutator

$$[a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}^\dagger] = \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \quad (1.83)$$

Mit diesen Ersetzungen lautet schließlich der zu (1.79) gehörende Hamiltonoperator

$$H = \frac{1}{2} \int d^3k \left[k \left(a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^\dagger + a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} \right) + i \frac{a'}{a} \left(a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{-\mathbf{k}}^\dagger - a_{\mathbf{k}} a_{-\mathbf{k}} \right) \right]. \quad (1.84)$$

In der Heisenberg-Darstellung sind die hier auftretenden Operatoren zeitabhängig und durch die Heisenbergschen Bewegungsgleichungen (bzw. direkt durch Gl. (1.80)) gegeben. Die allgemeine Lösung ist von der Form

$$\begin{aligned} a_{\mathbf{k}}(\eta) &= u_k(\eta) a_{\mathbf{k}}(\eta_0) + v_k(\eta) a_{-\mathbf{k}}^\dagger(\eta_0), \\ a_{-\mathbf{k}}^\dagger(\eta) &= u_k^*(\eta) a_{-\mathbf{k}}^\dagger(\eta_0) + v_k^*(\eta) a_{\mathbf{k}}(\eta_0), \end{aligned} \quad (1.85)$$

wobei η_0 eine beliebige feste Anfangszeit ist. Bei dieser Darstellung handelt es sich gerade um eine *Bogolubov-Transformation* und entsprechend ist mit einer nicht verschwindenden Produktionsrate von Feldmoden aus einem Vakuum-Anfangszustand $|0\rangle$ zur Zeit η_0 zu rechnen. Aus der Kommutatorrelation (1.83) erhält man die Zwangsbedingung

$$|u_k(\eta)|^2 - |v_k(\eta)|^2 = 1, \quad (1.86)$$

die die folgende Parametrisierung der Funktionen u_k und v_k erlaubt:

$$\begin{aligned} u_k(\eta) &= e^{-i\Theta_k(\eta)} \cosh r_k(\eta) \\ v_k(\eta) &= e^{i(\Theta_k(\eta) + 2\varphi_k(\eta))} \sinh r_k(\eta). \end{aligned} \quad (1.87)$$

Dabei sind r_k der *Quetsch-Parameter*, φ_k der *Quetsch-Winkel* und Θ_k eine Phase.

Wählt man nun als Grundzustand das durch

$$a_{\mathbf{k}}(\eta_0)|0\rangle = 0 \quad (1.88)$$

definierte Vakuum $|0\rangle$, so erhält man

$$\begin{aligned} \langle 0|y_{\mathbf{k}}y_{-\mathbf{k}}|0\rangle &\stackrel{(1.82)}{=} \frac{1}{2k} \langle 0|(a_{\mathbf{k}} + a_{-\mathbf{k}}^\dagger)(a_{-\mathbf{k}} + a_{\mathbf{k}}^\dagger)|0\rangle \\ &= \frac{1}{2k} (\cosh 2r_k + \cos 2\varphi_k \sinh 2r_k) =: |f_k|^2. \end{aligned} \quad (1.89)$$

Im letzten Schritt wurden dabei Gl. (1.85), (1.87) und (1.88) genutzt. Für die klassischen Fluktuationen erhält man damit wegen $y = a\Phi$ schließlich

$$\langle |\Phi_{\mathbf{k}}|^2 \rangle = a^{-2} |f_k|^2. \quad (1.90)$$

An der Form des zugehörigen Wellenfunktionals $\Psi[y_{\mathbf{k}}, y_{-\mathbf{k}}]$ und einer Untersuchung des Dekohärenz-Vorgangs kann man zudem erkennen, daß die meisten inflationären Modelle tatsächlich zu gaußschen Fluktuationen führen [36].

Abschließend soll als einfaches Beispiel der Quasi-deSitter-Raum ($a(t) \propto e^{H_I t}$, $H_I \sim \text{konst.}$) betrachtet werden. Für die Fluktuationen erhält man hier [64]

$$|f_{\mathbf{k}}|^2 = a^2 \left(\frac{H_I^2}{2k^3} + \frac{1}{2ka^2} \right). \quad (1.91)$$

Um die Dichteschwankungen $\delta_{\mathbf{k}}$ zum Zeitpunkt des Horizonteintrittes mit Hilfe von (1.75) zu erhalten, berechnet man zunächst

$$\dot{\Phi}_{\mathbf{k}} \Big|_{t_{exit}} = \frac{d}{dt} \sqrt{\frac{H_I^2}{2k^3} + \frac{1}{2ka^2}} \Big|_{t_{exit}} \simeq \frac{4H_I^2}{k^{\frac{3}{2}}}, \quad (1.92)$$

wobei wieder $\frac{2\pi}{k}a(t_{exit}) = H_I^{-1}(t_{exit})$ verwendet wurde. Betrachtet man nun in diesem Beispiel das Potential $V(\Phi_0) = V_0 - \frac{\lambda}{4}\Phi_0^4$, so gilt mit Gl. (1.37) und (1.38)

$$\dot{\Phi} \approx \frac{\lambda\Phi_0^3}{3H_I}. \quad (1.93)$$

Für das Anwachsen des Skalenfaktors während der Inflation findet man mit diesem Potential den folgenden Ausdruck:

$$N := \ln \frac{a_f}{a_i} = \int_{t_i}^{t_f} H_I dt = \int_{\Phi_i}^{\Phi_f} \frac{H_I}{\dot{\Phi}} d\Phi \approx \frac{3H_I^2}{2\lambda\Phi_{exit}^2}, \quad (1.94)$$

wobei im letzten Schritt $\Phi_{exit} \approx \Phi_i \ll \Phi_f$ genutzt wurde. Für die Dichtestörungen bei Horizonteintritt erhält man dann insgesamt

$$\delta_{\mathbf{k}}(t_{enter}) \approx \frac{\dot{\Phi}_{\mathbf{k}}}{\dot{\Phi}_0} \Big|_{t_{exit}} \approx k^{-\frac{3}{2}} \lambda^{\frac{1}{2}} N^{\frac{3}{2}}, \quad (1.95)$$

also genau das von Harrison und Zel'dovich vorhergesagte skaleninvariante Spektrum $\mathcal{P}_{\delta}(k) \Big|_{t_{enter}} \sim \text{konst.}$

Dieses Resultat läßt sich noch verallgemeinern. Erfüllt das Inflaton-Potential nämlich die slow-roll Bedingungen (1.39) und (1.40), so läßt sich zeigen [46], daß man automatisch ein in etwa skaleninvariantes Spektrum findet. Genauer gesagt erhält man ein Potenzgesetz der Form (1.57) mit Spektralindex

$$n = 1 - 6\epsilon + 2\eta. \quad (1.96)$$

Dieses wichtige Ergebnis ist ein weiterer Grund, der die Idee einer inflationären Phase des frühen Universums so attraktiv erscheinen läßt.

Kapitel 2

Schwarze Löcher

Schon 1916 fand Karl Schwarzschild die ersten exakten Lösungen der Vakuum-Feldgleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie. Wegen der auftretenden Singularitäten betrachtete man diese Lösungen allerdings lange Zeit als unphysikalisch. Erst nach und nach erkannte man, daß sie den Außenraum von sphärisch symmetrischen Objekten wie z.B. von Planeten oder Sternen dennoch korrekt wiedergeben.

Das Interessante an diesen Lösungen ist vor allem das Auftreten eines *Ereignishorizontes*, sobald die Ausdehnung des betrachteten Objektes unter einen kritischen Wert sinkt bzw. seine Dichte genügend hoch ist. Aus dem Inneren dieses Ereignishorizontes führen nur raumartige Weltlinien nach außen, d.h. nicht einmal mehr Licht kann entweichen und damit auch keinerlei (physikalische) Information nach außen gelangen. Das ist der Grund, weswegen für solche extremen Objekte der Name *Schwarzes Loch* geprägt wurde. Galten sie zu Beginn noch als sehr spekulativ, gilt ihre Existenz heute als gesichert: So geht man z.B. von einem riesigen schwarzen Loch mit einer Masse von etwa $2.6 \times 10^6 M_{\odot}$ im Zentrum unserer Milchstraße aus.

Im ersten Abschnitt dieses Kapitels sollen die wesentlichen klassischen, d.h. allgemein relativistischen Eigenschaften Schwarzer Löcher vorgestellt werden. Neben dem wichtigen Satz über ihre "*Haarlosigkeit*" (Schwarze Löcher lassen sich eindeutig durch Masse, Ladung und Drehimpuls beschreiben) gehört hierzu insbesondere auch die Beschreibung ihrer Entstehung durch den sphärisch-symmetrischen Kollaps ausgebrannter Sterne sowie die Einbettung dieses Prozesses in die berühmten *Singularitätentheoreme* von Hawking und Penrose, die die zwangsläufige Entstehung einer Singularität unter viel allgemeineren Umständen voraussagen.

Der zweite Abschnitt wird dann auf Quantenaspekte Schwarzer Löcher

eingehen. In erster Linie ist dies die Entdeckung Hawkings, daß man Schwarzen Löchern im semiklassischen Limes eine endliche Temperatur T zuordnen kann und sie mit dem Spektrum eines schwarzen Körpers dieser Temperatur strahlen – während sie natürlich rein klassisch gesehen perfekte Absorber sind und ihnen somit die Temperatur $T = 0$ zugeordnet werden müßte. Außerdem werden in diesem Abschnitt kurz die Probleme und Grenzen einer solchen semiklassischen Theorie diskutiert und damit die Anforderungen an eine (noch zu findende) volle Theorie der Quantengravitation aufgezeigt.

Ein Großteil der folgenden Darstellung findet sich in [33] wieder. Die klassischen Aspekte von Schwarzen Löchern sind außerdem in praktisch allen Lehrbüchern zur Allgemeinen Relativitätstheorie zu finden (siehe z.B. [53, 68, 72]), eine sehr ausführliche Behandlung und Herleitung der Hawking-Strahlung im Rahmen der Quantenfeldtheorie auf gekrümmter Raumzeit gibt [5].

2.1 Klassische Behandlung

Die eindeutig bestimmte sphärisch-symmetrische Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen im Vakuum ist die *Schwarzschild-Metrik*, die in den Standardkoordinaten die folgende Form annimmt:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{R_S}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad (2.1)$$

wobei

$$R_S := 2Gm \quad (2.2)$$

den *Schwarzschildradius* bezeichnet. Die zunächst unbestimmte Konstante m erhält man durch Bildung des Newtonschen Limes und identifiziert sie daher mit der Masse des diese Metrik erzeugenden Objektes. Die Metrik (2.1) ist asymptotisch flach, d.h. sie geht für $r \rightarrow \infty$ in die des Minkowski-Raumes über. Die Koordinatenzeit t mißt also die Eigenzeit eines weit entfernten Beobachters.

Die Schwarzschild-Metrik gilt im Vakuum, d.h. nur im Außenraum der Massenverteilung. Eine stetig daran anschließende *Innenraumlösung*, die für das Sterninnere eine ideale Flüssigkeit annimmt (also eine Materieverteilung der Form (1.3)), wurde erst sehr viel später von Tolman, Oppenheimer und Volkoff gefunden.

Die Metrik (2.1) weist bei $r = 0$ und bei $r = R_S$ Singularitäten auf. Im Gegensatz zur Singularität im Ursprung erweist sich die zweite aber

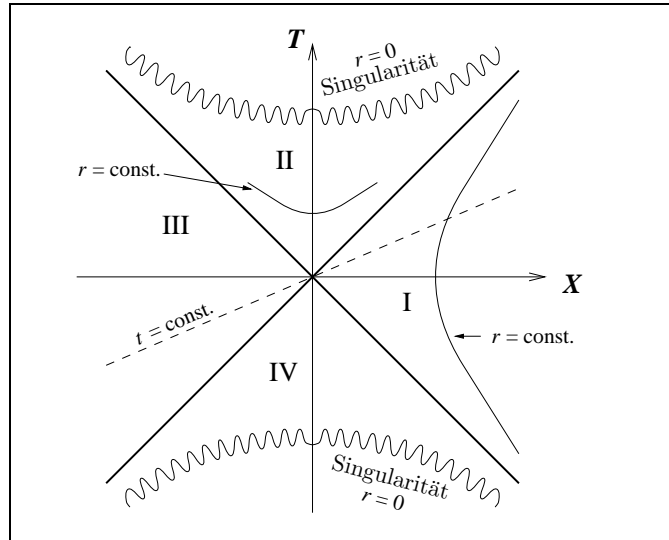


Abb. 2.1: Kruskal-Diagramm der erweiterten Schwarzschild-Mannigfaltigkeit. Die Region *I* stellt unser Universum dar und wird durch die Standardkoordinaten der Schwarzschild-Metrik mit $r > R_S$ beschrieben.

lediglich als Koordinaten-Artefakt: Kruskal fand eine Koordinatentransformation $(t, r) \rightarrow (T, X)$, mit der Singularitäten (außer im Ursprung) vermieden werden und bei der für radiale Lichtstrahlen

$$dT = \pm dX \quad (2.3)$$

wie im flachen Raum gilt. Die *Kruskal-Koordinaten* decken nun im Gegensatz zu den Schwarzschild-Koordinaten die gesamte Raumzeit ab¹, wie dies in Abb. 2.1 dargestellt ist. Die Region *I* entspricht dabei dem durch die Schwarzschildmetrik für $r > R_S$ beschriebenen Bereich. Man erkennt, daß die Singularität bei $r = 0$ raumartig ist – also keinen Ort, sondern eine bestimmte Zeit beschreibt. In der vollen Kruskal-Mannigfaltigkeit gibt es sogar zwei dieser Singularitäten – eine in der Vergangenheit und eine in der Zukunft aller Beobachter der Region *I* oder *III*.

Wegen der Eigenschaft (2.3) verlaufen radiale Lichtstrahlen in der Abbildung 2.1 wie im Minkowski-Raum auf geraden Linien mit einer Steigung von

¹Sie sind genauer gesagt die maximale analytische Erweiterung der Schwarzschild-Mannigfaltigkeit (die durch die Schwarzschildkoordinaten mit $r > R_S$ beschrieben wird), d.h. jede Geodätische kann entweder bis zum Wert ∞ ihres affinen Parameters verfolgt werden oder trifft vorher auf eine Singularität.

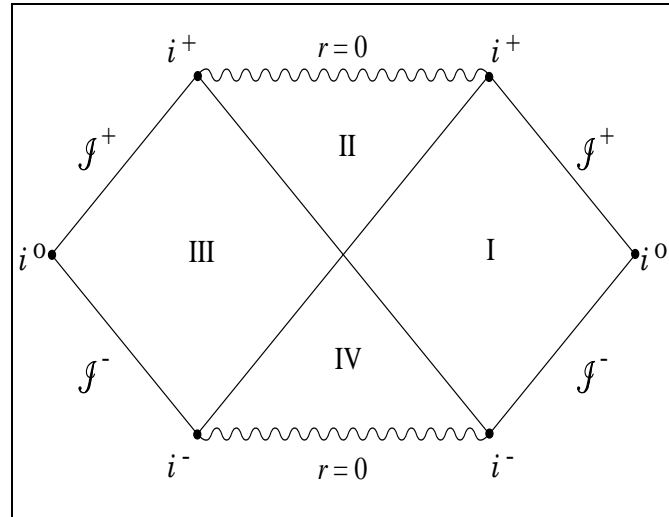


Abb. 2.2: Penrose-Diagramm der Kruskal-Raumzeit.

$\pm 45^\circ$ und die Kausalitätsverhältnisse sind leicht zu überblicken. Insbesondere sind die Regionen *I* bis *IV* offensichtlich durch *Ereignishorizonte* voneinander getrennt – so kann beispielsweise kein Signal aus Region *II* (also innerhalb des Schwarzschildradius R_S) in die unserem Universum entsprechenden Regionen *I* oder *III* (außerhalb des Schwarzschildradius) gelangen. Für die Region *II* wurde deswegen der Name *Schwarzes Loch* geprägt; das zeitgespiegelte Gegenstück, Region *IV*, bezeichnet man als *Weißes Loch*.

Statt Kruskal-Diagrammen benutzt man oft auch *Penrose-Diagramme* (siehe Abb. 2.2), die konform äquivalente Raumzeiten beschreiben, in denen unendlich weit entfernte Regionen auf eine endliche Grenze abgebildet werden. Da die Beziehung (2.3) natürlich unter konformen Transformationen $ds^2 \rightarrow A^2(T, X) ds^2$ unverändert bestehen bleibt, sind Penrose-Diagramme besonders gut geeignet, um die kausalen Verhältnisse auch komplizierterer Topologien zu beschreiben.

Was passiert nun, wenn sich ein Beobachter aus dem Außenraum auf den Horizont zubewegt? An der Metrik (2.1) und der Abb. 2.1 erkennt man, daß der Horizont nicht in endlicher Koordinatenzeit erreicht werden kann: $t \rightarrow \infty$ für $r \rightarrow R_S$. Dennoch läßt sich leicht zeigen, daß der Beobachter den Horizont und auch die Singularität in endlicher Eigenzeit erreicht: Im freien Fall beispielsweise beträgt die benötigte Eigenzeit vom Horizont bis

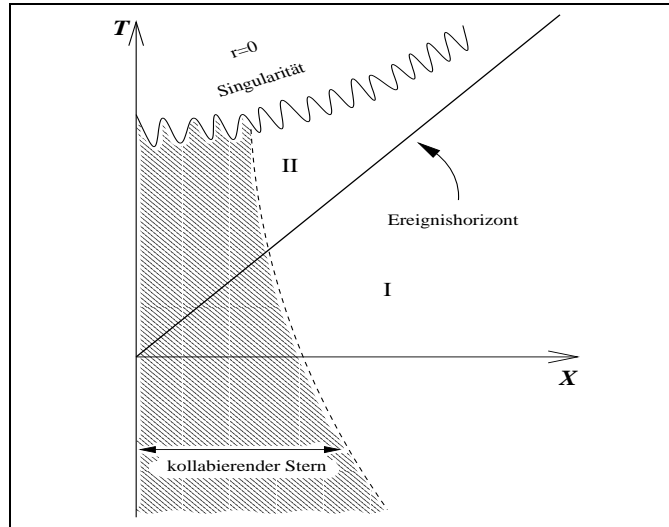


Abb. 2.3: Kruskal-Diagramm für den Kollaps zu einem Schwarzen Loch. Die gestrichelte Linie stellt die Weltlinie eines Punktes auf der Oberfläche des kollabierenden Sternes dar.

zur Singularität lediglich

$$s = \frac{\pi}{2} R_S \approx 1.5 \cdot 10^{-5} \frac{m}{M_\odot} \text{sec}. \quad (2.4)$$

Da die Singularität raumartig ist, vergeht für einen nicht frei fallenden Beobachter für den “Weg” vom Horizont bis zur Singularität sogar noch weniger Eigenzeit – egal, in welche Richtung er sich bewegt!

Es stellt sich natürlich die Frage, ob es derartige Schwarze Löcher überhaupt geben kann. Sterne, deren thermonukleare Energie aufgebraucht ist, werden normalerweise durch den Druck entarteter Elektronen oder Neutronen vor einem Gravitationskollaps bewahrt. Haben sie jedoch eine Masse von mehr als etwa zwei Sonnenmassen, so reicht dieser Druck nicht mehr aus: Der Stern beginnt zu kollabieren und schrumpft, bis sein Radius unter den Schwarzschildradius sinkt und er tatsächlich ein Schwarzes Loch bildet. Die komplizierten hydrodynamischen und nuklearen Vorgänge, die bei einem solchen Prozeß einsetzen, sollen hier aber ausgeblendet bleiben und statt dessen der sphärisch-symmetrische Kollaps einer Masse von der Größenordnung einer Galaxie betrachtet werden. Kurz vor dem Durchqueren des Schwarzschildradius hat ein solches Gebilde nämlich nur etwa die Dichte $\rho = \frac{M}{\frac{4\pi}{3} R_S^3} \sim 10^{-3} \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$, also etwa die Dichte von Luft. Nicht-gravitative

Kräfte können somit vernachlässigt und jedes der beteiligten Teilchen als frei fallend angesehen werden, d.h. sie durchqueren den Schwarzschild-Radius alle in endlicher Eigenzeit. Ein solcher Kollaps zu einem Schwarzen Loch ist in Abbildung 2.3 dargestellt.

Aus dem bereits Gesagten ist klar, daß das kollabierende Objekt für einen Außenraumbeobachter nie wirklich schwarz wird, sondern zu allen Zeiten Licht aussendet: Die Durchquerung des Horizontes kann nämlich nicht in endlicher Koordinatenzeit stattfinden. Allerdings wird dieses Licht zunehmend rotverschoben – die Rotverschiebung nimmt sogar exponentiell mit der Zeit zu und die Leuchtkraft entsprechend ab. Da die charakteristische Zeitskala, $\tau \approx 3\sqrt{3}M$, hierbei sehr kurz ist, ist der Ausdruck “Schwarzes Loch” für kollabierende Sterne oder Galaxienkerne aber dennoch gerechtfertigt.

