ÜBUNGSBLATT 6 ZU
Quantenmechanik II

Prof. Günter Sigl
II. Institut für Theoretische Physik der Universität Hamburg
Luruper Chaussee 149
D-22761 Hamburg
Germany
email: guenter.sigl@desy.de
tel: 040-8998-2224

Besprechung: 07.12.2010 in den Übungen

1. Zeigen Sie die Gültigkeit folgender Relation aus der Vorlesung:

$$\epsilon_1(k) = -4\pi e^2 \int \frac{d^3\mathbf{l}}{(2\pi)^3} \frac{\Theta(k_F - |\mathbf{l}|)}{|\mathbf{l} - \mathbf{k}|^2} = -\frac{2e^2 k_F}{\pi} F\left(\frac{k}{k_F}\right) ,$$

   mit

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1-x^2}{4x} \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| .$$

2. Zeigen Sie daß für fermionische Erzeugungsoperatoren $a^\dagger$ und Vernichtungsoperatoren a und $\alpha \in \mathbb{R}$ folgende Relationen gelten:

   a)
$$e^{-\alpha a^\dagger} a e^{\alpha a^\dagger} = a - \alpha^2 a^\dagger + \alpha(aa^\dagger - a^\dagger a)$$

   b)
$$e^{-\alpha a} a^\dagger e^{\alpha a} = a^\dagger - \alpha^2 a - \alpha(aa^\dagger - a^\dagger a)$$

   c)
$$e^{\alpha a^\dagger a} a e^{-\alpha a^\dagger a} = e^{-\alpha} a$$

   d)
$$e^{\alpha a^\dagger a} a^\dagger e^{-\alpha a^\dagger a} = e^{\alpha} a^\dagger$$

   bitte wenden

3. Die *Strukturfunktion* eines Systems in einem Zustand $|\psi\rangle$ bestehend aus N Teilchen sei definiert als

$$S(\mathbf{q},\omega) \equiv \frac{1}{N}\int_{-\infty}^{+\infty} dt\, e^{i\omega t}\langle\psi|n_{\mathbf{q}}(t)n_{-\mathbf{q}}(0)|\psi\rangle\,,$$

wobei wie üblich $n_{\mathbf{q}} = \sum_{\mathbf{k}\sigma} a^{\dagger}_{\mathbf{k}\sigma}a_{(\mathbf{k}+\mathbf{q})\sigma}$ die Fouriertransformierte des Dichte-Operators ist.

a) Zeigen Sie daß für wechselwirkungsfreie Fermionen im Grundzustand bei Temperatur $T = 0$ für $\mathbf{q} \neq 0$

$$S(\mathbf{q},\omega) = \frac{\hbar}{2\pi^2 n}\int d^3\mathbf{k}\Theta(k_F - k)\Theta(|\mathbf{k}+\mathbf{q}| - k_f)\delta\left[\omega - \frac{\hbar^2}{2m}\left(q^2 + 2\mathbf{q}\cdot\mathbf{k}\right)\right]\,.$$

gilt.

b) Zeigen Sie ferner daß die *Summenregel*

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\omega}{2\pi}\,S(\mathbf{q},\omega) = \begin{cases} N & \text{für } \mathbf{q} = 0 \\ 1 - \frac{1}{N}\sum_{\mathbf{k}\sigma} N_{\mathbf{k}\sigma}N_{(\mathbf{k}+\mathbf{q})\sigma} & \text{für } \mathbf{q} \neq 0 \end{cases}$$

gilt, wobei $N_{\mathbf{k}\sigma}$ die Besetzungszahlen sind.