Bis hierhin wurde bei der Diskussion nur die Außenraum-Metrik des kollabierenden Objektes betrachtet. Die analytisch daran anschließende Innenraum-Metrik ist gerade die eines kollabierenden $k = +1$ - Friedmann-Universums (siehe Gl. (1.1)), wie man sich für das hier beschriebene Modell durch den Vergleich geeigneter gewählter Anfangsbedingungen klarmachen kann. Schließlich kann man noch den kosmologisch viel relevanteren Fall betrachten, daß der Kollaps nicht in einem statischen und flachen Hintergrund, sondern in einem expandierenden (und möglicherweise auch wieder kollabierenden) Universum stattfindet. Solange die charakteristische Zeit für den Kollaps sehr viel kleiner ist als die (möglicherweise endliche) Lebensdauer des Universums, ergeben sich hierbei jedoch keine qualitativen Unterschiede und Schwarze Löcher haben im Wesentlichen dieselben Eigenschaften wie im Minkowski-Raum.

Heute wurden bereits Schwarze Löcher sowohl mit einigen wenigen Sonnenmassen (d.h. aus dem Kollaps von Sternen entstanden) als auch des hier beschriebenen Typs (beispielsweise das etwa $10^6 M_{\odot}$ schwere Objekt im Zentrum der Milchstraße) einigermaßen zweifelsfrei nachgewiesen. Auf der theoretischen Seite ist die Idee derartig singulärer Objekte zudem spätestens seit den in den sechziger Jahren von Hawking und Penrose bewiesenen *Singularitätentheoremen* akzeptiert: Demnach ist das Auftreten einer Singularität unter weit allgemeineren Bedingungen als den hier betrachteten unausweichlich.

Abschließend sei in diesem Abschnitt noch das *no hair*-Theorem genannt, demzufolge in der Einstein-Maxwell-Theorie stationäre Schwarze Löcher (also die asymptotischen Endzustände nach dem Kollaps) eindeutig durch drei Parameter charakterisiert sind²: Masse M , Drehimpuls J und

²Läßt man für die Materie auch Yang-Mills-Felder, also nicht-abelsche Eichfelder zu, so

Ladung q . Die dazugehörige allgemeinste Lösung der Feldgleichungen wird als *Kerr-Newmann-Metrik* bezeichnet und geht für verschwindende Ladung und Drehimpuls gerade wieder in die Schwarzschild-Lösung über. Die entsprechenden Penrose-Diagramme sind deutlich komplizierter als das in Abb. 2.2 gezeigte und weisen interessante Eigenschaften wie zeitartige Singularitäten und Cauchy-Horizonte auf, die hier jedoch nicht weiter diskutiert werden sollen. Astrophysikalisch relevant sind in diesem Zusammenhang vor allem rotierende Schwarze Löcher (also $J \neq 0$); von geladenen Schwarzen Löchern hingegen erwartet man, daß sie solange Teilchen der entgegengesetzten Ladung anziehen, bis sie wieder nahezu elektrisch neutral sind.

2.2 Quantenaspekte

1974 machte Hawking seine Aufsehen erregende Vorhersage [28], daß Schwarze Löcher mit dem Spektrum einer Planck-Verteilung strahlen, die – im Falle der Schwarzschild-Metrik – einer Temperatur von

$$T = \frac{1}{8\pi G k_B m} \approx 10^{-6} \frac{M_\odot}{m} \text{K} \quad (2.5)$$

entspricht. Für rotierende und geladene Schwarze Löcher ergeben sich bei gleicher Masse kleinere Temperaturen. Die Herleitung für dieses als *Hawking-Effekt* bezeichnete Phänomen soll nun im folgenden kurz skizziert werden. Theoretische Grundlage ist dabei die schon in Abschnitt 1.3.2 zur Anwendung gekommene Quantenfeldtheorie auf gekrümmter Raumzeit [5].

Der Einfachheit halber betrachtet man zunächst beispielhaft nur ein masseloses skalares Feld Φ , das der Klein-Gordon-Gleichung

$$\square_g \Phi = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu) \Phi = 0 \quad (2.6)$$

genügt. Die hier verwendete Metrik g soll die eines kollabierenden Sternes sein, also im Außenraum die Schwarzschild-Metrik (2.1) und im Innenraum eine stetig daran anschließende Innenraum-Metrik. Es zeigt sich jedoch, daß das Ergebnis nicht von der genauen Wahl der letzteren abhängt.

Die Idee ist es nun, Feldmoden zu verfolgen, die aus der asymptotisch freien Region \mathcal{J}^- durch den kollabierenden Stern zur asymptotisch freien Region \mathcal{J}^+ gelangen, wie dies in Abbildung 2.4 dargestellt ist. Jegliche Wechselwirkung zwischen Feld und Materie wird dabei vernachlässigt.

gibt es durchaus Lösungen mit weiteren Freiheitsgraden. Allerdings sind diese Lösungen meistens nicht stabil.

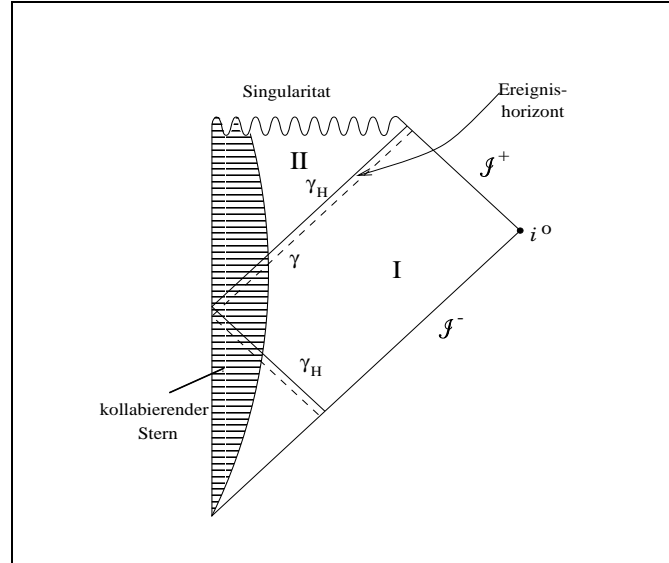


Abb. 2.4: Zur Herleitung der Hawking-Strahlung betrachtet man einen kollabierenden Stern und Moden γ , die gerade noch von \mathcal{J}^- nach \mathcal{J}^+ entweichen können. γ_H bezeichnet den Grenzfall eines solchen Strahls, der genau entlang des Ereignishorizontes verläuft.

Wegen der sphärischen Symmetrie von (2.6) läßt sich für die Lösungen ein Separationsansatz der Form $r^{-1}R_{\omega l}(r)Y_{lm}(\theta, \phi)e^{-i\omega t}$ machen und Φ dann in einen vollständigen, orthonormierten Satz $\{f_{\omega lm}\}$ von Lösungen mit positiver Frequenz zerlegen:

$$\Phi = \sum_{l,m} \int d\omega (a_{\omega lm} f_{\omega lm} + a_{\omega lm}^\dagger f_{\omega lm}^*). \quad (2.7)$$

Positive Frequenzen sind dabei durch die ausgezeichnete Koordinaten-Zeit t bestimmt, die ja in den asymptotischen Regionen gerade die des Minkowski-Raumes ist. Entsprechend wählt man die Moden $f_{\omega lm}$ so, daß sie für $r \rightarrow \infty$ die Form von normierten (einfallenden) Kugelwellen annehmen. Als Quantenzustand wählt man nun das durch

$$a_{\omega lm} |0\rangle = 0 \quad \forall \omega, l, m \quad (2.8)$$

definierte Vakuum, das der Forderung entspricht, daß keine Strahlung aus \mathcal{J}^- einfällt.

Verfolgt man aus \mathcal{J}^- einfallende Moden durch den kollabierenden Stern, so ergibt sich im wesentlichen nur für diejenigen Moden eine auf \mathcal{J}^+ asymptotisch andere Form als die einfallende, die gerade noch \mathcal{J}^+ erreichen und nicht in der Singularität landen (In Abbildung 2.4 sind sie gestrichelt dargestellt). Drückt man die ausfallenden Moden $\tilde{f}_{\omega lm} := f_{\omega lm}(\mathcal{J}^+)$ positiver Frequenz nun wieder durch die einlaufenden Kugelwellen $f_{\omega lm}(\mathcal{J}^-)$ aus, so sieht man, daß sie diese ursprünglichen Moden sowohl mit positiver als auch mit negativer Frequenz enthalten. Eine solche Mischung positiver und negativer Frequenzen ist aber äquivalent dazu, daß der Vakuumserwartungswert des Teilchenzahloperators nicht erhalten ist: $\langle 0 | \tilde{a}_{\omega lm}^\dagger \tilde{a}_{\omega lm} | 0 \rangle \neq \langle 0 | a_{\omega lm}^\dagger a_{\omega lm} | 0 \rangle = 0$, wobei $\tilde{a}_{\omega lm}$ die zu $\tilde{f}_{\omega lm}$ gehörenden Vernichtungsoperatoren bezeichnet. Diese Teilchenproduktion läßt sich letztendlich darauf zurückführen, daß man (ähnlich wie bei der Anwesenheit starker elektrischer Felder) keinen eindeutig bestimmten Begriff vom Vakuum mehr hat – insbesondere stimmen die auf \mathcal{J}^- und \mathcal{J}^+ definierten Vakua nicht mehr überein. In dem hier betrachteten Fall findet man schließlich für die Teilchenproduktion pro Zeiteinheit wie schon erwähnt eine Planck-Verteilung mit der Temperatur (2.5).

Die Strahlung eines Schwarzen Loches hat weitreichende Konsequenzen. Nimmt man für die Strahlungsleistung der Einfachheit halber ein Stefan-Boltzmann-Gesetz an, so findet man beispielsweise, daß die Masse m des Schwarzen Loches mit

$$\frac{dm}{dt} \propto -R_S^2 \cdot T^4 \propto -\frac{1}{m^2} \quad (2.9)$$

abnimmt. Daraus ergibt sich eine endliche Lebenszeit Schwarzer Löcher von³

$$t_{evap} \approx 10^{65} \left(\frac{m}{M_\odot} \right)^{-2} \text{ y.} \quad (2.10)$$

Die in diesem Abschnitt beschriebenen Resultate sind auch noch in einem anderen Zusammenhang interessant. Rein klassisch gesehen lassen sich nämlich für Schwarze Löcher Sätze beweisen, die genau den Hauptsätzen der Thermodynamik entsprechen, wenn man ihnen formal eine Temperatur

³Dies gilt natürlich nur, solange man den Einfluß der Massenzunahme durch Akkretion umliegender Materie vernachlässigen kann. Schwarze Löcher astrophysikalischen Ursprungs beispielsweise haben eine Temperatur von weniger als einem Mikro-Kelvin, siehe (2.5), nehmen also allein schon aufgrund der Hintergrundstrahlung deutlich mehr Strahlung auf als sie abgeben. Da die Hintergrundstrahlung in einem expandierenden Universum aber immer weiter abnimmt, werden auch diese Schwarzen Löcher irgendwann zerstrahlt sein (vorausgesetzt, das Universum kollabiert nicht vorher).

proportional zum Inversen ihrer Masse und eine Entropie proportional zur Oberfläche zuordnet. Die Entdeckung Hawkings liefert eine physikalische Erklärung für diese zunächst nur formale Analogie; außerdem legt sie die Proportionalitätskonstanten für die Temperatur und damit auch für die Entropie fest.

Beispielsweise gilt klassisch, daß die Oberfläche eines Schwarzen Loches nie kleiner werden kann. Berücksichtigt man die Massenabnahme durch Strahlung, so gilt dies natürlich nicht mehr – statt dessen gilt aber eine Art verallgemeinerter zweiter Hauptsatz: Die Summe aus Entropie der Umgebung des Schwarzen Loches und Entropie des Schwarzen Loches selbst (also bis auf eine Proportionalitätskonstante seine Oberfläche) können nicht abnehmen. Damit wird auch ein klassisches Paradoxon gelöst: In Gegenwart Schwarzer Löcher gibt es nämlich Prozesse, bei denen die Entropie abnimmt (z.B. wenn Strahlung im Schwarzen Loch verschwindet) – die *Gesamtentropie* nimmt hierbei jedoch nicht ab, d.h. das Schwarze Loch und damit seine Oberfläche wachsen bei einem solchen Prozeß um einen entsprechenden Betrag.

Es sollte deutlich geworden sein, daß das Strahlen Schwarzer Löcher ein Effekt einer noch zu findenden vollen Theorie der Quantengravitation ist, der bereits im hier vorgeführten semiklassischen Limes auftritt. Einige zentrale Fragen an die volle Theorie bleiben in diesem Zusammenhang aber noch offen. Zum einen ist der Ursprung der oben erwähnten Entropie eines Schwarzen Loches noch nicht wirklich verstanden. Man würde nämlich gerne in irgendeinem Sinne innere Zustände angeben können, um die Entropie dann wie üblich als (Logarithmus der) Anzahl möglicher Mikrozustände interpretieren zu können. Klassisch gesehen gibt es eine solche innere Struktur natürlich nicht, da Schwarze Löcher vollständig durch die drei Parameter Masse, Drehimpuls und Ladung bestimmt sind.

Die zweite große offene Frage ist, was für $m \rightarrow 0$ mit einem zerstrahlenden Schwarzen Loch geschieht. Das Gravitationsfeld ist dann in jedem Fall so stark, daß die semiklassische Näherung zusammenbricht. Denkbar wäre beispielsweise, daß das Schwarze Loch nicht vollständig zerstrahlt, sondern ein Relikt in der Größenordnung der Planck-Masse zurückläßt.

Eng mit diesen beiden Problemen hängt das sogenannte *Informationsproblem*⁴ zusammen: Aufgrund der unitären Zeitentwicklung in der Quantenmechanik muß die Information im Gesamtsystem erhalten bleiben; da der Außenraum eines Schwarzen Loches nur durch drei Parameter gekennzeichnet ist, muß praktisch die gesamte Information, die in der in das Loch gefallenen Materie steckt, im Inneren des Schwarzen Loches verbleiben,

⁴Einen Überblick dazu gibt beispielsweise [32].

d.h. versteckt hinter dem Ereignishorizont. Damit ergibt sich unmittelbar ein Problem, falls das Schwarze Loch vollständig zerstrahlt – aber selbst wenn ein Relikt mit Planck-Masse zurückbleibt, ist es kaum vorstellbar, wie die ungeheuer hohe Information, die im Laufe der Lebensdauer des Schwarzen Loches hinter dem Ereignishorizont verschwunden ist, in einem derart kleinen Objekt repräsentiert sein soll. Eine mögliche Lösung zu diesem Problem – zumindest für den hier diskutierten semiklassischen Limes – liefert aber [35]. Demnach bleibt der Quantenzustand des Gesamtsystems, der sich als Produkt verschränkter Zustände innerhalb und außerhalb des Ereignishorizontes schreiben läßt, während der gesamten Entwicklung ein reiner Zustand. Die Entwicklung bleibt also unitär und keine Information geht verloren. Der Vorgang der Dekohärenz (durch Wechselwirkung des Quantensystems mit seiner Umgebung) bedingt dann eine quasi-thermische Form der Hawking-Strahlung.

Kleine Schwarze Löcher, bei denen die in diesem Kapitel beschriebenen Effekte besonders stark sein sollten, stellen in jedem Fall eine Herausforderung an die Theorie dar. Sollte der experimentelle Nachweis gelingen, so könnten sie sogar wertvolle Aufschlüsse über die Struktur einer vollen Theorie der Quantengravitation liefern. Vielversprechende Kandidaten hierfür sind im frühen Universum entstandene sogenannte *primordiale Schwarze Löcher*, die im nächsten Kapitel ausführlich behandelt werden sollen.

Kapitel 3

Primordiale Schwarze Löcher (PBHs)

Wie bereits im ersten Kapitel betont wurde, muß es aufgrund der heutigen Existenz von Galaxien und anderen großräumigen Strukturen auch schon im frühen Universum Abweichungen von Homogenität und Isotropie gegeben haben. Selbst wenn derartige Dichtefluktuationen im Mittel klein sind, sollte man aufgrund ihrer statistischen Natur doch Regionen erwarten, in denen die Fluktuationen so groß sind, daß diese Regionen unter dem Einfluß ihrer eigenen Gravitationskraft kollabieren. Hawking hat bereits 1971 darauf hingewiesen [27], daß man aus diesen Gründen eine große Anzahl derartiger *primordialer Schwarzer Löcher* (PBHs) mit Massen ab $m_{pl} \sim 10^{-5}g$ erwarten könne. Im Unterschied zu Schwarzen Löchern, die aus kollabierenden Sternen entstehen, hat man es hier also mit unter Umständen sehr kleinen Objekten zu tun: Selbst bei einer Masse von $10^{15} g$ beträgt der zugehörige Schwarzschild-Radius nur etwa $10^{-15} m$! In Materie beispielsweise würden sich derart winzige Schwarze Löcher ähnlich wie normale Atomkerne verhalten und könnten – falls sie geladen sind – sogar durch Einfang von Elektronen bzw. Protonen so etwas wie “Atome” bilden [27].

Im ersten Abschnitt dieses Kapitels soll zunächst die Entstehung von primordialen Schwarzen Löchern aus Dichtefluktuationen im frühen Universum näher erläutert werden. Im wesentlichen sind hierbei zwei Bedingungen an die Masse M einer kollabierenden Region zu stellen [27, 13, 14]: Zum einen muß M groß genug sein, um die inneren Druckkräfte zu überwinden (d.h. die Region muß größer sein als die zugehörige Jeans-Länge λ_J) und zum anderen darf M nicht so groß sein, daß die Region eine kompakte 3-Sphäre bildet, die mit dem restlichen Universum topologisch nicht mehr zusam-

menhängt. Wie sich zeigt, laufen diese Forderungen darauf hinaus, daß der Radius der Region zum Zeitpunkt des Kollapses in etwa dem Hubble-Radius entsprechen muß und die Dichtefluktuationen bei Horizontenritt den Wert $\delta \sim 1$ annehmen müssen, damit sich ein primordiales Schwarzes Loch bildet.

Abschnitt 3.2 beschäftigt sich dann mit der weiteren zeitlichen Entwicklung eines primordialen Schwarzen Loches. Es zeigt sich aber zunächst einmal, daß vor allem die Anfangsmasse m_{PBH} eines Schwarzen Loches, das aus einer kollabierenden Region der Masse M entsteht, keineswegs trivial zu erhalten ist: Während die ersten Arbeiten grundsätzlich von $m_{PBH} \sim M$ ausgingen, zeigen neuere numerische Simulationen [58, 59] ein deutlich komplizierteres Verhalten, das insbesondere (abhängig von δ) beliebig kleine Massen m_{PBH} zuläßt. Die Masse m_{PBH} des neu gebildeten Schwarzen Loches bleibt dann im Laufe der weiteren Entwicklung näherungsweise konstant [13, 59] bzw. nimmt wegen der Hawking-Strahlung sogar ab.

Im dritten Abschnitt dieses Kapitels wird beschrieben, wie man ausgehend von einem vorgegebenen primordialen Fluktuationsspektrum den Massenanteil von neugebildeten PBHs im Universum berechnen kann und wie sich die Dichteverteilung Schwarzer Löcher weiter entwickelt. Dabei wird insbesondere auf die auftretenden Grenzen und Probleme des zugrundegelegten Press-Schechter-Formalismus eingegangen.

Abschließend sollen in diesem Kapitel verschiedene Bedingungen an das Massenspektrum primordialer Schwarzer Löcher aus der Beobachtung heutiger astrophysikalischer Größen diskutiert werden. Dafür lassen sich grundsätzlich zwei verschiedene Herangehensweisen unterscheiden: Zum einen kann man die gravitative Wirkung der heutigen Verteilung primordialer Schwarzer Löcher betrachten; zum anderen lassen sich Konsequenzen aus der seit ihrer Entstehung emittierten Hawking-Strahlung ableiten. Obwohl bis heute noch nie ein primordiales Schwarzes Loch direkt nachgewiesen werden konnte, ergeben sich aus diesen Betrachtungen interessanterweise dennoch sehr weitgehende Konsequenzen für das Massenspektrum und daraus wiederum für die Natur der zugrundeliegenden Dichtefluktuationen.

Neben den bereits zitierten Literaturangaben sei hiermit noch auf verschiedene Übersichtsartikel zum Thema primordiale Schwarze Löcher verwiesen [15, 16, 60, 51]. Diese gehen z.T. auch recht ausführlich auf diverse andere mögliche Entstehungsmechanismen für PBHs ein (z.B. bei Phasenübergängen), was hier aber aus Platzgründen ausgeklammert werden soll. Eine aktuelle Zusammenfassung der Einschränkungen des PBH-Massenspektrums aus der Beobachtung findet sich beispielsweise in [22], auf die einzelnen Aspekte hiervon und die zugrundeliegenden Arbeiten wird in Abschnitt 3.4 näher eingegangen.

3.1 Entstehung im frühen Universum

An dem Ausdruck

$$\rho_{SL} = \frac{m}{\frac{4\pi}{3}R_S^3} \approx 10^{16} \left(\frac{m}{M_\odot} \right)^{-2} \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \quad (3.1)$$

für die Dichte eines schwarzen Loches erkennt man sofort, daß das frühe Universum die einzige Zeit war, zu der sich Schwarze Löcher mit deutlich kleinerer Masse m als die Sonnenmasse M_\odot überhaupt bilden konnten. Die Bedingungen für die Entstehung solcher primordialen Schwarzen Löcher sollen nun im folgenden näher untersucht werden.

Betrachtet man im frühen Universum eine Region mit Radius $R = R_{phys}$ und Dichte ρ , so ergibt sich für ihre (gravitative) potentielle Energie

$$V \sim -G\rho^2 R^5 \quad (3.2)$$

und für ihre kinetische Energie (durch die Expansion des Universums)

$$T \sim \rho R^3 \dot{R}^2. \quad (3.3)$$

In einem flachen ($k = 0$) Friedmann-Universum verschwindet die Summe $E = T + V$ dieser Energien und man hat $\rho = \rho_c \sim G^{-1} \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 = G^{-1} H^2$, also gerade die zweite Friedmann-Gleichung (1.6)¹.

Im folgenden wird nun angenommen, daß das Universum global gesehen ein solches $k = 0$ - Friedmann-Universum mit aufgeprägten kleinen Dichtefluktuationen ist und die betrachtete Region eine etwas *höhere* (mittlere) Dichte ρ als die durchschnittliche Dichte $\bar{\rho} = \rho_c$ aufweist. Eine solche Region verhält sich wie ein $k = 1$ - Friedmann-Universum²: Da die potentielle Energie höher ist als die kinetische, kommt die Expansion dieser Region nach endlicher Zeit zum Stillstand. Damit es danach zu einem vollständigen Kollaps kommen kann, muß die potentielle Energie $V = E$ zu diesem Zeitpunkt betragsmäßig größer sein als die innere Energie

$$U \sim pR^3 = f\rho R^3, \quad (3.4)$$

wobei wieder eine Zustandsgleichung der Form $p = f\rho$ – siehe Gl. (1.2) – zugrunde gelegt wurde. Daraus ergibt sich als notwendige Bedingung für den

¹Hier und im folgenden soll $\Lambda = 0$ gelten (vgl. auch Fußnote 5 in Kap. 1.1).

²Dies gilt zumindest für $H^{-1} \ll R$, also solange die Region deutlich größer als der Horizont ist.

Kollaps eine untere Schranke für die erforderliche Größe der betrachteten Region,

$$R \gtrsim \sqrt{f} G^{-\frac{1}{2}} \rho^{-\frac{1}{2}}, \quad (3.5)$$

also erwartungsgemäß gerade die Jeans-Länge (1.65).

Es gibt aber auch eine obere Schranke für R . Dazu betrachtet man die zweite Friedmann-Gleichung (1.6) zu dem Zeitpunkt t_c , zu dem die Expansion zum Stillstand kommt. Dann gilt $\dot{a}(t_c) = 0$ und für den Krümmungsradius R_k der $k = 1$ Region erhält man

$$R_k = a \sim G^{-\frac{1}{2}} \rho^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.6)$$

Falls nun $R \gtrsim R_k$, so würde die Region eine kompakte 3-Sphäre enthalten, die topologisch nicht mehr mit dem Rest des Universums zusammenhänge. Dies entspricht natürlich nicht der Situation eines schwarzen Loches *in* unserem Universum und entsprechend muß man fordern, daß der Radius der kollabierenden Region kleiner ist als ihr Krümmungsradius.

Mit Hilfe der Beziehung $\rho \sim \rho_c \sim G^{-1} H^2$ läßt sich die Bedingung für den endgültigen Kollaps einer Region mit Radius R damit insgesamt wie folgt schreiben:

$$\alpha H_c^{-1} > R_c > \beta H_c^{-1} \quad \text{mit} \quad \alpha \sim 1, \beta \sim \sqrt{f}. \quad (3.7)$$

Der Index c soll daran erinnern, daß diese Bedingungen für den Zeitpunkt t_c gelten, an dem die Expansion der betreffenden Region beendet ist und sie zu kollabieren beginnt³. Das Ziel soll es nun im folgenden sein, (3.7) so umzuformulieren, daß man eine Bedingung an die Fluktuationen zu einer beliebigen Zeit t_i (also z.B. zum Zeitpunkt ihrer Entstehung) und nicht nur zum oben beschriebenen Zeitpunkt t_c erhält.

Die Entwicklung des flachen Hintergrundes und die der $k = 1$ - Region sind unabhängig voneinander gegeben durch die Friedmann-Gleichung (1.6), kombiniert mit Gl. (1.8):

$$\left(\frac{da}{dt} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_i a_i^{3(f+1)} a^{-(1+3f)} \quad (3.8)$$

bzw.

$$\left(\frac{d\tilde{a}}{d\tau} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \tilde{\rho}_i \tilde{a}_i^{3(f+1)} \tilde{a}^{-(1+3f)} - 1. \quad (3.9)$$

³Die Größe ρ_c bezeichnet aber weiterhin die kritische Dichte (1.11), falls nicht explizit etwas anderes gesagt wird.

Dabei sind $a(t)$ der Skalenfaktor und ρ die Dichte des flachen Hintergrundes, $\tilde{a}(\tau)$ und $\tilde{\rho}$ sind die entsprechenden Größen in der $k = 1$ - Region.

Um diese Größen nun miteinander in Beziehung zu bringen, muß man eine (physikalisch motivierte) Eichung festlegen. Dazu identifiziert man die räumlichen Hyperflächen $t = t_i$ und $\tau = \tau_i$, fordert also $a_i = \tilde{a}_i$ und $\left(\frac{da}{dt}\right)_{t_i} = \left(\frac{d\tilde{a}}{d\tau}\right)_{\tau_i}$. Durch Gleichsetzung von (3.8) und (3.9) erhält man dann für die anfängliche Dichte $\tilde{\rho}_i$ der $k = 1$ - Region, ausgedrückt in Meßgrößen des flachen Hintergrundes:

$$\tilde{\rho}_i = \rho_i(1 + \delta_i) = \rho_i + \frac{3}{8\pi G} a_i^{-2}. \quad (3.10)$$

Zum Zeitpunkt τ_c , zu dem die $k = 1$ -Region zu kollabieren beginnt, verschwindet die linke Seite von Gl. (3.9). Zusammen mit Gl. (3.10) ergibt sich damit wegen $a_i = \tilde{a}_i$ und $\delta_i \ll 1$:

$$\tilde{a}_c = \left(\frac{8\pi G}{3} a_i^2 \tilde{\rho}_i\right)^{\frac{1}{1+3f}} a_i = \left(\frac{1 + \delta_i}{\delta_i}\right)^{\frac{1}{1+3f}} a_i \approx \delta_i^{-\frac{1}{1+3f}} a_i. \quad (3.11)$$

Mit Gl. (1.9) erhält man daraus dann⁴

$$t_c = \left(\frac{a_c}{a_i}\right)^{\frac{3(1+f)}{2}} t_i \approx \left(\frac{a_c}{\tilde{a}_c}\right)^{\frac{3(1+f)}{2}} t_i \delta_i^{-\frac{3(1+f)}{2(1+3f)}} \approx t_i \delta_i^{-\frac{3(1+f)}{2(1+3f)}}, \quad (3.12)$$

also wegen Gl. (1.20) auch

$$H_c^{-1} \approx H_i^{-1} \delta_i^{-\frac{3(1+f)}{2(1+3f)}}. \quad (3.13)$$

Mit Gl. (3.13) und (3.11) wird Bedingung (3.7) zu

$$\alpha^2 \left(\frac{H_i^{-1}}{R_i}\right)^2 > \delta_i > \beta^2 \left(\frac{H_i^{-1}}{R_i}\right)^2, \quad (3.14)$$

wobei $R_i = \frac{a_i}{a_c} R_c$. Man hat also wie gewünscht eine Bedingung an die Fluktuationen zur Zeit t_i erhalten. Betrachtet man nun die Masse M_i der $k = 1$ -

⁴Die letzte Näherung gilt, da sich die Skalenfaktoren für den geschlossenen und den offenen Fall zum Zeitpunkt t_c noch nicht wesentlich voneinander unterscheiden, wenn die Dichte der betreffenden geschlossenen Region wie hier nicht allzu weit von der kritischen Dichte entfernt ist (vgl. dazu auch Abb. 1.1).

Region zum Zeitpunkt t_i ,

$$M_i = \frac{4\pi}{3} R_i^3 \bar{\rho}_i (1 + \delta_i) \approx \frac{4\pi}{3} R_i^3 \bar{\rho}_i, \quad (3.15)$$

und vergleicht sie mit der Masse $M_{H,i}$, die sich zum selben Zeitpunkt typischerweise innerhalb des Horizontes befindet,

$$M_{H,i} = \frac{4\pi}{3} H_i^{-3} \bar{\rho}_i, \quad (3.16)$$

so kann man die Bedingung dafür, daß sich eine Dichteschwankung δ_i in ein primordiales Schwarzes Loch entwickelt, schließlich in die folgende Form bringen⁵:

$$\delta_{max} \left(\frac{M_i}{M_{H,i}} \right)^{-\frac{2}{3}} > \delta_i > \delta_{min} \left(\frac{M_i}{M_{H,i}} \right)^{-\frac{2}{3}} \quad \text{mit} \quad \delta_{max} \sim 1, \delta_{min} \sim f. \quad (3.17)$$

Diese Bedingung läßt sich noch weiter vereinfachen, wenn man die Dichtefluktuationen zum Zeitpunkt t_{enter} des Horizonteintrittes betrachtet: Dann gilt $M_i = M_{H,i}$ und für Moden, die während der strahlungsdominierten Phase ($f = \frac{1}{3}$) in den Horizont eintreten, erhält man

$$1 \gtrsim \delta_{enter} \gtrsim 0.3. \quad (3.18)$$

Es muß jedoch noch einmal ausdrücklich betont werden, daß die zugrundeliegenden Überlegungen auf Größenordnungs-Abschätzungen beruhen. Es darf also nicht erwartet werden, daß die angegebenen oberen und unteren Grenzen für δ numerisch exakt sind. Mit Hilfe einer numerischen Analyse [59] sieht man vielmehr, daß sich erst dann ein schwarzes Loch bildet, wenn die Dichteschwankungen bei Horizonteintritt den Wert $\delta_{min} \approx 0.7$ (oder größer) annehmen. Der exakte Wert der *oberen* Grenze ist bei gaußschen Dichtefluktuationen hingegen nicht von allzu großem Interesse, da üblicherweise $\sigma := \sqrt{\langle \delta^2 \rangle} \ll \delta_{min}$; die Dichteverteilung fällt also im hier relevanten Bereich sehr schnell ab, und praktisch alle schwarzen Löcher bilden sich somit aus Dichtefluktuationen nahe der *unteren* Grenze.

⁵Die hier vorgeführte ausführliche Ableitung orientierte sich im wesentlichen an [14].

3.2 Die weitere Entwicklung eines PBH

Gemäß den abschließenden Überlegungen des vorigen Abschnittes erwartet man für eine Region, die zu einem Schwarzen Loch zu kollabieren beginnt, daß sie die Bedingung (3.7) in der folgenden Weise erfüllt:

$$R_c \approx \sqrt{f} H_c^{-1}. \quad (3.19)$$

Das sich bildende Schwarze Loch hat daher eine anfängliche Masse von

$$m_{PBH} = \frac{4\pi}{3} \rho R^3 \Big|_{t_c} \approx \frac{4\pi}{3} \bar{\rho} (1 + \delta) f^{\frac{3}{2}} H^{-3} \Big|_{t_c} \approx f^{\frac{3}{2}} M_{H,c}, \quad (3.20)$$

die von der Grössenordnung der Horizontmasse $M_{H,c} := M_H(t_c)$ ist [15]. Das bedeutet, daß eine kollabierende Region praktisch unmittelbar nach Eintritt in den Horizont ein schwarzes Loch bildet. Qualitativ erhält man dieses Resultat im übrigen auch einfach dadurch, daß man den Ausdruck für die Dichte eines Schwarzen Loches (3.1) mit der Dichte $\rho \approx \frac{1}{Gt^2}$ (1.11, 1.20) des Universums zur Zeit t vergleicht [16].

Die anfängliche Masse m_{PBH} des neu gebildeten schwarzen Loches wird natürlich im Laufe der Zeit durch Akkretion umliegender Materie zunehmen. Es zeigt sich jedoch, daß diese Massenzunahme vernachlässigbar ist und man die Masse eines schwarzen Loches näherungsweise als konstant annehmen kann⁶. Dazu betrachtet man zunächst den Fall, daß das schwarze Loch zu einer beliebigen Zeit t_1 deutlich kleiner ist als der Horizont (vgl. [13, 14]):

$$m_1 := m(t_1) = \eta M_{H,1} \stackrel{(1.21)}{\approx} \eta G^{-1} t_1, \quad \eta < 0.9. \quad (3.21)$$

Geht man nun weiter davon aus, daß die auf das schwarze Loch einströmende Materie den Schwarzschild-Radius R_S etwa mit Lichtgeschwindigkeit passiert, so wird die Masse m des schwarzen Loches mit einer Rate von

$$\frac{dm}{dt} \approx 4\pi \rho R_S^2 = 16\pi \rho m^2 G^2 \stackrel{(1.11, 1.20)}{\approx} G m^2 t^{-2} \quad (3.22)$$

zunehmen. Integration liefert dann

$$m(t) \approx \frac{t}{G + \frac{t}{t_1} \left(\frac{t_1}{m_1} - G \right)} \quad (3.23)$$

⁶Dies gilt natürlich nur für den hier betrachteten Fall einer einigermaßen gleichmäßigen Materieverteilung. Hat man hingegen, grob ausgedrückt, eine große Massendichte in der direkt um das Schwarze Loch liegenden Region (beispielsweise bei Schwarzen Löchern im Zentrum von Galaxien), so wird natürlich auch die Masse des Schwarzen Loches signifikant zunehmen.

und für große Zeiten t geht dieser Ausdruck gegen

$$m(t \rightarrow \infty) \approx \frac{1}{1 - \eta} m_1. \quad (3.24)$$

Die Masse nimmt also höchstens um eine Größenordnung zu, wenn (3.21) erfüllt ist.

Der einzige noch zu betrachtende Fall ist also der, daß das schwarze Loch anfänglich etwa so groß ist wie der Horizont. Dieser Fall erfordert eine volle relativistische Analyse. Carr und Hawking [13] haben diese durchgeführt und kommen zu dem Ergebnis, daß ein schwarzes Loch durch Akkretion niemals mit der gleichen Rate wie das Universum wachsen kann⁷. Die Bedingung (3.21) wird daher selbst in diesem Fall schon nach kurzer Zeit erreicht und die Masse m_{PBH} eines primordialen schwarzen Loches bleibt folglich in etwa die durch Gl. (3.20) gegebene.

Die bisherigen Ergebnisse dieses Kapitels sind auch numerischen Analysen unterzogen worden [56, 58, 59], die insbesondere ohne die vereinfachende Annahme auskommen, daß sich die kollabierende Region und der $k = 0$ Hintergrund vollkommen unabhängig voneinander entwickeln. Dabei wurden die obigen Überlegungen bestätigt, daß die Massenzunahme eines primordialen schwarzen Loches nicht signifikant ist [56, 59]. Die anfängliche Masse eines PBH zeigt allerdings ein deutlich komplizierteres Verhalten, als es nach der einfachen obigen Analyse zu erwarten gewesen wäre [58, 59]. Aus Dichtefluktuationen, die bei Horizonteintritt den Wert $\delta \approx \delta_{min}$ annehmen, entwickeln sich nämlich stattdessen PBHs der Masse

$$m_{PBH} = KM_H(\delta - \delta_{min})^\gamma, \quad (3.25)$$

wobei K und γ Konstanten sind. Für δ_{min} ergab die numerische Analyse $\delta_{min} \approx 0.7$, also einen etwa doppelt so hohen Wert wie (3.18). Die PBHs, die sich zu jeder Zeit bilden, haben also nicht nur *eine* Masse wie in (3.20), sondern weisen ein ganzes Massenspektrum auf. Insbesondere braucht die Masse nicht von der Größenordnung der Horizontmasse zu sein, sondern kann – abhängig von der Größe der Dichteschwankung δ bei Horizonteintritt – beliebig klein sein.

⁷Genauer gesagt wird gezeigt, daß es keine Lösungen der Einsteinschen Feldgleichungen gibt, in der alle Längen mit der gleichen Rate wachsen. Dazu wird nur der sphärisch symmetrische Fall eines schwarzen Loches in einem Friedmann-Universum betrachtet, da Abweichungen von dieser Symmetrie (Turbulenzen etc.) die Akkretionsrate verringern und nicht vergrößern würden.

Es ist interessant zu bemerken, daß (3.25) ganz allgemein kritische Phänomene beim Gravitationskollaps zu beschreiben scheint. Solange $\delta \approx \delta_{min}$ gilt (wie dies beispielsweise bei primordialen schwarzen Löchern aufgrund der steil abfallenden Wahrscheinlichkeitsverteilung für Dichteschwankungen zu erwarten ist), ist die obige Beziehung außerdem in dem Sinne universell, daß man einen beliebigen neuen Parameter $g = g(\delta)$ einführen kann und dasselbe Skalenverhalten wie oben findet:

$$m_{PBH} = \tilde{K} M_H (g - g_{min})^\gamma, \quad (3.26)$$

mit $g_{min} := g(\delta_{min})$ und $\tilde{K} = K \cdot (\partial_g \delta(g))^\gamma|_{g_{min}}$.

Bis jetzt wurde die weitere Entwicklung eines Schwarzen Loches rein klassisch betrachtet. Berücksichtigt man außerdem die in Kapitel 2.2 beschriebenen Quanteneffekte, so findet man, daß die Masse eines Schwarzen Loches aufgrund der Hawking-Strahlung gemäß

$$\frac{dm}{dt} \approx -10^{26} m^{-2} \text{ g}^3 \text{ s}^{-1} \quad (3.27)$$

abnimmt (2.9). Für große Massen m ist dieser Effekt vernachlässigbar und die frühere Aussage bleibt gültig, daß sich die Masse eines schwarzen Loches im wesentlichen nicht ändert. Kleinere schwarze Löcher hingegen zerstrahlen nach einer endlichen Lebenszeit

$$t_{evap} \approx 10^{-26} m^3 \text{ g}^{-3} \text{ s}, \quad (3.28)$$

wie sich unmittelbar aus (3.27) ergibt. Setzt man für t_{evap} das Alter des Universums $t_0 \approx 5 \times 10^{17}$ s ein, so findet man daraus, daß alle primordialen schwarzen Löcher mit einer anfänglichen Masse kleiner als

$$m_{min} \sim 5 \times 10^{14} \text{ g} \quad (3.29)$$

bis zum heutigen Tag bereits zerstrahlt sind. PBHs mit einer Anfangsmasse $m_{PBH} > m_{min}$ sollten hingegen auch heute noch existieren und in etwa die gleiche Masse wie früher haben. Eine etwas genauere Diskussion, die Akkretion und Evaporation nicht wie hier getrennt behandelt, kommt zu einem qualitativ gleichen Ergebnis [21].

3.3 Dichteverteilung

Wie in Kapitel 1.3 näher beschrieben wurde, erwartet man primordiale Dichtefluktuationen, die im einfachsten Fall gaußverteilt sind⁸. Die Wahrscheinlichkeitsdichte $p_R(\delta)$ lautet dann

$$p_R(\delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma(R)} e^{-\frac{\delta^2}{2\sigma^2(R)}}, \quad (3.30)$$

wobei $\delta = \frac{\rho - \bar{\rho}}{\bar{\rho}}$ in diesem Ausdruck die über eine Kugel mit (mitbewegtem) Radius R gemittelte relative Überdichte darstellt. $p_R(\delta) d\delta$ gibt also die Wahrscheinlichkeit an, daß die mittlere relative Überdichte in einem Gebiet dieser Größe einen Wert aus $[\delta, \delta + d\delta]$ annimmt. Die Varianz $\sigma^2(R)$ ist nach Gl. (1.55) gegeben durch

$$\sigma^2(R) = \left\langle \left(\frac{\delta M}{M} \right)_R^2 \right\rangle = \int_0^\infty W_{TH}^2(kR) \mathcal{P}(k) \frac{dk}{k}, \quad (3.31)$$

wobei $\mathcal{P}(k)$ das durch (1.50) definierte Spektrum der primordialen Dichtefluktuationen bezeichnet. $W_{TH}(kR)$ berechnet sich gemäß (1.54) aus der top-hat-Funktion (1.52) zu

$$W_{TH}(kR) = \frac{3}{(kR)^3} (\sin kR - kR \cos kR). \quad (3.32)$$

Die Auswahl des Filters ergibt sich aus der Diskussion im Abschnitt 3.1: Die top-hat-Funktion ist in dem Sinne die “physikalischste” Wahl, daß die geglättete Größe δ direkt die mittlere Überdichte in dem zugehörigen Gebiet darstellt – also genau die Größe, die bei der Entstehung von primordialen Schwarzen Löchern relevant ist.

Die Wahrscheinlichkeit $\beta(M_H)$, daß eine Region der (mitbewegten) Größe R zum Zeitpunkt t_k des Horizonteintrittes der Skala $k = \frac{1}{R}$ eine mittlere Überdichte im Bereich $\delta_{min} \leq \delta \leq \delta_{max}$ hat, ist gegeben durch

$$\beta(M_H) := \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_H(t_k)} \int_{\delta_{min}}^{\delta_{max}} e^{-\frac{\delta^2}{2\sigma_H^2(t_k)}} d\delta \approx \frac{\sigma_H(t_k)}{\sqrt{2\pi} \delta_{min}} e^{-\frac{\delta_{min}^2}{2\sigma_H^2(t_k)}}, \quad (3.33)$$

⁸Der Fall nicht-gaußscher Fluktuationen wird beispielsweise in [11] und [12] diskutiert. Bullock und Primack gelangen zu dem Ergebnis, daß dies die PBH-Erzeugungsrate stark beeinflussen kann, allerdings in einer sehr modellabhängigen Weise.

Glücklicherweise liefern die meisten Inflationsmodelle aber tatsächlich ein gaußsches Fluktuationsspektrum und die Beobachtung der Anisotropie der Hintergrundstrahlung scheint dies bestens zu bestätigen. Zudem ergibt sich – wie in Kap. 4.2 gezeigt werden wird – beispielsweise für den Spektralindex n des Spektrums kaum ein anderes Ergebnis, wenn man die PBH-Dichte um einige (wenige) Größenordnungen verändert.

wobei $\sigma_H^2(t_k) := \sigma^2(R)|_{t_k}$. Die letzte Näherung gilt für $\delta_{min} \gg \sigma_H(t_k)$, $(\delta_{max} - \delta_{min}) \gg \sigma_H(t_k)$, wie man z.B. durch Differentiation beider Seiten nach δ_{min} erkennen kann.

Den Überlegungen in den vorangegangenen Abschnitten dieses Kapitels folgend⁹ wird nun in der Literatur im allgemeinen davon ausgegangen, daß $\beta(M_H)$ die Wahrscheinlichkeit zum Zeitpunkt t_k angibt, daß sich eine Region der Größe R in ein schwarzes Loch der Masse $m_{PBH} \gtrsim M_H(t_k)$ entwickeln wird. Dabei ist berücksichtigt, daß die Region R sehr wohl Teil einer größeren, ebenfalls überdichten (d.h. Bedingung (3.17) erfüllenden) Region R' sein kann, die zu einem entsprechend späteren Zeitpunkt $t_{k'}$ in den Horizont eintreten und zu kollabieren beginnen wird. In dieser Interpretation gibt die Größe $\beta(M)$ gerade das Massenverhältnis von Regionen, die sich in PBHs der Masse $m_{PBH} \gtrsim M$ entwickeln werden, zur Gesamtmasse des Universums an:

$$\beta(M) = \frac{\rho_{PBH,M}}{\bar{\rho}} = \frac{\rho_{PBH,M}}{\rho_c} =: \Omega_{PBH}(M, t_k), \quad (3.34)$$

wobei die Dichten hier natürlich zum Zeitpunkt t_k des Horizonteintrittes der Massenskala M zu nehmen sind.

Genau genommen ist die obige Interpretation allerdings *nicht* korrekt: $\beta(M)$ unterschätzt systematisch die Anzahl der kollabierenden Regionen und in dem Ausdruck (3.34) müßte eigentlich das erste Gleichheitszeichen durch ein “<” ersetzt werden. Das liegt daran, daß in (3.33) nicht diejenigen Regionen berücksichtigt werden, die zwar unterdicht (d.h. $\delta < \delta_{min}$) auf der betrachteten Skala R , aber dennoch Teil einer überdichten, größeren Region der Skala $R' > R$ sind; solche Regionen werden aber ebenfalls zu einem PBH kollabieren und tragen entsprechend zu $\Omega_{PBH,M}$ bei.

In den meisten Fällen ist $\beta(M)$ allerdings eine sehr schnell fallende Funktion und der soeben beschriebene Effekt kann vernachlässigt werden. Bei ausgefallenen Spektren hingegen, insbesondere bei solchen, die mehr Leistung auf größeren als auf kleineren Skalen aufweisen, fällt der Fehler aber sehr wohl ins Gewicht und man muß sich über eine neue Interpretation der Größe $\beta(M)$ Gedanken machen.

Die Probleme, die bei der Berechnung der Massen- und Anzahldichte von gravitativ gebundenen Systemen aus einem Dichtefluktuations-Spektrum auftauchen, sind im Prinzip wohlbekannt (siehe z.B. Kap. 5.8 in [61]) und

⁹Hier und im folgenden wird die Diskussion im wesentlichen auf den einfachen Fall beschränkt bleiben, daß die Masse eines neugebildeten PBH proportional zur Horizontmasse ist und nicht zu jeder Zeit PBHs über einen ganzen Massenbereich erzeugt werden können. Eine genaue Analyse der Massen-Verteilungssituation in diesem letzten Fall ist natürlich sehr viel aufwendiger – Ansätze dazu finden sich beispielsweise in [58], [23] und [40].

beziehen sich alle auf die schon angesprochene Möglichkeit “geschachtelter” Konfigurationen (in der Literatur auch unter dem Namen *cloud-in-cloud-problem* bekannt). Der Grund für die prinzipielle Schwierigkeit, eine allgemein gültige Beziehung zwischen der Größe $\beta(M)$ und der Anzahldichte von Objekten der Masse (größer gleich) M aufzustellen, liegt darin, daß die Zufallsvariablen, die man durch eine Glättung auf verschiedenen Skalen erhält, im allgemeinen nicht unabhängig voneinander sind. Das hier vorgestellte Verfahren zur Berechnung der Dichte schwarzer Löcher ist der klassische sogenannte *Press-Schechter-Formalismus* [66, 61]. In diesem Rahmen wird der Ausdruck (3.33) manchmal noch mit einem Faktor 2 multipliziert. Wählt man als Filter eine top-hat-Funktion im k -Raum, $W_k(r) = \Theta(R^{-1} - k)$, so läßt sich nämlich zeigen, daß die gewünschte Beziehung (3.34) dann exakt gegeben ist. Ein solcher Filter ist aber physikalisch natürlich nur sehr schwer zu motivieren. Um zu besseren Ergebnissen zu gelangen muß man auf äußerst aufwendige numerische Verfahren zurückgreifen oder neue (semi-)analytische Verfahren entwickeln, die das Problem der geschachtelten Konfigurationen besser in den Griff bekommen als der Press-Schechter-Formalismus. Es muß dabei aber betont werden, daß das Problem nach wie vor nicht exakt gelöst werden kann. Ein Überblick über den aktuellen Stand der Entwicklung findet sich beispielsweise in [65].

Die weitere zeitliche Entwicklung der Verteilung primordialer Schwarzer Löcher wird durch die Expansion des Universums bestimmt. Da ihre Anzahldichte umgekehrt proportional zum Volumen abnimmt, gilt auch für die Dichte von PBHs im Universum

$$\rho_{PBH}(t) \propto a(t)^{-3}. \quad (3.35)$$

Die Dichte nimmt also langsamer ab als die Energiedichte $\rho_c = \rho = \rho_r \propto a^{-4}$ des zur Zeit der PBH-Bildung noch strahlungsdominierten Universums und für Zeiten $t \ll t_{eq}$ gilt¹⁰

$$\Omega_{PBH}(t) := \frac{\rho_{PBH}}{\rho_c} \propto a(t). \quad (3.36)$$

Die Größe Ω_{PBH} hat also bis zur Zeit t_{eq} deutlich zugenommen und ist seitdem ungefähr konstant geblieben. Mit dem Ansatz $\rho = \rho_c = \rho_r + \rho_m$ findet man genauer gesagt

$$\Omega_{PBH,0} = 2 \Omega_{PBH,eq} \Omega_{m,0}, \quad (3.37)$$

¹⁰Streng genommen gilt dies nur, wenn die Strahlung – wie hier immer implizit angenommen – nicht aus mehreren Komponenten besteht bzw. sich die effektive Anzahl dieser Komponenten nicht ändert. Andernfalls müssen noch entsprechende g -Faktoren berücksichtigt werden (siehe Kap. 1.1.2).

wobei $\Omega_{PBH,eq} = \frac{\rho_{PBH,eq}}{2\rho_{r,eq}} = \frac{\rho_{PBH,eq}}{2\rho_{m,eq}}$ und (3.35) verwendet wurde. $\Omega_m := \frac{\rho_m}{\rho_c}$ bezeichnet hierbei den gesamten Materieanteil zur kritischen Dichte, einschließlich eventuell vorhandener PBHs. Auf die gleiche Weise findet man dann den für Zeiten $t < t_{eq}$ gültigen Ausdruck

$$\Omega_{PBH}(t) = 2\Omega_{PBH,eq}\Omega_r(t)\frac{a(t)}{a_{eq}} = \Omega_{PBH,0}\frac{\Omega_r(t)}{\Omega_{m,0}}\frac{a(t)}{a_{eq}}. \quad (3.38)$$

Diese Gleichung ist nur für den Fall exakt gültig, daß das Universum während seiner gesamten Entwicklung seit der Zeit t vollständig durch eine Aufspaltung der Energiedichte in einen Materie- und einen Strahlungsanteil beschrieben werden kann. Gleichungen (3.37) und (3.38) bleiben aber beispielsweise auch dann noch gültig, wenn man eine kosmologische Konstante mit $\Omega_{\Lambda,0} \sim 1$ annimmt. Dann gilt nämlich wegen $a_0 \gg a_{eq}$ (1.16) in sehr guter Näherung weiterhin

$$\Omega_{PBH,eq} = \frac{\rho_{PBH,eq}}{2\rho_{m,eq} + \rho_{\Lambda}} = \frac{\rho_{PBH,eq}}{2\rho_{m,eq}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\rho_{\Lambda}}{2\rho_{m,0}} \left(\frac{a_{eq}}{a_0}\right)^3} \approx \frac{\rho_{PBH,eq}}{2\rho_{m,eq}}, \quad (3.39)$$

was direkt zu (3.37) führt.

3.4 Vergleich mit Beobachtungen

Aus der Beobachtung erhält man verschiedenste Bedingungen an den anfänglichen Massenanteil (3.34) primordialer schwarzer Löcher. Eine Übersicht findet sich beispielsweise in [15, 60, 14, 22] und eine aktuelle Zusammenfassung der wichtigsten Punkte nach [22] ist in Tabelle 3.1 und Abbildung 3.1 gegeben¹¹.

Grundsätzlich zu unterscheiden sind dabei die Einschränkungen, die auf der heutigen gravitativen Wirkung von PBHs beruhen, von denen, die sich

¹¹Bei der Bestimmung dieser Einschränkungen wurde immer von der einfachen Annahme ausgegangen, daß $m_{PBH} \approx M_H$ gilt. Eine aufwendigere Analyse, die den komplizierteren Zusammenhang (3.25) verwendet, kommt im Prinzip zum gleichen Ergebnis – lediglich im Massenbereich $5 \cdot 10^{14} \text{ g} \lesssim M_H \lesssim 5 \cdot 10^{16} \text{ g}$ ergeben sich etwas stärkere Einschränkungen [74]. Diese sind darauf zurückzuführen, daß sich bei Horizontmassen in diesem Bereich PBHs der Masse $m_{PBH} \approx 5 \cdot 10^{14} \text{ g}$ bilden, die heute zerstrahlen und somit zur Einschränkung aus dem γ -Hintergrund beitragen (Punkt 6).

Ein weiterer wichtiger Punkt ist, daß die in Tab. 3.1 aufgeführten Einschränkungen natürlich stark von der angenommenen kosmologischen Entwicklung abhängen. Hier wurde vorausgesetzt, daß das Universum zwischen Inflationsende und einer Zeit t_{eq} strahlungs- und später materiedominiert war. Andere kosmologische Entwicklungen können aber andere Einschränkungen liefern, siehe z.B. [44, 45].

Einschränkung	Bereich	Grund
$\alpha < 0.1(M/10^{15} \text{ g})^{\frac{3}{2}}$	$M < 10^{15} \text{ g}$	Zerstrahlungsrelikte
$\alpha < 10^{-17}(10^9 \text{ g}/M)^{\frac{1}{2}}$	$10^9 \text{ g} < M < 10^{11} \text{ g}$	n_n/n_p -Verhältnis
$\alpha < 10^{-22}(M/10^{10} \text{ g})^{\frac{1}{2}}$	$10^{10} \text{ g} < M < 10^{11} \text{ g}$	Deuterium-Dissoziation
$\alpha < 10^{-21}(M/10^{11} \text{ g})^{\frac{5}{2}}$	$10^{11} \text{ g} < M < 10^{13} \text{ g}$	Helium-Spaltung
$\alpha < 10^{-16}(10^9 \text{ g}/M)$	$10^9 \text{ g} < M < 10^{13} \text{ g}$	Entropie pro Baryon
$\alpha < 10^{-26}$	$M \approx 5 \times 10^{14} \text{ g}$	γ -Hintergrund
$\alpha < 10^{-18}(M/10^{15} \text{ g})^{\frac{1}{2}}$	$M > 10^{15} \text{ g}$	heutige PBH-Dichte

Tabelle 3.1: Einschränkungen für den Massenanteil $\alpha(M) := \frac{\rho_{PBH,M}}{\rho_r} \approx \Omega_{PBH,M}$ primordialer Schwarzer Löcher zum Zeitpunkt ihrer Bildung, zusammengestellt nach [22]. Die einzelnen Punkte sind im Text näher erläutert.

aus den Konsequenzen der Zerstrahlung kleiner PBHs ergeben. Letztere beruhen darauf, daß die freigesetzte Strahlung ab einer gewissen Menge die aus den Beobachtungen gut abgesicherte thermische Entwicklung des Universums in verschiedenen Stadien stören bzw. erkennbar zum heutigen Strahlungshintergrund beitragen würde. Wegen der Beziehung (3.27) wird praktisch die gesamte Strahlungsenergie in den letzten Lebensminuten eines schwarzen Loches abgeben, also etwa zum Zeitpunkt t_{evap} . Die in Tabelle 3.1 angegebenen Bedingungen an den Massenanteil von PBHs zum Zeitpunkt ihrer Entstehung erhält man dann aus den entsprechenden Bedingungen zum Zeitpunkt t_{evap} unter Verwendung von Gl. (3.36). Zu den Punkten im einzelnen:

1. Man geht manchmal davon aus, daß Schwarze Löcher nicht vollständig zerstrahlen, sondern *Relikte der Masse* $M_{rel} \sim m_{Pl}$ zurücklassen¹². Aus der Forderung, daß diese Relikte heute nicht mehr als die kritische Dichte ausmachen können, findet man entsprechende Bedingungen für die ursprüngliche PBH-Dichte [22, 60].

2. Die Emission von (Anti-) Neutronen und -Protonen verändert (durch Reaktionen mit den Neutronen und Protonen des Hintergrundes) das beobachtete *Verhältnis* n_n/n_p von Neutronen zu Protonen. Dies wiederum führt unter Umständen zu der Beobachtung widersprechenden Auswirkungen

¹²Solange das noch nicht wirklich aus den vorhandenen Ansätzen zu Quantengravitation oder Stringtheorie folgt, ist dies natürlich nur mit Vorsicht zu genießen.

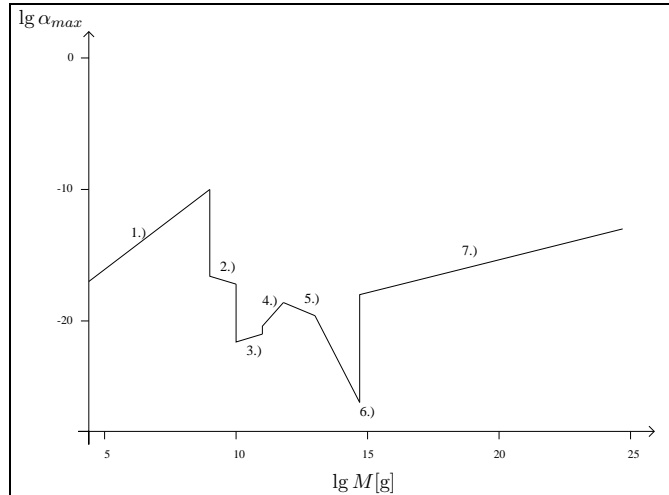


Abb. 3.1: Die stärksten Einschränkungen für den ursprünglichen PBH-Massenanteil. Die Zahlenangaben an den jeweiligen Teilabschnitten beziehen sich auf den entsprechenden Eintrag in Tab. 3.1 und die Numerierung im Text.

gen auf die Nukleosynthese, insbesondere zu einer zu hohen ${}^4\text{He}$ -Häufigkeit [67, 15, 70].

3. Die nach der Nukleosynthese produzierten Photonen können außerdem das kurz zuvor erzeugte *Deuterium* wieder *dissoziieren*; zu viele (von PBHs emittierte) Photonen stehen somit im Widerspruch zur vom Urknallmodell richtig vorhergesagten heute beobachteten Deuterium-Häufigkeit [50].

4. Zum entgegengesetzten Effekt führen von PBHs ausgesandte (Anti-)neutronen: Neben den unter 2. beschriebenen Auswirkungen können sie das während der Nukleosynthese schon erzeugte *Helium* in zwei Deuteriumkerne *spalten* und somit zu einer höheren als der heute beobachteten Deuterium-Dichte führen [67, 77, 70, 15].

5. Wenn direkt nach der Baryogenese viele Photonen emittiert werden, beeinflusst dies das Verhältnis von Photonen zu Baryonen im Universum oder, was auf dasselbe hinausläuft, die *Entropie pro Baryon*. Mehr Photonen während der Nukleosynthese führen u. a. zu einer zu hohen Helium- und zu einer zu niedrigen Deuterium-Häufigkeit [54, 71, 15].

6. Die Photonen der zerstrahlenden PBHs sollten zum heute beobachteten γ -Strahlen-Hintergrund beitragen. Es zeigt sich, daß die stärksten Einschränkungen aus der Betrachtung von 100 MeV Photonen und PBHs der

ursprünglichen Masse $m_{PBH} \approx 5 \cdot 10^{14}$ g resultieren, also erwartungsgemäß gerade diejenigen PBHs, die heute explodieren [25, 52, 19, 15]. Der in Tabelle 3.1 genannte Wert entspricht der Forderung $\Omega_{PBH,0} < 10^{-8}$ für die heutige relative PBH-Massendichte.

Abgesehen von den bisher genannten Punkten wird auch direkt nach γ -Strahlen-bursts gesucht, die die Charakteristik explodierender schwarzer Löcher aufweisen. Auch wenn sich hieraus bisher noch nicht eindeutig stärkere Einschränkungen als die unter Punkt 6 genannten ergeben haben [15, 25, 20], scheint dies für zukünftige Experimente durchaus möglich zu sein [25].

Eine weitere Möglichkeit, die Einschränkungen für heute explodierende PBHs zu verschärfen ergibt sich daraus, die *Emission anderer Teilchen* als Photonen zu betrachten. Für Positronen (und den Fall geclusterter PBHs) erwartet man dann beispielsweise eine bis zu zwei Größenordnungen stärkere Einschränkung als die unter Punkt 6 genannte [15], während die alleinige Betrachtung von Neutrinos eher schwächere Bedingungen liefert [10]. Im allgemeinen ergeben sich jedoch keine wesentlich anderen Ergebnisse als die unter 6. genannten [52].

Schließlich kann man noch den Beitrag der von PBHs emittierten Photonen zur *3K-Hintergrundstrahlung* betrachten, was aber keine stärkeren als die bereits genannten Einschränkungen liefert [60, 15]¹³.

Die bisherigen Punkte beziehen sich auf sehr kleine PBH-Massen und haben wegen der noch ausstehenden experimentellen Überprüfung der Hawking-Strahlung einen gewissen spekulativen Charakter. Demgegenüber bezieht sich die gravitative Einschränkung (letzter Punkt in Tabelle 3.1) auf alle heute noch vorhandenen PBHs und rührt lediglich aus der Forderung, daß die Masse aller PBHs nicht die *Gesamtmasse des heutigen Universums* übersteigen darf:

$$\Omega_{PBH,0} < 1. \quad (3.40)$$

Unter der Voraussetzung, daß sich PBHs ähnlich wie die sichtbare Materie zu Clustern zusammenschliessen, kann diese Bedingung nach [14] sogar auf $\Omega_{PBH,0} < 0.04$ verschärft werden. Mit Hilfe von Gl. (3.38) kann obige Bedingung nun als Bedingung an den ursprünglichen Massenanteil von PBHs ausgedrückt werden. Setzt man $\Omega_r \approx 1$ für die hier betrachteten frühen

¹³Möchte man die unter Punkt 1.) genannten Strahlungsrelikte außer acht lassen, so ist jedoch die daraus resultierende Einschränkung für Massen $\lesssim 10^9$ g von Interesse: $\alpha < 10^{-4} \frac{10^9 \text{ g}}{M}$. Derartig früh emittierte Photonen sind heute bereits vollständig thermalisiert und tragen somit einfach zu einer höheren Photonendichte der 3K-Hintergrundstrahlung bei, ohne diese zu stören.

Zeiten $t \ll t_{eq}$ und nimmt $a(t) \propto t^{\frac{1}{2}}$ für die Zeitentwicklung des Skalenfaktors bis zum Zeitpunkt t_{eq} an, so ergibt sich mit $M_H \propto t$ (1.21) und $t_{eq} = 4.36 \cdot 10^{10} \text{ s } (\Omega_{m,0} h^2)^{-2} \cdot \left(\frac{2.73}{2.76}\right)^6$ [39] die folgende Bedingung an die ursprüngliche PBH-Dichte im Universum¹⁴:

$$\Omega_{PBH, M_H} \lesssim 8 \times 10^{-18} \left(\frac{M_H}{10^{15} \text{ g}} \right)^{\frac{1}{2}} h^2. \quad (3.41)$$

Diese Bedingung gilt nur für $M_H \gtrsim 10^{15} \text{ g}$, da kleinere PBHs bis zum heutigen Tag bereits zerstrahlt sind.

Eine weitere interessante prinzipielle Möglichkeit besteht darin, schwere PBHs ($m_{PBH} \gtrsim 10^{29} \text{ g}$) durch *Gravitationslinseneffekte* nachzuweisen [14, 15, 43]. Ein möglicher Kandidat für die dunkle Materie im Universum sind nämlich sogenannte MACHOs¹⁵, die insbesondere auch PBHs sein könnten. Es mehren sich die Hinweise darauf, daß es sich hier vor allem um Objekte in Jupitergröße ($m \sim 10^{30} \text{ g}$) handelt, deren Massendichte heute etwa die gleiche Grössenordnung hat wie die kritische Dichte [30, 29]. Dies ergibt allerdings nur eine deutlich schwächere Einschränkung für den PBH-Anteil als Bedingung (3.40), die für PBHs *aller* Massen größer als 10^{15} g gilt.

Die Anzahl sehr großer PBHs ($m_{PBH} \gtrsim 10^{41}$) ist außerdem durch die heutige *Galaxienanzahl* stark beschränkt, da man davon ausgeht, daß sich um derartige Objekte Galaxien bilden [14].

Wenn man sich nun noch einmal den Ausdruck (3.33) für den anfänglichen PBH-Massenanteil ansieht, so wird aus den in diesem Abschnitt diskutierten Einschränkungen vor allem deutlich, daß für die Amplitude der Dichteschwankungen zu allen Zeiten

$$\sigma_H(t_k) \ll 1 \quad (3.42)$$

gegolten haben muß. Für die stärkste Einschränkung (Punkt 6 in Tabelle 3.1) ergibt sich (wenn man $\delta_{min} = 1/3$ annimmt) $\sigma_H(t_k) \lesssim 0.031$, aber selbst der deutlich schwächere gravitative constraint (3.41) liefert noch $\sigma_H(t_k) \lesssim 0.038$. Damit die hier diskutierten Effekte von PBHs überhaupt von astrophysikalischer Relevanz sind, muß man eine sehr fein abgestimmte Amplitude fordern: Beispielsweise führt das nur geringfügig kleinere $\sigma_H(t_k) \approx 0.02$ schon zu $\beta \sim 10^{-62}$, was um etliche Größenordnungen von dem der Beobachtung

¹⁴Eine etwas genauere Analyse [8] berücksichtigt, daß man bei verschiedenen Temperaturen (d.h. zu unterschiedlichen Zeiten) eigentlich auch eine unterschiedliche Zahl effektiver Freiheitsgrade der die Energiedichte dominierenden Strahlung zu beachten hat. Die Bedingung (3.41) wird dadurch etwa um den Faktor 2.5 abgeschwächt.

¹⁵**MA**ssive **C**ompact **H**alo **O**bjects, die im Halo unserer Milchstraße vermutet werden.

Zugänglichem entfernt ist. Eine geringfügig größere Amplitude $\sigma_H(t_k) \gtrsim 0.04$ auf der anderen Seite hätte eine Überproduktion von PBHs zu Folge, die auf nahezu allen Skalen mit den aus der Beobachtung erhältlichen Einschränkungen kollidiert. Insbesondere folgt hieraus, daß die a priori Wahrscheinlichkeit sehr klein ist, daß PBHs etwa einen entscheidenden Beitrag zur dunklen Materie beitragen könnten.

Kapitel 4

PBHs und Inflation

Wie bereits im ersten Kapitel ausführlich dargestellt, werden die heute beobachteten Strukturen im Universum auf Dichtefluktuationen zurückgeführt, die während der inflationären Phase im frühen Universum erzeugt wurden und deren genaue Form vom konkret verwendeten Inflationsmodell abhängt. Dies betrifft insbesondere auch Dichtefluktuationen auf Skalen, die für die Bildung von PBHs relevant sind. Durch die diversen Bedingungen an die Anzahl- und Massendichte von PBHs im Universum ergibt sich also die Möglichkeit, zunächst Bedingungen an das ursprüngliche Fluktuationsspektrum und damit schließlich auch an das zugrundegelegte Inflationsmodell zu erhalten.

Das Interessante an PBHs ist in diesem Zusammenhang vor allem, daß durch sie Erkenntnisse über die primordialen Dichtefluktuationen auf sehr kleinen Skalen gewonnen werden können. Andere Beobachtungen, wie etwa die der Anisotropie der 3K-Hintergrundstrahlung oder der großräumigen Strukturen im Universum, liefern dagegen nur Informationen über Skalen, die um viele Größenordnungen größer sind.

Neben dem gerade beschriebenen Aspekt hat die Inflation noch eine weitere wichtige Konsequenz für PBHs: Alle PBHs, die vor oder während der inflationären Phase produziert wurden, erfahren – genauso wie beispielsweise die Monopole – eine extrem starke Ausdünnung und tragen daher praktisch nicht mehr zum heutigen Massenspektrum bei. Die Horizontmasse bei Inflationende stellt also eine untere Schranke an die Masse von PBHs dar [16]:

$$m_{PBH} > M_H(T_{RH}) = m_{Pl} \left(\frac{T_{RH}}{T_{Pl}} \right)^{-2} \sim 1 \text{ g.}$$

Eine Übersicht über den Zusammenhang zwischen PBHs und Inflation

gibt beispielsweise [16]; viele weitere Arbeiten haben bereits die Konsequenzen von PBHs für die zugrundeliegenden Fluktuationsspektren untersucht: Sowohl für den Fall von Spektren, die einem einfachen Potenzgesetz folgen [22, 37, 38, 40, 23] als auch für konkrete Inflationsmodelle, die zu komplizierteren Spektren führen, wie z.B. in [23, 3, 41]. Insbesondere besteht in diesem Rahmen auch die Möglichkeit, PBHs als Bestandteil der dunklen Materie zu diskutieren – z.B. in Form etwa jupitergroßer PBHs als mögliche Kandidaten für die schon erwähnten MACHOs [31, 75, 76].

In diesem Teil der Arbeit sollen die wesentlichen Konsequenzen von PBHs für die auf die Inflation zurückzuführenden primordialen Dichtefluktuationen ausführlich diskutiert werden¹. Im ersten Abschnitt wird dazu zunächst erläutert, wie man Fluktuationsspektren für beliebige Zeiten richtig normiert, d.h. auf die heute beobachteten Werte der entsprechenden Größen zurückführt. Dieser Punkt ist insofern besonders entscheidend, als er bisher in der Literatur vernachlässigt wurde – obwohl die Wahl der Normierung, wie noch zu sehen sein wird, das Ergebnis stark beeinflusst.

Als einfachste Möglichkeit für Dichtefluktuationen werden dann im zweiten Abschnitt Potenzgesetz-Spektren diskutiert. Dabei werden die in der Literatur zu findenden Einschränkungen an den Spektralindex – vor allem auf Grund der dort erfolgten Normierungsfehler – korrigiert.

Im dritten Abschnitt schließlich wird untersucht, was sich für Änderungen ergeben, wenn man statt dem skalenfreien Potenzgesetz ein Spektrum verwendet, bei dem eine bestimmte Skala ausgezeichnet ist. Dies geschieht zunächst für ein einfaches Spielzeugmodell, an dem die in diesem Fall grundsätzlich neu auftretenden Aspekte gut studiert werden können, und dann für die sich aus sogenannten *broken scale invariance* (BSI) - Modellen der Inflation ergebenden Spektren.

4.1 Normierung von Fluktuationsspektren

Eine oft zur Beschreibung von Dichtefluktuationen verwendete Größe ist durch den Ausdruck

$$\delta_H^2(k, t) := \frac{(aH)^4}{k^4} \mathcal{P}(k, t) \quad (4.1)$$

gegeben, wobei die Zeitabhängigkeit des Spektrums \mathcal{P} in diesem Kapitel der besseren Übersichtlichkeit halber immer explizit angegeben wird. Die hier eingeführte Größe δ_H ist im wesentlichen gerade das Ende des Abschnittes

¹Eine Zusammenfassung der hier vorgestellten Ergebnisse findet sich zudem in [8, 9].

1.3.1 erwähnte eichinvariate Gravitationspotential Φ :

$$\delta_H^2(k, t) \equiv \frac{2}{9\pi^2} k^3 \Phi^2(k, t). \quad (4.2)$$

Auf Skalen k , die deutlich größer sind als der Horizont, $k \ll aH =: k_t$, ist δ_H zeitlich konstant²,

$$\delta_H(k, t) \stackrel{(1.68)}{\propto} k_t^2 a^2(t) \stackrel{(1.59)}{=} konst., \quad (4.3)$$

und kann daher für diese Skalen in guter Näherung mit dem entsprechenden Wert bei Horizonteintritt

$$\delta_H(k, t) \approx \delta_H(t_k) := \delta_H(k, t_k) = \mathcal{P}(k, t_k) \quad (4.4)$$

gleichgesetzt werden. Ist $\delta_H(t_k)$ konstant, d.h. unabhängig von k , so handelt es sich gerade um das in 1.3.1 vorgestellte sog. skaleninvariante oder Harrison-Zel'dovich-Spektrum.

Die Normierung des Spektrums kann nun durch einen Vergleich mit dem heutigen Wert

$$\delta_H(t_0) \approx 1.9 \times 10^{-5} \quad (4.5)$$

erfolgen, der aus den COBE³-Daten gewonnen wurde.

In Kapitel 3.3 wurde deutlich, daß die Varianz der gemittelten Überdichte bei Horizonteintritt, $\sigma_H^2(t_k)$, die zur Bestimmung der PBH-Massendichte entscheidende Größe ist. Das Ziel dieses Abschnittes ist es daher, $\sigma_H^2(t_k)$ durch $\delta_H^2(t_k)$ auszudrücken, welches man zusammen mit der Normierung (4.5) direkt aus dem jeweils verwendeten Inflationsmodell erhält. Die obere Integrationsgrenze in (3.31) kann dabei durch den Hubble-Radius k_e bei Ende der Inflation ersetzt werden, da dies der kleinsten von der Inflation erzeugten Skala entspricht⁴. Die untere Grenze bleibt hingegen Null, wenn man voraussetzt, daß die Inflation das Horizontproblem löst,

²Man kann sich leicht davon überzeugen, daß dies nicht nur – wie hier gezeigt – für den im folgenden relevanten strahlungsdominierten Fall, sondern ebenso für den materiedominierten Fall gilt.

³Mit dem **COsmic Background Explorer** - Satelliten wurden die Anisotropien der Hintergrundstrahlung aufgezeichnet und (in Abhängigkeit vom betrachteten kosmologischen Modell) auf den heutigen Wert normiert, siehe z.B. [46].

⁴Dazu muß man natürlich fordern, daß es heute keine (noch so kleinen) Strukturen gibt, die *vor* Beginn der Inflation entstanden sind. Dies entspricht aber der üblichen Vorgehensweise, den Anfangszustand des Universums bei Inflationsbeginn (näherungsweise) als Minkowski-Vakuum anzunehmen, was die beobachteten Strukturen bereits zufriedenstellend erklären kann.

also die Existenz von Strukturen auf (beliebig) großen Skalen erklären kann. Man erhält dann

$$\begin{aligned}
\sigma_H^2(t_k) &= \int_0^{k_e} W_{TH}^2(k'/k) \mathcal{P}(k', t_k) \frac{dk'}{k'} \\
&= \int_0^{k_e} W_{TH}^2(k'/k) \frac{\mathcal{P}(0, t_k)}{\mathcal{P}(0, t_e)} \mathcal{P}(k', t_e) T^2(k', t_k) \frac{dk'}{k'} \\
&\stackrel{(4.1)}{=} \int_0^{k_e} \frac{\delta_H^2(0, t_k)}{\delta_H^2(0, t_e)} \frac{k_e^4}{k^4} \delta_H^2(k', t_e) \frac{k'^4}{k_e^4} T^2(k', t_k) W_{TH}^2(k'/k) \frac{dk'}{k'} \quad (4.6) \\
&\stackrel{(4.4)}{=} \int_0^{k_e} \frac{k'^4}{k^4} \delta_H^2(t_{k \cdot x}) T^2(k', t_k) W_{TH}^2(k'/k) \frac{dk'}{k'} \\
&= \int_0^{\frac{k_e}{k}} x^3 \delta_H^2(t_{k \cdot x}) T^2(kx, t_k) W_{TH}^2(x) dx.
\end{aligned}$$

Die im zweiten Schritt eingeführte *Transfer-Funktion* $T(k, t)$ ist dabei wie folgt definiert:

$$\mathcal{P}(k', t) =: \frac{\mathcal{P}(0, t)}{\mathcal{P}(0, t_i)} \mathcal{P}(k', t_i) T^2(k', t), \quad T(k \rightarrow 0, t) \rightarrow 1, \quad (4.7)$$

wobei mit t_i eine Zeit bezeichnet ist, zu der alle Skalen noch außerhalb des Horizontes sind. Den obigen Bemerkungen folgend kann man $t_i = t_e$ setzen.

Mit der Transfer-Funktion wird die Entwicklung von Fluktuationen auf Skalen k' innerhalb des Horizontes, $k = aH \leq k' \leq k_e$, beschrieben. Für Skalen außerhalb des Horizontes, $k' \ll k$, nimmt sie dementsprechend den Wert Eins an. Die genaue Form von $T(k, t)$ hängt von den verwendeten kosmologischen Parametern ab, wie z.B. der Zusammensetzung der verschiedenen Anteile der Materie oder dem Wert der kosmologischen Konstante, und muß zumeist numerisch berechnet werden. Eine stark vereinfachte Form von $T(k, t)$ kann jedoch auch direkt angegeben werden. Dazu beachtet man, wie in Kap. 1.3.1 beschrieben, daß im strahlungsdominierten Fall für Moden deutlich außerhalb des Horizontes $|\delta_k| \propto a^2$ gilt, während $|\delta_k|$ für Moden innerhalb des Horizontes nach anfänglichen Oszillationen in etwa konstant bleibt. Wegen $a \propto k^{-1}$ (1.59) gilt demnach für das Leistungsspektrum

$$\mathcal{P}(k', t_k) \propto \begin{cases} (k')^{n+3} k^{-4} & \text{für } k' \ll k \\ (k')^{n-1} & \text{für } k' \gg k \end{cases}, \quad (4.8)$$

und folglich für die Transferfunktion

$$T^2(k', t_k) \approx \begin{cases} 1 & \text{für } k' \leq k \\ \left(\frac{k}{k'}\right)^4 & \text{für } k' > k \end{cases}. \quad (4.9)$$

Die Beziehung (4.6) zwischen den Größen $\sigma_H^2(t_k)$ und $\delta_H^2(t_k)$ ist also sowohl von der Skala k als auch vom vorausgesetzten kosmologischen Modell abhängig.

4.2 Skalenfreie Fluktuationsspektren

4.2.1 Normierung

Für die Dichtefluktuationen wird oft ein einfaches Potenzgesetz der Form $\delta_H^2(t_k) \propto k^{n-1}$ angenommen⁵, das keine Skala besonders auszeichnet. Bezeichnet t_{k_r} bzw. t_{k_m} eine Zeit während der strahlungs- bzw. materiedominierten Phase, jeweils weit entfernt vom Zeitpunkt t_{eq} des Gleichgewichtes, so fordert man genauer gesagt [46]

$$\delta_H^2(t_{k_r}) = \left(\frac{10}{9}\right)^2 \delta_H^2(t_{k_m}) \left(\frac{k_r}{k_m}\right)^{n-1}. \quad (4.10)$$

Eingesetzt in (4.6) ergibt sich daraus für $t_k < t_{eq}$

$$\sigma_H^2(t_k) = \alpha^2(k) \delta_H^2(t_k) \quad (4.11)$$

mit

$$\begin{aligned} \alpha^2(k) &:= \int_0^{\frac{k_e}{k}} dx x^{n+2} T^2(kx, t_k) W_{TH}^2(x) \cdot \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq \frac{k_{eq}}{k} \\ \left(\frac{9}{10}\right)^2 & \text{für } x < \frac{k_{eq}}{k} \end{cases} \\ &\approx \int_0^{\frac{k_e}{k}} dx x^{n+2} T^2(kx, t_k) W_{TH}^2(x), \end{aligned} \quad (4.12)$$

wobei man genau genommen eigentlich keinen abrupten, sondern einen fließenden Übergang zwischen den Vorfaktoren 1 bzw. 0.81 hat. Die letzte Näherung gilt für die im folgenden relevanten kleinen Skalen $k \gg k_{eq}$.

Jede Skala k kann man auch durch die Horizontmasse bei Horizonteintritt dieser Skala beschreiben. Mit $M_H \propto t$ (1.21) und $k := (aH)|_{t_k}$ gilt

$$k \propto M_H(t_k)^{m-1}, \quad (4.13)$$

⁵Der für die PBH-Bildung besonders interessante Fall $n > 1$ wird beispielsweise von sog. *double* oder *hybrid inflation* - Modellen geliefert (siehe z.B. [49]). In diesen Modellen treten *zwei* skalare Felder auf, von denen das eine die Inflation antreibt und das andere für das rechtzeitige Beenden derselben sorgt.

mit $m = \frac{1}{2}$ bzw. $m = \frac{2}{3}$ während der strahlungs- bzw. materiedominierten Phase. Damit läßt sich (4.11) mit Hilfe von (4.10) schließlich für $t_k \ll t_{eq}$ in die folgende Form bringen:

$$\sigma_H^2(t_k) = \frac{100}{81} \alpha^2(k) \delta_H^2(t_0) \left[\frac{M_H(t_0)}{M_H(t_{eq})} \right]^{\frac{n-1}{3}} \left[\frac{M_H(t_{eq})}{M_H(t_k)} \right]^{\frac{n-1}{2}}. \quad (4.14)$$

In der Literatur (siehe z.B. [22, 38]) wurde bisher übersehen, daß der Vorfaktor in (4.11) bzw. (4.14) skalen- (und modell-) abhängig ist. Stattdessen wurde ein konstanter Wert für $\alpha(k)$ benutzt, der dem heutigen Verhältnis zwischen $\sigma_H(t_k)$ und $\delta_H(t_k)$ entspricht:

$$\sigma_H(t_0) \approx 9.5 \cdot 10^{-5} \approx 5 \delta_H(t_0). \quad (4.15)$$

Diese Normierung gilt aber, wie ausführlich diskutiert wurde, nicht für beliebige Skalen, sondern nur für $M_H(t_0) \sim 10^{56}$ g. In der hier verwendeten Notation entspricht sie $\alpha(k) = \alpha(k_0) = \frac{9}{10} \cdot 5 = 4.5$ für *alle* Skalen k .

Nun soll noch kurz der Fehler abgeschätzt werden, der sich daraus für kleine Skalen der Größe $M_H(t_k) \sim 10^{15}$ g ergibt, da dies die Skala ist, für die $\sigma_H(t_k)$ später benötigt wird⁶. Aus (4.12) und der Transferfunktion (4.9) erhält man

$$\alpha^2(10^{15} \text{ g}) \approx \int_0^1 x^{n+2} W_{TH}^2(x) dx + \int_1^{\frac{k_e}{k}} x^{n-2} W_{TH}^2(x) dx \approx 0.8, \quad (4.16)$$

wobei $\frac{k_e}{k} \gg 1$ und $n \sim 1$ verwendet wurde. Für $1 \leq n \leq 1.3$ variiert das Ergebnis dabei nur um etwa 0.06. Vom genauen Wert von $\frac{k_e}{k}$ hängt α hingegen praktisch überhaupt nicht mehr ab, sobald $\frac{k_e}{k} \gtrsim 100$. Damit kann $\alpha(k)$ fast während der gesamten strahlungsdominierten Phase als näherungsweise konstant angesehen werden.

Für Skalen $M_H(t_k) \sim 10^{15}$ g wurde der Wert von $\sigma_H(t_k)$ in der Literatur also bisher etwa um einen Faktor $\frac{4.5}{\sqrt{0.8}} \approx 5$ überschätzt! Diese Zahl gibt allerdings nur eine erste Abschätzung des Fehlers an – für eine genaue Berechnung von $\alpha^2(10^{15} \text{ g})$ müßte auch eine realistischere Transferfunktion als die mit (4.9) vorgenommene grobe Näherung verwendet werden. In diesem Fall sollte man einen etwas höheren Wert für α erwarten, da $|\delta_k|$ sicherlich erst einige Zeit nach Horizonteintritt ($x \gtrsim 1$) als effektiv konstant angesehen werden kann.

⁶Es ist in diesem Zusammenhang wichtig zu bemerken, daß von der Inflation erzeugte Quantenfluktuationen auf Skalen dieser Größenordnung bei Horizonteintritt bereits effektiv als klassische Dichtefluktuationen auffaßbar sind – im Gegensatz etwa zu Fluktuationen auf sehr viel kleineren Skalen [63]. Die in Kapitel 3 beschriebenen Überlegungen zur Entstehung primordialer Schwarzer Löcher sind also ohne Einschränkung anwendbar.

4.2.2 Einschränkungen an den Spektralindex

Von den vielen in Kapitel 3.4 genannten Einschränkungen für die anfängliche PBH-Massendichte soll hier und im folgenden zunächst nur die Forderung (3.41) betrachtet werden, daß die heutige PBH-Dichte nicht die kritische Dichte des Universums übersteigen darf. Da die anfängliche PBH-Dichte $\Omega_{PBH,M} \approx \beta(M)$ für $n > 1$ eine (streng) monoton fallende Funktion ist, erhält man dabei die stärkste Einschränkung für $M_H \sim 10^{15}$ g:

$$\beta(M_H \sim 10^{15} \text{ g}) < 8 \times 10^{-18} h^2. \quad (4.17)$$

Mit dem Ausdruck (3.33) für β läßt sich dies direkt in eine Bedingung an den Spektralindex n des Spektrums (4.14) übersetzen. Um einen Vergleich mit den in der Literatur gefundenen Werten zu ermöglichen, werden dabei zunächst die Parameterwerte

$$\alpha(M_H \sim 10^{15} \text{ g}) = 4.5, \quad \delta_{min} = \frac{1}{3}, \quad h = 0.5 \quad (4.18)$$

verwendet. Damit erhält man die folgende obere Grenze für den Spektralindex:

$$n < n_{max} = 1.27, \quad (4.19)$$

wobei noch $M_H(t_0) \sim 10^{56}$ g und $M_H(t_{eq}) = m_{Pl} \cdot t_{eq} / t_{Pl} \approx 1.7 \cdot 10^{49} h^4$ g [39] verwendet wurde⁷. Dieses Ergebnis unterscheidet sich von $n < 1.31$ [22] und liegt viel dichter an der Bedingung, die diese Autoren aus der Zerstrahlung von PBHs gefunden haben, $n < 1.24$ ⁸. Dies rechtfertigt den Ansatz, sich zunächst nur mit der gravitativen Einschränkung zu beschäftigen – insbesondere, da die Details der Zerstrahlung Schwarzer Löcher bisher noch nicht experimentell überprüft werden konnten und somit einen gewissen spekulativen Status haben.

Wie im vorigen Abschnitt gezeigt wurde, muß man allerdings für α einen deutlich niedrigeren Wert als 4.5 ansetzen. Dies hat eine schwächere Bedingung an den Spektralindex zur Folge. Um einen Eindruck von der Abhängigkeit des Ergebnisses vom verwendeten Wert für α zu bekommen, zeigt Abb.

⁷Das Ergebnis ist aber kaum von der genauen Wahl von $M_H(t_{eq})$ abhängig: Ein um den Faktor 100 größerer oder kleinerer Wert liefert nur eine Änderung der oberen Grenze für den Spektralindex von knapp $\Delta n_{max} \approx 0.005$.

⁸Selbst dieser Wert läßt sich nicht reproduzieren: Betrachtet man beispielsweise die Einschränkung aus der heutigen PBH-Zerstrahlung, $\beta(5 \cdot 10^{14} \text{ g}) \lesssim 10^{-26}$, so ergibt sich $n < 1.26$ – die Resultate aus den verschiedenen Einschränkungen liegen also noch dichter beieinander! Der Fehler in diesem Fall rührt gerade daher, daß in [22] die Änderung der Beziehung (4.13) zwischen k und $M_H(t_k)$ beim Übergang von Strahlungsdominanz zu Materiedominanz nicht berücksichtigt wird.

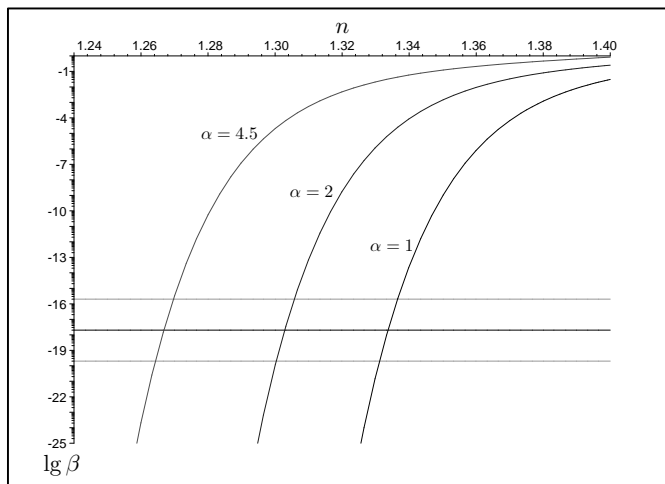


Abb. 4.1: Die Abbildung zeigt $\beta := \beta(M = 10^{15} \text{ g})$ als eine Funktion von n für verschiedene Werte von $\alpha := \alpha(M = 10^{15} \text{ g})$. Die geraden Linien stellen die Bedingung (4.17) dar, die sich aus der gravitativen Wirkung von PBHs heute ergibt, sowie dieselbe Bedingung um einen Faktor 100 abgeschwächt bzw. verstärkt. Man sieht deutlich, daß der maximal zulässige Wert für den Spektralindex nur sehr schwach von dem genauen Wert dieser Bedingung abhängt, ziemlich stark dagegen von dem Wert für α . Das in der Literatur verwendete $\alpha = 4.5$ überschätzt die anfängliche PBH-Massendichte um etliche Größenordnungen und führt zu einer viel niedrigeren oberen Grenze $n_{max} = 1.27$ für den Spektralindex als man für den realistischeren Fall $\alpha \approx 1$ erwarten würde (nämlich $n_{max} \approx 1.33$).

4.1 die Einschränkung (4.17) zusammen mit der Größe β , ausgewertet bei $M_H \sim 10^{15} \text{ g}$, als Funktion von n . Im Extremfall (d.h. bei $\alpha \approx 0.8$) schwächt sich das oben gefundene Ergebnis auf $n \lesssim 1.34$ ab.

Auf der anderen Seite erkennt man anhand dieser Abbildung deutlich, daß der genaue Wert der rechten Seite von Bedingung (4.17) kaum einen Einfluß auf das Ergebnis hat: eine um den Faktor 100 stärkere oder schwächere Bedingung verändert die obere Grenze nur um etwa $\Delta n_{max} \approx 0.003$. Damit verändert auch die in [8] verwendete Entsprechung von Bedingung (4.17) nichts am Ergebnis, die um den Faktor 2 schwächer ist und dadurch zu berücksichtigen versucht, daß die effektive Zahl der Freiheitsgrade während der strahlungsdominierten Phase nicht konstant war. Der genaue Wert von h ist aus denselben Gründen ebenfalls nicht entscheidend.

Es ist außerdem interessant, die Abhängigkeit von (4.19) vom verwendeten Wert $M_H(t_k)$ (d.h. von der minimalen Massenskala, für die Bedingung (3.41) angewandt wird) zu betrachten: ein um den Faktor 10 größerer oder kleinerer Wert führt jeweils lediglich zu einer Änderung der oberen Schranke von n um weniger als 0.01. Für die Motivation, eine solche Abhängigkeit überhaupt zu untersuchen, lassen sich zwei Gründe angeben: Zum einen wird damit die Tatsache berücksichtigt, daß die Details der Zerstrahlung Schwarzer Löcher noch nicht vollständig verstanden sind und daher die minimale Masse von PBHs, die bis heute noch nicht zerstrahlt sind, mit einer gewissen Unsicherheit behaftet ist⁹. Zum anderen kann so dem Umstand Rechnung getragen werden, daß die Masse von PBHs möglicherweise kleiner als die Horizontmasse ist: Falls $m_{PBH} = \epsilon M_H$, $\epsilon < 1$, so wird die minimale Masse, für die Bedingung (3.41) anwendbar ist, gerade zu $M_H = \epsilon^{-1} \cdot 10^{15}$ g. Die semianalytischen Überlegungen des Abschnittes 3.2 beispielsweise haben zu $\epsilon = f^{\frac{3}{2}}$ geführt, was in dem hier betrachteten strahlungsdominierten Fall ($f = \frac{1}{3}$) eine Abschwächung der Bedingung (4.19) um nur etwa 0.005 zur Folge hätte. Aber selbst $\epsilon = 0.001$ gibt nur eine Abschwächung um etwa $\Delta n_{max} = 0.02$. Ein ähnlicher Effekt ist auch zu erwarten, wenn man die kompliziertere Beziehung (3.25) zwischen PBH-Masse und Horizontmasse berücksichtigt¹⁰.

Die Abhängigkeit des Ergebnisses (4.19) von δ_{min} ist in Abb. 4.2 dargestellt. Wie aufgrund des Ausdrucks (3.33) zu erwarten, ist diese Abhängigkeit ziemlich stark. Ein höherer Wert für δ_{min} , wie er aus den in Abschnitt 3.2 zitierten numerischen Ergebnissen zu erwarten ist, führt zu einer deutlichen Abschwächung der Bedingung an n . Setzt man die viel plausibleren Werte

$$\alpha(M_H \sim 10^{15} \text{ g}) \approx 1, \quad \delta_{min} \approx 0.7 \quad (4.20)$$

ein und läßt alle übrigen Parameter unverändert, so ergibt sich insgesamt als realistische Bedingung an den Spektralindex

$$n \lesssim 1.37. \quad (4.21)$$

Abschließend sollte noch einmal festgehalten werden, daß für n eine sehr genaue Feinabstimmung nötig ist, damit PBHs überhaupt kosmologische

⁹Dies gilt insbesondere, da man eigentlich die Massenzunahme durch Akkretion und die Massenabnahme durch Strahlung nicht völlig getrennt voneinander betrachten darf, wie dies bisher geschehen ist.

¹⁰Beispielsweise finden [56] in ihren numerischen Simulationen, daß ϵ (abhängig von verschiedenen Parametern) etwa im Bereich 0.01 bis 0.06 liegt. Auch die Ergebnisse von [23] bestätigen, daß für den Fall eines Spektrums der Form (4.14) die Annahme $m_{PBH} \sim M_H$ eine gute Näherung ist.

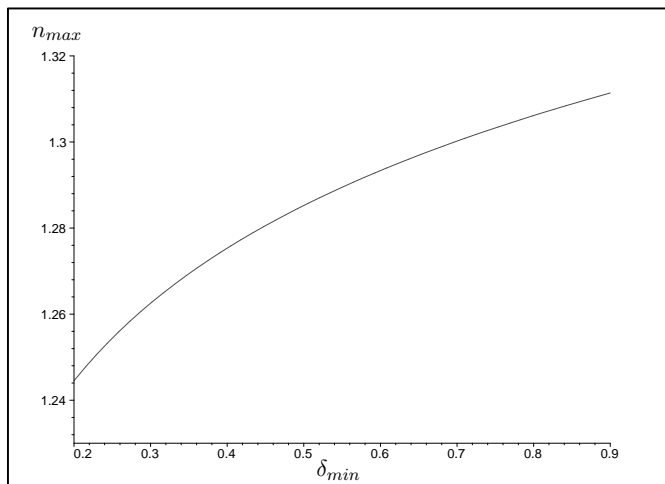


Abb. 4.2: Abhängigkeit der oberen Grenze für den Spektralindex von δ_{min} (bei skalenfreiem Spektrum mit $h = 0.5$, $M_H = 10^{15}$ g, $\alpha(M_H) = 4.5$). Für größere Werte von δ_{min} wird die Einschränkung an n offensichtlich deutlich abgeschwächt.

Relevanz haben – insbesondere werden bei einem skaleninvarianten ($n = 1$) Spektrum praktisch gar keine PBHs produziert. Dies ist sehr deutlich aus Abb. 4.1 zu sehen und auf die schon am Ende von Kapitel 3 diskutierte nötige Feinabstimmung von $\sigma_H(t_k)$ zurückzuführen. Selbst wenn eine solche Feinabstimmung a priori natürlich extrem unwahrscheinlich ist, liefern PBHs jedoch offensichtlich eine Einschränkung an den Spektralindex, die selbst in der abgeschwächten Form (4.21) nicht sehr viel schwächer ist als das Ergebnis der aktuellsten verfügbaren Daten aus anderen Quellen¹¹. Zudem bezieht sich die aus PBHs gewonnene Einschränkung auf derartig kleine Skalen, wie sie mit anderen Methoden wohl kaum jemals ohne weiteres zugänglich sein werden: Skalen mit der hier betrachteten Horizontmasse $M_H(t_k) \sim 10^{15}$ g sind heute unter einem Winkel von nur $\varphi \approx \varphi_0 \frac{k_0}{k} \stackrel{(4.13)}{\approx} \pi \left(\frac{M_H(t_k)}{M_H(t_k)} \right)^{1/2} \sim 10^{-20}$ zu sehen (zum Vergleich: die bisher beste Winkelauflösung aus der direkten Beobachtung von Anisotropien wird von COBE erreicht und liegt bei Multipolen von $l \approx \frac{\pi}{\varphi} \sim 10^3$).

¹¹Die kombinierten Daten aus der Betrachtung der Anisotropie der Hintergrundstrahlung, der großräumigen Strukturverteilung im Universum sowie entfernter Supernovae vom Typ Ia liefert (bei einem 1σ -Fehler) $n = 1.03 \pm 0.1$ [57].

4.3 Gebrochene Skaleninvarianz

4.3.1 Skalenfreie Spektren mit Stufe

Eine einfache Erweiterung des skalenfreien Spektrums (4.14) besteht in der Einführung einer charakteristischen Skala k_s , so daß der Wert von $\sigma_H(t_k)$ auf kleineren Skalen (d.h. $k \geq k_s$) gerade p^{-1} mal den Wert im Falle des skalenfreien Spektrums beträgt, wobei p und k_s frei zu wählende Parameter sind:

$$\sigma_H^2(t_k) = \frac{100}{81} \alpha^2(k) \delta_H^2(t_0) \left[\frac{M_H(t_0)}{M_H(t_{eq})} \right]^{\frac{n-1}{3}} \left[\frac{M_H(t_{eq})}{M_H(t_k)} \right]^{\frac{n-1}{2}} \cdot \begin{cases} 1 & \text{für } k < k_s \\ p^{-2} & \text{für } k \geq k_s \end{cases} \quad (4.22)$$

Alternativ kann man eine solche Stufe auch direkt für die Größe $\delta_H(t_k)$ selbst ansetzen:

$$\delta_{H,step}^2(t_k) = \left(\frac{10}{9} \right)^2 \delta_H^2(t_0) \left(\frac{k}{k_0} \right)^{n-1} \cdot \begin{cases} 1 & \text{für } k < k_s \\ p^{-2} & \text{für } k \geq k_s \end{cases} \quad (4.23)$$

Eingesetzt in (4.6) ergibt sich damit für die Varianz der Fluktuationen bei Horizonteintritt

$$\sigma_{H,step}^2(t_k) = \frac{100}{81} \alpha_{step}^2(k) \delta_H^2(t_0) \left[\frac{M_H(t_0)}{M_H(t_{eq})} \right]^{\frac{n-1}{3}} \left[\frac{M_H(t_{eq})}{M_H(t_{k_s})} \right]^{\frac{n-1}{2}}, \quad (4.24)$$

also die gleiche Form wie beim skalenfreien Spektrum (4.14), diesmal allerdings mit

$$\begin{aligned} \alpha_{step}^2(k) := & \int_0^{\frac{k_s}{k}} x^{n+2} T^2(kx, t_k) W_{TH}^2(x) dx \\ & + p^{-2} \int_{\frac{k_s}{k}}^{\frac{k_e}{k}} x^{n+2} T^2(kx, t_k) W_{TH}^2(x) dx. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Für $k \ll k_s$ und $k \gg k_s$ sind die Spektren (4.22) und (4.24) identisch, für $k_s \rightarrow 0$ und $k_s \rightarrow \infty$ gehen sie wie zu erwarten in das skalenfreie Spektrum (4.14) über (mit jeweils unterschiedlichen Normierungsfaktoren). Motiviert sind diese Ansätze durch das in 4.3.2 vorgestellte BSI-Modell, das ebenfalls durch zwei zusätzliche freie Parameter gekennzeichnet ist, die eine ganz ähnliche Rolle wie hier einnehmen. An diesen sehr einfachen Modellen soll nun beispielhaft untersucht werden, was für neue Effekte im Vergleich zum skalenfreien Fall auftreten können.

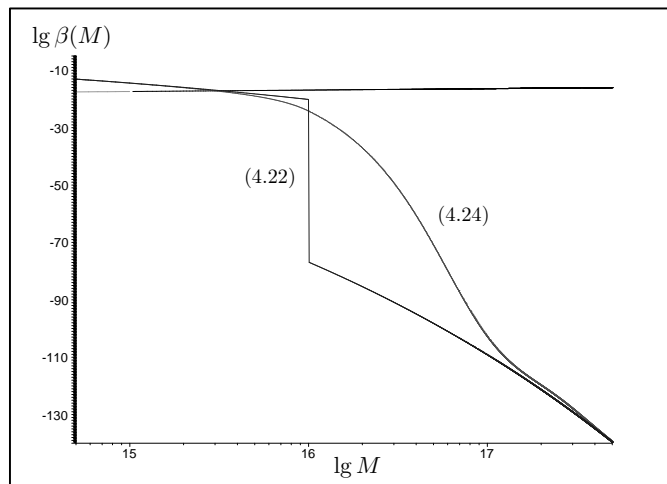


Abb. 4.3: Diese Abbildung zeigt $\beta(M)$ für die Spektren (4.22) und (4.24), mit den (willkürlich gewählten) Parameterwerten $n = 1.31$, $p = 0.5$ und $M_H(t_{k_s}) = 10^{16}$ g. Die gerade Linie repräsentiert die nur für $M \gtrsim 10^{15}$ g gültige gravitative Bedingung (3.41). Man erkennt deutlich, daß diese Bedingung bei 10^{15} g ausgewertet werden muß und das Ergebnis (für $k_s \gtrsim 10^{15}$ g) nicht von der Wahl von k_s abhängt.

Um die verschiedenen Fälle von Spektren mit einer ausgezeichneten Skala besser miteinander vergleichen zu können, wird für die Größe $\alpha(k)$ im folgenden jeweils der volle Ausdruck verwendet und mit Hilfe der einfachen Transferfunktion (4.9) berechnet. Für die kritische Überdichte wird aber weiterhin wie in der Literatur bisher üblich $\delta_{min} = \frac{1}{3}$ gesetzt. Für den skalenfreien Fall führt diese Herangehensweise zu $n_{max} \approx 1.34$. Desweiteren soll hier, wie auch schon in [8], nur der Fall $p \leq 1$ betrachtet werden, also der Fall *stärkerer* Fluktuationen auf kleinen Skalen $k \geq k_s$. Dies ist der physikalisch interessantere Fall, da man dann mit einer größeren Anzahl primordialer Schwarzer Löcher rechnen kann. Außerdem ist $\sigma_H(t_k)$ und damit auch $\beta(M_H(t_k))$ ansonsten keine monoton fallende Funktion der Masse mehr – womit die Interpretation von $\beta(M)$ als Massenanteil aller PBHs mit Masse $m_{PBH} \gtrsim M$ scheitern würde. Dies ist auf die in Kapitel (3.3) beschriebenen Schwierigkeiten des zugrundeliegenden Press-Schechter-Formalismus zurückzuführen. Für Spektren mit $p > 1$ müßte man also einen deutlich verbesserten Formalismus zugrundelegen, der auch Spektren behandeln kann, bei denen $\sigma_H(t_k)$ nicht zwangsläufig zu größeren Skalen hin abnimmt.

Im Gegensatz zum skalenfreien Fall hat man hier *drei* freie Parameter – n , p und k_s (bzw. $M_H(t_{k_s})$) – zu bestimmen und dafür nur *eine* einschränkende Ungleichung (3.41) zur Verfügung. Allgemein müßte man als Lösung also einen Halbraum im Parameterraum erwarten. Da aber die Einschränkung (3.41) eine steigende und $\beta(M)$ eine fallende Funktion der Masse ist, erhält man die stärkste Einschränkung nach wie vor für $M_H \sim 10^{15}$ g. So lange $M_H(t_{k_s}) > 10^{15}$ g gilt ($M_H(t_{k_s}) \gtrsim 5 \cdot 10^{15}$ g im Falle des Spektrums (4.24)), hängt $\beta(M \sim 10^{15}$ g) außerdem gar nicht von der genauen Wahl von k_s ab¹² und man erwartet daher als Ergebnis (entgegen der ursprünglichen Intuition) eine funktionale Abhängigkeit zwischen n_{max} und p . Abb. 4.3 veranschaulicht dies noch einmal. Man erkennt auch, daß für $M_H(t_{k_s}) \lesssim 10^{15}$ g bzw. $M_H(t_{k_s}) \lesssim 10^{14}$ alleine mit der hier betrachteten Bedingung (3.41) offensichtlich keine Einschränkung der Höhe der Stufe gewonnen werden kann.

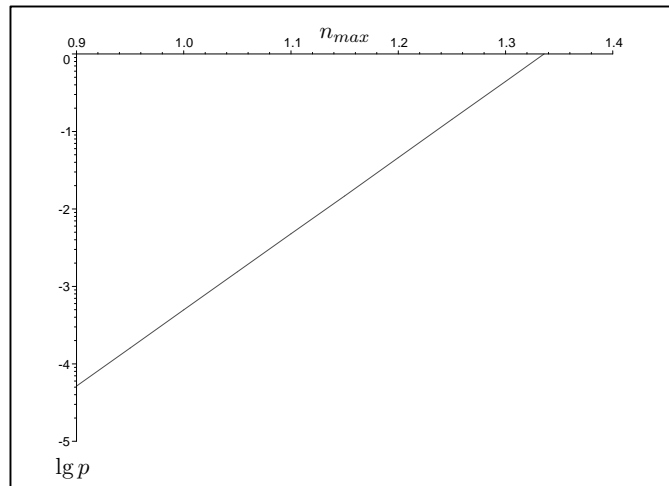


Abb. 4.4: Abhängigkeit des maximal zulässigen Spektralindex n_{max} von p für die Spektren (4.22) und (4.24) und $M_H(t_{k_s}) \gtrsim 10^{15}$ g. Für $p = 1$ ergibt sich wieder das Ergebnis des skalenfreien Falls, während die Einschränkung an n für $p < 1$ deutlich verschärft wird.

Setzt man nun zunächst das einfache Spektrum (4.22) in die Definition (3.33) von β ein, benutzt wieder die Einschränkung (4.17) und löst

¹²Dies gilt natürlich nur, solange man ausschließlich die gravitative Einschränkung (3.41) berücksichtigt. Die übrigen in Abschnitt 3.4 beschriebenen Einschränkungen geben sehr wohl Auskünfte über kleinere Skalen.

nach n auf, so erhält man $n_{max}(p)$ wie in Abb. 4.4 dargestellt. Für $p = 1$ findet man erwartungsgemäß wieder das Ergebnis des skalenfreien Falles, $n_{max} \approx 1.34$. Für kleinere Werte von p kann diese Bedingung dagegen deutlich verschärft werden: Zum Beispiel ergibt sich aus $p = 0.001$ für den Spektralindex eine obere Grenze von $n_{max} \approx 1.03$! In diesem Fall ergäben sich also deutlich stärkere Einschränkungen an n als momentan aus der Anisotropie der Hintergrundstrahlung zu erhalten sind. Dieses Ergebnis läßt sich umgekehrt aber auch wie folgt formulieren: Falls auf irgendeine (andere) Weise $n > 1.03$ gefunden wird, so folgt aus der Betrachtung von PBHs, daß die Stufe im Spektrum nicht beliebig groß sein kann, sondern $p > 0.001$ gelten muß.

Falls p so klein ist, daß $n \lesssim 1$ resultiert, so müssen die in Abb. 4.4 gezeigten Ergebnisse noch etwas genauer diskutiert werden. Dann trifft nämlich nicht mehr die für die Interpretation von $\beta(M)$ nötige Voraussetzung zu, daß das zugehörige Spektrum überall eine schnell mit der Masse abfallende Funktion ist. Für $n < 1$ steigt sie sogar beidseits der Stufe an. Die in der Abbildung gezeigte Abhängigkeit ist also streng genommen nur gültig, wenn die Stufe $M_H(t_{k_s})$ nur wenig höher liegt als bei 10^{15} g, wo die Bedingung (4.17) ausgewertet wird – denn dann gilt die Voraussetzung weiterhin. Andernfalls (d.h. für $M_H(t_{k_s}) \gg 10^{15}$ g) unterschätzt $\beta(10^{15}$ g) die tatsächliche PBH-Anzahl der Masse $m_{PBH} \gtrsim 10^{15}$ g unter Umständen signifikant. Die obere Grenze n_{max} für den Spektralindex muß dann entsprechend noch weiter nach unten korrigiert werden.

Nun soll das Spektrum (4.24) betrachtet werden. An der Abbildung 4.3 sieht man deutlich, daß hierbei für $M_H(t_{k_s}) \gtrsim 5 \cdot 10^{15}$ g dieselben Resultate wie für das soeben diskutierte Spektrum (4.22) zu erwarten sind. Liegt die Stufe dagegen bei 10^{14} g $\lesssim M_H(t_{k_s}) \lesssim 10^{15}$ g, so ist die obere Grenze für n im Falle des Spektrums (4.24) gegeben durch eine Interpolation zwischen $n_{max} \approx 1.34$ (bei $M_H(t_{k_s}) \approx 10^{14}$ g, dies entspricht dem Fall $p \equiv 1$) und $n_{max}(p)$ wie in Abbildung 4.3 dargestellt (bei $M_H(t_{k_s}) \approx 10^{15}$ g). Liegt die Stufe bei 10^{15} g $\lesssim M_H(t_{k_s}) \lesssim 5 \cdot 10^{15}$ g so werden bei einem Spektrum der Form (4.24) etwas weniger PBHs produziert und die Einschränkung an n fällt folglich leicht schwächer aus als im Falle einer Stufe in $\sigma_H(t_k)$ selbst.

Mit der hier durchgeführten Analyse erfährt man – wie gesehen – leider nichts über die Skala k_s , bei der die Stufe liegt. Dazu bräuchte man weitere Einschränkungen im Massenbereich $M > 10^{15}$ g, wie sie z.B. aus der Beobachtung der in Kap. 3.4 erwähnten MACHOs kommen könnten.

4.3.2 Spektren aus BSI-Inflationsmodellen

In diesem Abschnitt sollen sogenannte BSI¹³-Inflationsmodelle untersucht werden, bei denen die Ableitung des Inflaton-Potentials $V'(\Phi)$ eine Sprungstelle aufweist. Starobinsky zeigte, daß sich die aus einem solchen Inflationsmodell resultierenden Fluktuationen exakt angeben lassen [69]. Dabei wird eine Skalenabhängigkeit auf das ursprüngliche Spektrum aufgeprägt, die nur vom Ort der Sprungstelle und vom Verhältnis der beidseitigen Ableitungen abhängt. Für den von den meisten Inflationsmodellen favorisierten skaleninvarianten Fall ergibt sich für die primordialen Fluktuationen in einem solchen BSI-Modell das folgende Spektrum:

$$\delta_H^2(t_k) = \left(1 - \frac{H}{a} \int_0^t a dt'\right)_{t=t_k}^2 \cdot \frac{81\pi^2 H_s^6}{4A_-^2} F(k), \quad (4.26)$$

mit

$$\begin{aligned} F(k) = & 1 - 3(p-1)\frac{1}{y} \left(\left(1 - \frac{1}{y^2}\right) \sin 2y + \frac{2}{y} \cos 2y \right) \\ & + \frac{9}{2}(p-1)^2 \frac{1}{y^2} \left(1 + \frac{1}{y^2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{y^2} + \left(1 - \frac{1}{y^2}\right) \cos 2y - \frac{2}{y} \sin 2y\right) \end{aligned} \quad (4.27)$$

und

$$y = \frac{k}{k_s}, \quad p = \frac{A_-}{A_+}, \quad H_s^2 = \frac{8\pi G V_s}{3},$$

wobei A_- , A_+ die Ableitungen des Inflaton-Potentials auf beiden Seiten der Sprungstelle darstellen. Dieses Spektrum ist in Abb. 4.5 dargestellt und entspricht für $k \ll k_s$ und $k \gg k_s$ den im letzten Abschnitt diskutierten Spektren. Insbesondere ist die Form des Spektrums unabhängig von k_s , das wie im vorherigen Abschnitt nur den Ort der Stufe festlegt, und es gilt

$$\begin{aligned} F(k=0) &= p^2 \\ F(k=\infty) &= 1. \end{aligned} \quad (4.28)$$

In der Nähe von k_s weist dieses Spektrum jedoch im Unterschied zu den bisher Betrachteten starke Oszillationen, also eine deutlich reichere Struktur auf. Kosmologische Modelle mit einem zugrundeliegenden Fluktuationsspektrum der Form (4.26) lassen sich erstaunlich gut an die aus der Beobachtung stammenden Anforderungen anpassen [42].

¹³Broken Scale Invariant.

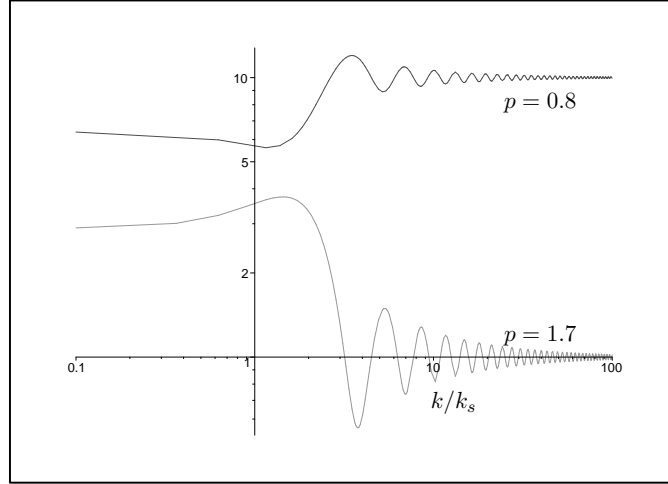


Abb. 4.5: Das von Starobinsky analysierte BSI-Spektrum für $p < 1$ und $p > 1$. Dargestellt ist in beiden Fällen die Funktion $F(k)$, im ersten Fall aber noch zusätzlich mit einem Faktor 10 multipliziert.

Man kann das BSI-Spektrum (4.26) auch auf den heutigen Wert von $\delta_H(t_0) \approx 1.9 \times 10^{-5}$ (4.5) beziehen und dadurch die Normierung festlegen: Mit Hilfe von (4.28) und

$$\left(1 - \frac{H}{a} \int_0^t a dt'\right)_{t=t_k}^2 = \begin{cases} 4/9 & \text{für } t_k \ll t_{eq} \\ 9/25 & \text{für } t_k \gg t_{eq} \end{cases} \quad (4.29)$$

findet man schließlich für $t_k \ll t_{eq}$

$$\delta_H^2(t_k) = \frac{100}{81} p^{-2} \delta_H^2(t_0) F(k). \quad (4.30)$$

Für die Varianz der Fluktuationen bei Horizonteintritt folgt damit aus (4.6)

$$\sigma_H^2(t_k) = \frac{100}{81} p^{-2} \delta_H^2(t_0) \int_0^{\frac{k_e}{k}} F(kx) x^3 T^2(kx, t_k) W_{TH}^2(x) dx, \quad (4.31)$$

was im Vergleich mit den bisher betrachteten Spektren $n = 1$ und

$$\alpha^2(k) = p^{-2} \int_0^{\frac{k_e}{k}} F(kx) x^3 T^2(kx, t_k) W_{TH}^2(x) dx \quad (4.32)$$

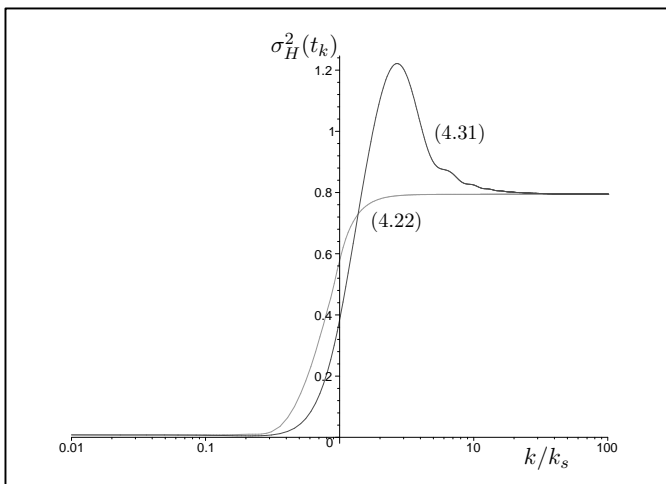


Abb. 4.6: Diese Abbildung zeigt $\sigma_H(t_k)$ für die skalenabhängigen Spektren (4.24) und (4.31), jeweils mit $n = 1$ und $p = 0.1$. Als Normierung wurde dabei der besseren Übersichtlichkeit wegen $\frac{10}{9}\delta_H(t_0) \equiv 1$ gesetzt.

entspricht. Abb. 4.6 zeigt $\sigma_H^2(t_k)$ für die Spektren (4.31) und (4.24), mit $n = 1$. Die reiche Struktur des BSI-Spektrums ist aufgrund des Filterns offenbar nahezu vollständig verloren gegangen. Es ist aber ein deutlicher Peak zu sehen, der in den zuvor betrachteten Spektren nicht aufgetreten ist. Er liegt nicht genau bei k_s selbst, sondern auf einer etwas kleineren Skala $k_{peak} \approx 2k_s$.

Dieser Peak bleibt natürlich, wie in Abbildung 4.7 dargestellt, auch noch in $\beta(M_H(t_{k_s}))$ bestehen. Damit scheitert eine naive Anwendung des Press-Schechter-Formalismus, die $\beta(M_H)$ auch in einem solchen Fall als anfängliche Massendichte aller PBHs mit Masse $m_{PBH} \geq M_H$ interpretieren würde. Da $\beta(M)$ auf beiden Seiten des Peaks schnell abfällt, kann man aber davon ausgehen, daß praktisch alle Schwarzen Löcher mit einer Masse $M_{peak} \approx 0.2M_H(t_{k_s})$ gebildet werden. Für $M_H(t_{k_s}) > M_{peak}$ soll daher im folgenden die bisherige Interpretation von $\beta(M_H)$ beibehalten werden, während für $M_H(t_{k_s}) < M_{peak}$ angenommen wird, daß $\beta(M_{peak})$ die anfängliche Massendichte von PBHs mit Masse $m_{PBH} \geq M_H(t_{k_s})$ angibt.

Für $M_{peak} > 10^{15}$ g lautet die Bedingung (4.17) also dementsprechend

$$\beta(M_{peak}) < 4 \times 10^{-18}, \quad (4.33)$$

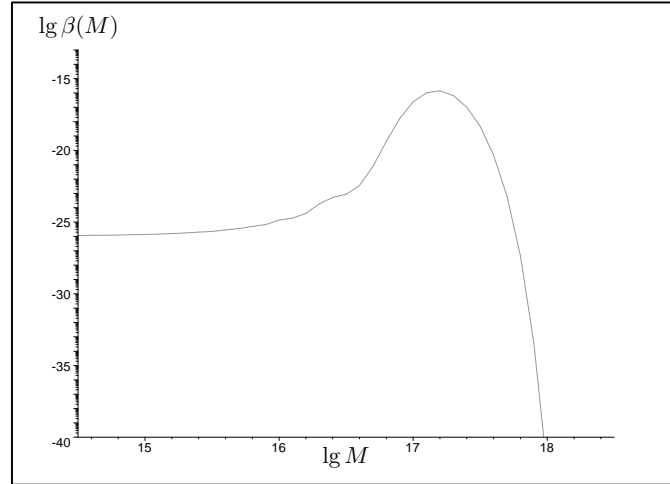


Abb. 4.7: $\beta(M_H)$ für das BSI-Spektrum (4.31), mit $M_H(t_{k_s}) = 10^{18}$ g und $p = 6 \cdot 10^{-4}$.

was

$$p > 6.4 \times 10^{-4} \quad (4.34)$$

zur Folge hat, wenn man das Spektrum (4.31) einsetzt. Dieses Ergebnis sollte mit dem Fall einer einfachen Stufe in δ_H bzw. σ_H verglichen werden: Dort erhält man $p > 5.0 \times 10^{-4}$ für $n = 1$, also wie erwartet eine etwas schwächere Einschränkung der erlaubten Höhe der Stufe.

Schließlich kann man auch noch den Fall $n \neq 1$ für das BSI Spektrum betrachten, d.h. als zugrundeliegendes Spektrum nicht ein skaleninvariantes sondern ein Potenzgesetz-Spektrum annehmen. Dann erhält man statt (4.30) für $t_k \ll t_{eq}$

$$\delta_{H,BSI}^2(t_k) = \frac{100}{81} p^{-2} \delta_H^2(t_0) F(k) \left(\frac{k}{k_0} \right)^{n-1}. \quad (4.35)$$

Unter Benutzung von (4.6) läßt sich damit die Varianz der Fluktuationen bei Horizonteintritt wieder auf die Form

$$\sigma_{H,BSI}^2(t_k) = \frac{100}{81} \alpha_{BSI}^2(k) \delta_H^2(t_0) \left[\frac{M_H(t_0)}{M_H(t_{eq})} \right]^{\frac{n-1}{3}} \left[\frac{M_H(t_{eq})}{M_H(t_{k_s})} \right]^{\frac{n-1}{2}} \quad (4.36)$$

bringen, wobei die Größe $\alpha(k)$ nun allerdings durch

$$\alpha_{BSI}^2(k) = p^{-2} \int_0^{\frac{k_e}{k}} F(kx) x^{n+2} T^2(kx, t_k) W_{TH}^2(x) dx \quad (4.37)$$

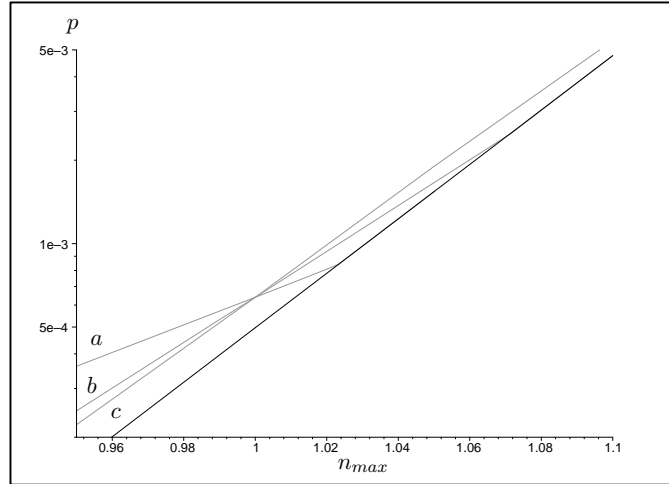


Abb. 4.8: n_{max} als Funktion von p für das BSI-Spektrum (4.36) und verschiedenen Werten für die betrachtete Skala $M_H(t_{k_s})$. Die mit einem “a” (b, c) markierte Kurve entspricht $M_H(t_{k_s}) = 10^{35}$ g (10^{22} g, 10^{18} g). Für große $n \geq n_{peak} > 1$ erhält man dasselbe Ergebnis wie im Fall einer einfachen Stufe in δ_H bzw. σ_H , was schon in Abbildung 4.4 dargestellt wurde und hier noch einmal hervorgehoben ist.

gegeben ist.

Für $n < 1$ fällt das in Abbildung 4.7 zu sehende Plateau zu kleineren Massen hin ab und $\beta(M_{peak})$ bleibt ein globales Maximum. Damit bleiben die Überlegungen für den Fall $n = 1$ gültig, d.h. die Einschränkung der PBH-Massendichte ist durch (4.33) gegeben. Für $n > 1$ dagegen steigt $\beta(M)$ zu kleineren Massen hin an und ist n groß genug, so wird $\beta(M = 10^{15}\text{g})$ plötzlich größer sein als $\beta(M_{peak})$. Ab dieser Schwelle $n > n_{peak}$ muß also wieder Bedingung (4.17) und nicht mehr (4.33) angewandt werden. Dieser Schwellwert ist natürlich skalenabhängig, d.h. $n_{peak} = n_{peak}(k_s)$. Da die Spektren (4.22) und (4.36) für $k \ll k_s$ und $k \gg k_s$ die gleiche Form annehmen, erwartet man für $n > n_{peak}$ das gleiche Verhalten wie im Falle einer einfachen Stufe im Spektrum (zumindest solange $M_H(t_{k_s}) \gg 10^{15}$ g). Abbildung 4.8 zeigt die sich ergebenden Werte von n_{max} als Funktion von p und $M_H(t_{k_s})$.

Für eine exakte Behandlung des BSI-Spektrums muß man den Press-Schechter-Formalismus deutlich weiter verbessern als durch die in dieser Diskussion vorgenommenen Abschätzungen. Die hier durchgeführte Analyse sollte aber qualitativ richtige Ergebnisse liefern, die insbesondere in

den asymptotischen Bereichen $n \ll n_{peak}$ und $n \gg n_{peak}$ nahezu exakt sind. Für $n \approx n_{peak}$ ist hingegen im Gegensatz zu dem in Abbildung 4.8 Gezeigten ein glatter Übergang zwischen diesen beiden Bereichen zu erwarten. Da nach wie vor keine analytische Lösung der im Press-Schechter-Formalismus auftretenden Probleme absehbar ist, ist eine verbesserte Analyse wohl nur mit Hilfe von aufwändigen numerischen Simulationen möglich.

Fazit und Ausblick

Diese Arbeit hat sich mit der Entstehung von primordialen Schwarzen Löchern aus Dichtefluktuationen im frühen Universum beschäftigt. Solche Dichtefluktuationen werden in den Theorien eines inflationären Universums aus Quantenfluktuationen erzeugt und stellen die Erklärungsgrundlage für die heute beobachteten Strukturen wie Galaxien, Galaxiencluster oder auch Anisotropien in der Hintergrundstrahlung dar. Insofern sind sie von zentraler Bedeutung für die Kosmologie.

Es zeigte sich, daß in den einfachen, hier betrachteten Modellen eine extreme Feinabstimmung der Parameter nötig ist, um eine astrophysikalisch relevante Anzahl PBHs zu erzeugen: *A priori* ist es viel wahrscheinlicher, daß es entweder zu einer der Beobachtung widersprechenden Überproduktion kommt oder daß so wenige PBHs produziert werden, daß man kaum die Chance hat, jemals eines zu sehen. Sollte man dennoch eines Tages PBHs beobachten können – was in anderen Theorien über ihre Entstehung durchaus wahrscheinlicher sein mag – so wäre dies aber natürlich wegen der zu erwartenden Quanteneffekte eine sehr vielversprechende und weitreichende Entdeckung.

Umso interessanter ist es, daß man aufgrund der Einschränkungen aus der einfachen Tatsache, daß im wesentlichen noch keine PBHs direkt oder indirekt beobachtet wurden, dennoch sehr scharfe Grenzen für die Parameter von allen Modellen angeben kann, die die Entstehung von Dichtefluktuationen beschreiben. Beispielsweise findet man für skalenfreie Fluktuationsspektren, daß der Spektralindex nicht größer als $n_{max} \approx 1.37$ sein darf (zum Vergleich: Sowohl Überlegungen zur Galaxienverteilung als auch die Beobachtung der Hintergrundstrahlung legen $n \approx 1$ nahe). PBHs stellen also eine wichtige indirekte Methode zur Erforschung des Fluktuationsspektrums dar, die direkte Methoden wie die Beobachtung der Galaxienverteilung oder die Analyse der Anisotropie der Hintergrundstrahlung sinnvoll ergänzt.

Die besondere Bedeutung der PBHs besteht hierbei darin, daß sie Aussagen über das Fluktuationsspektrum auf sehr kleinen Skalen ermöglichen, die

um viele Größenordnungen unter den mit direkten Methoden zugänglichen liegen. So ist beispielsweise für das heute von der Beobachtung favorisierte $n \approx 1$ die Existenz einer Stufe im Leistungsspektrum mit $p \gtrsim 10^{-4}$ möglich, d.h. es könnte deutlich mehr Leistung auf kleineren als auf den direkt beobachtbaren Skalen geben.

In dieser Arbeit wurde zum einen der Fall eines skaleninvarianten Spektrums untersucht, das einem einfachen Potenzgesetz folgt [8]. Zum anderen wurden die Auswirkungen einer expliziten Brechung der Skaleninvarianz untersucht, die durch das Einführen verschiedener Formen von Stufen bei einer ausgezeichneten Skala k_s im Spektrum entstand [8, 9]. Mit dem in Kapitel 4 vorgestellten Formalismus – insbesondere aufgrund der verbesserten Berechnung der Varianz bei Horizonteintritt $\sigma_H(t_k)$ – kann aber im Prinzip *jedes* primordiale Fluktuationsspektrum und damit auch jedes Inflationsmodell getestet und analysiert werden. Für Spektren, bei denen $\sigma_H(t_k)$ keine monoton fallende Funktion der Skala $R = k^{-1}$ ist, müßte dazu allerdings noch der zugrunde liegende Press-Schechter-Formalismus in geeigneter Weise modifiziert werden.

Literaturverzeichnis

- [1] A. Albrecht et al.: “Inflation and squeezed quantum states”, *Phys. Rev. D* **50**, 4807, 1994.
- [2] A. Balbi et al.: “Constraints on cosmological parameters from MAXIMA-1”, *Ap. J. Lett.* **545**, L1, 2000.
- [3] B. A. Bassett, S. Tsujikawa: “Inflationary preheating and primordial black holes”, *Phys. Rev. D* **63**, 123503, 2001.
- [4] M. Bartelmann: “Die kosmologische Inflation”, *Phys. Blätter* **57**(9), 41, 2001.
- [5] N. D. Birrell, P. C. W. Davies: *Quantum fields in curved space*, 6. Aufl., Cambridge Univ. Press, 1999.
- [6] R. H. Brandenberger: “Modern cosmology and structure formation”, in: J. Donoghue (Hrsg.): *CP violation and the limits of the standard model (TASI 94)*, World Scientific, 1995. [astro-ph/9411049]
- [7] R. H. Brandenberger: “Inflation and the theory of cosmological perturbations”, in: E. Gava, A. Masiero, K. S. Narain (Hrsg.): *1997 Summer school in high energy physics and cosmology, Trieste, Italy, 2 Jun - 4 Jul 1997*, World Scientific, 1997. [astro-ph/9711106]
- [8] T. Bringmann, C. Kiefer, D. Polarski: “Primordial black holes from inflationary models with and without broken scale invariance”, erscheint in *Phys. Rev. D*, 2001. [astro-ph/0109404]
- [9] T. Bringmann, C. Kiefer, D. Polarski: “Primordial black holes from a BSI spectrum with oscillations”, in Vorbereitung.
- [10] E. V. Bugaev, K. V. Konishchev: “Extragalactic neutrino background from PBHs evaporation”, in: *Proceedings of the 27th international cosmic ray conference, Hamburg (ICRC 2001)*, 2001. [astro-ph/0103265]

- [11] J. S. Bullock, J. R. Primack: “Non-Gaussian fluctuations and primordial black hole formation”, *Phys. Rev. D* **55**, 7423, 1997.
- [12] J. S. Bullock, J. R. Primack: “Comments on non-Gaussian density perturbations and the production of primordial black holes”, in: D. B. Cline (Hrsg.): *Workshop on primordial black holes and Hawking radiation and 3rd international symposium on sources and detection of dark matter in the universe - DM '98, Marina del Rey, USA, 17 - 20 Feb 1998*, *Phys. Rep.* **307**, 1-4, 1998. [astro-ph/9806301]
- [13] B. J. Carr, S. W. Hawking: “Black holes in the early universe”, *M. N. R. A. S.* **168**, 399-415, 1974.
- [14] B. J. Carr: “The primordial black hole mass spectrum”, *Ap. J.* **201**, 1, 1975.
- [15] B. J. Carr: “Black holes, pregalactic stars, and the dark matter problem”, in: J. L. Sanz, L. J. Goicoechea (Hrsg.): *Observational and theoretical aspects of relativistic astrophysics and cosmology*, World Scientific, 1985, S. 1-78.
- [16] B. J. Carr: “Primordial black holes and inflation”, in: N. Sanchez, A. Zichichi (Hrsg.): *Current topics in astrophysics, proceedings of the international school of astrophysics “D. Chalonge 1996”*, World Scientific, 1997.
- [17] S. M. Carroll: “The cosmological constant”, *Living reviews in relativity* **2001-1**, <http://www.livingreviews.org>, 2001.
- [18] S. M. Carroll: “Dark energy and the preposterous universe”, astro-ph/0107571, 2001.
- [19] G. F. Chapline: “Cosmological effects of primordial black holes”, *Nature* **253**, 251, 1975.
- [20] D. B. Cline: “Possible evidence for primordial black holes”, in: *Proceedings of the 18th Texas symposium on astrophysics and cosmology 1996*, World Scientific, 1997.
- [21] P. S. Custódio, J. E. Horvath: “Evolution of a primordial black hole population”, *Phys. Rev. D* **58**, 23504, 1998.
- [22] A. M. Green, A. R. Liddle: “Constraints on the density perturbation spectrum from primordial black holes”, *Phys. Rev. D* **56**, 6166, 1997.

- [23] A. M. Green, A. R. Liddle: “Critical collapse and the primordial black hole initial mass function”, *Phys. Rev. D* **60**, 63509, 1999.
- [24] A. H. Guth: “Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems”, *Phys. Rev. D* **23**, 347, 1981.
- [25] F. Halzen et al.: “Gamma rays and energetic particles from primordial black holes”, *Nature* **353**, 807, 1991.
- [26] E. R. Harrison: “Fluctuations at the threshold of classical cosmology”, *Phys. Rev. D* **1**, 2726, 1970.
- [27] S. W. Hawking: “Gravitationally collapsed objects of very low mass”, *M. N. R. A. S.* **152**, 75-78, 1971.
- [28] S. W. Hawking: “Particle creation by black holes”, *Commun. Math. Phys.* **43**, 199, 1975.
- [29] M. R. S. Hawkins: “The direct detection of non-baryonic dark matter in the galaxy?”, *M. N. R. A. S.* **296**, L20, 1998.
- [30] M. R. S. Hawkins: “The signature of dark matter in quasar light curves”, in: *2nd international workshop on the identification of dark matter : IDM '98, Buxton, UK, 7 - 11 Sep 1998*, 1998.
[astro-ph/9811019]
- [31] P. Ivanov, P. Naselsky, I. Novikov: “Inflation and primordial black holes as dark matter”, *Phys. Rev. D* **50**, 7173, 1994.
- [32] C. Kiefer: “Das Informationsproblem bei Schwarzen Löchern”, *Phys. Blätter* **52**(4), 366, 1996.
- [33] C. Kiefer: “Thermodynamics of black holes and Hawking radiation”, in: P. Fré et al. (Hrsg.): *Classical and quantum black holes*, S. 17-74, IOP Publishing, 1999.
- [34] C. Kiefer: “Origin of classical structure from inflation”, *Nucl. Phys. B* **88**, 255, 2000.
- [35] C. Kiefer: “Hawking radiation from decoherence”, *Class. Quantum Grav.* **18**, L151, 2001.
- [36] C. Kiefer, D. Polarski: “Emergence of classicality for primordial fluctuations: Concepts and analogies”, *Annalen der Physik* **7**, 137, 1998.

- [37] H. I. Kim, C. H. Lee: “Constraints on the spectral index from primordial black holes”, *Phys. Rev. D* **54**, 6001, 1996.
- [38] H. I. Kim, C. H. Lee, J. H. MacGibbon: “Diffuse γ -ray background and primordial black hole constraints on the spectral index of density fluctuations”, *Phys. Rev. D* **59**, 063004, 1999.
- [39] E. W. Kolb, M. S. Turner: *The Early Universe*, Addison-Wesley Publishing Company, 1990.
- [40] G. D. Kribs, A. K. Leibovich, I. Z. Rothstein: “Bounds from primordial black holes with a near critical initial mass function”, *Phys. Rev.* **D60**, 103510, 1999.
- [41] S. M. Leach, I. J. Grivell, A. R. Liddle: “Black hole constraints on the running-mass inflation model”, *Phys. Rev. D* **62**, 43516, 2000.
- [42] J. Lesgourgues, D. Polarski, A. A. Starobinsky: “CDM models with a BSI steplike primordial spectrum and a cosmological constant”, *M. N. R. A. S.* **297**, 769, 1998.
- [43] G. F. Lewis, R. A. Ibata: “The search for cosmological black holes: A surface brightness variability test”, *Ap. J.* **549**, 46, 2001.
- [44] A. R. Liddle, A. M. Green: “Primordial black holes and early cosmology”, in: *International workshop on particle physics and the early universe, Ambleside, UK, 15 - 19 Sep 1997*, 1997. [astro-ph/9710235]
- [45] A. R. Liddle, A. M. Green: “Cosmological constraints from primordial black holes”, *Phys. Rep.* **307**, 125, 1998.
- [46] A. R. Liddle, D. H. Lyth: *Cosmological inflation and large-scale structure*, Cambridge Univ. Press, 2000.
- [47] A. D. Linde: “A new inflationary universe scenario: a possible solution of the horizon, flatness, homogeneity, isotropy and primordial monopole problems”, *Phys. Lett.* **108 B**, 6, 1982.
- [48] A. D. Linde: “Chaotic inflation”, *Phys. Lett.* **129 B**, 3, 4, 1983.
- [49] A. D. Linde: “Hybrid inflation”, *Phys. Rev. D* **49**, 748, 1994.
- [50] D. Lindley: “Primordial black holes and the deuterium abundance”, *M. N. R. A. S.* **193**, 393, 1980.

- [51] D. Lindley: “Primordial black holes and the cosmic baryon number”, *M. N. R. A. S.* **196**, 317, 1981.
- [52] J. H. MacGibbon, B. J. Carr: “Cosmic rays from primordial black holes”, *Ap. J.* **371**, 447, 1991.
- [53] C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler: *Gravitation*, W. H. Freeman and Company, 1973.
- [54] S. Miyama, K. Sato: “An upper bound on the number density of primordial black holes from the big bang nucleosynthesis”, *Prog. Theor. Phys.* **59**, 1012, 1978.
- [55] B. Müller: “The anthropic principle revisited”, astro-ph/0108259, 2001.
- [56] D. K. Nadejin, I. D. Novikov, A. G. Polnarev: “The hydrodynamics of primordial black hole formation”, *Astron. Zh.* **55**, 216, 1978.
[Sov. Astron. **22**(2), 129, 1978.]
- [57] C. B. Netterfield et al.: “A measurement by BOOMERANG of multiple peaks in the angular power spectrum of the cosmic microwave background”, astro-ph/0104460, 2001.
- [58] J. C. Niemeyer, K. Jedamzik: “Near-critical gravitational collapse and the initial mass function of primordial black holes”, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 5481, 1998.
- [59] J. C. Niemeyer, K. Jedamzik: “Dynamics of primordial black hole formation”, *Phys. Rev. D* **59**, 124013, 1999.
- [60] I. D. Novikov et al.: “Primordial black holes”, *Astron. Astrophys.* **80**, 104, 1979.
- [61] T. Padmanabhan: *Structure formation in the universe*, Cambridge Univ. Press, 3. Aufl., 1999.
- [62] J. A. Peacock: *Cosmological physics*, Cambridge Univ. Press, 1999.
- [63] D. Polarski: “Classicality of primordial fluctuations and primordial black holes”, astro-ph/0109388, 2001.
- [64] D. Polarski, A. A. Starobinsky: “Semiclassicality and decoherence of cosmological perturbations”, *Class. Quantum Grav.* **13**, 377, 1996.

- [65] E. Salvador-Solé: “Modeling the clustering of objects”, *astro-ph/9512037*, 1995.
- [66] W. H. Press, P. S. Schechter: “Formation of galaxies and clusters of galaxies by self-similar gravitational condensation”, *Ap. J.* **187**, 425, 1974.
- [67] T. Rothman, R. Matzner: “Upper limits on micro-mini black holes”, *Astrophys. Space Sci.* **75**, 229, 1981.
- [68] R. U. Sexl, H. K. Urbantke: *Gravitation und Kosmologie: eine Einführung in die Allgemeine Relativitätstheorie*, 4., überarb. Aufl., Spektrum, Akad. Verlag, 1995.
- [69] A. A. Starobinsky: “Spectrum of adiabatic perturbations in the universe when there are singularities in the inflaton potential”, *Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **55**, 477, 1992. [*JETP Lett.* **55**, 489, 1992.]
- [70] B. V. Vainer, O. V. Dryzhakova, P. D. Nasel'skii: “Primordial black holes and cosmological nucleosynthesis”, *Pis'ma Astron. Zh.* **4**, 344, 1978. [*Sov. Astron. Lett.* **4**(4), 185, 1978.]
- [71] B. V. Vainer, P. D. Nasel'skii: “Cosmological implications of the process of primordial black hole evaporation”, *Astron. Zh.* **55**, 231, 1978. [*Sov. Astron.* **22**(2), 138, 1978]
- [72] R. M. Wald: *General relativity*, The Univ. of Chicago Press, 1984.
- [73] G. S. Watson: “An exposition on inflationary cosmology”, *astro-ph/0005003*, 2000.
- [74] J. Yokoyama: “Cosmological constraints on primordial black holes produced in the near-critical gravitational collapse”, *Phys. Rev. D* **58**, 107502, 1998.
- [75] J. Yokoyama: “Formation of primordial black holes in the inflationary universe”, *Phys. Rep.* **307**, 133, 1998.
- [76] J. Yokoyama: “Formation of primordial black holes in inflationary cosmology”, *Progr. Theor. Phys. Suppl.* **136**, 338, 1999.
- [77] Y. B. Zel'dovich et al.: “Primordial black holes and the deuterium problem”, *Pis'ma Astron. Zh.* **3**, 208, 1977. [*Sov. Astron. Lett.* **3**(3), 110, 1977.]

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich allen danken, die zum Gelingen dieser Arbeit direkt oder indirekt beigetragen haben.

Ganz besonders bedanke ich mich bei Claus Kiefer für die sehr angenehme Betreuung der Arbeit. Er ließ mir den benötigten Freiraum zum selbständigen Arbeiten, war aber auch stets zu Diskussion und Hilfe bereit.

Herrn Prof. Dr. Römer danke ich für die freundliche Aufnahme in seine Abteilung und dem ganzen 8. Stock dafür, daß ich mich hier während der gesamten Zeit sehr wohl gefühlt habe. Besonders möchte ich Douglas, Eva und Geesche für das Korrekturlesen danken und Sebastian für die unermüdliche und zeitintensive Beschäftigung mit meinen zum Teil wohl recht weit ausschweifenden Fragen.

Nicht zuletzt möchte ich auch meinen Eltern sehr herzlich danken, die mir dieses Studium überhaupt erst ermöglicht haben.

Erklärung

Hiermit erkläre ich, die vorliegende Arbeit selbständig verfaßt und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet zu haben.

Freiburg, im November 2001

Torsten Bringmann