

ÜBUNGSBLATT 5 ZU Quantenmechanik II

Prof. Günter Sigl
II. Institut für Theoretische Physik der Universität Hamburg
Luruper Chaussee 149
D-22761 Hamburg
Germany
email: guenter.sigl@desy.de
tel: 040-8998-2224

Besprechung: 26.11.2010 in den Übungen

1. Feldgleichungen

a) Zeigen Sie die Gültigkeit der folgenden in der Vorlesung verwendeten Hilfsrelation für beliebige Operatoren A, B, C :

$$[AB, C]_{\pm} = A[B, C]_{\pm} \mp [A, C]_{\pm}B$$

b) Beweisen Sie mit Hilfe der Vertauschungsrelationen für die Feldoperatoren die Gültigkeit der folgenden Feldgleichung für Teilchen ohne Spin-Freiheitsgrade aus der Vorlesung:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\mathbf{r}) \right] \psi(\mathbf{r}, t) + \int d^3\mathbf{r}' \psi^\dagger(\mathbf{r}', t) V^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}', t) \psi(\mathbf{r}, t)$$

c) Zeigen Sie mit Hilfe der Feldgleichung und ihrer adjungierten daß die Kontinuitätsgleichung

$$\dot{n}(\mathbf{r}) = -\nabla \cdot \mathbf{j}$$

für die in der Vorlesung definierten Feldoperatoren $n(\mathbf{r})$ und $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ gilt.

2. Zeigen Sie daß der Gesamt-Teilchenzahl-Operator

$$N = \sum_{\mathbf{n}} a_{\mathbf{n}}^\dagger a_{\mathbf{n}}$$

mit dem Hamilton-Operator

$$H = \sum_{\mathbf{n}, \mathbf{m}} (\langle \mathbf{n} | t | \mathbf{m} \rangle + \langle \mathbf{n} | V | \mathbf{m} \rangle) a_{\mathbf{n}}^\dagger a_{\mathbf{m}} + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{k}, \mathbf{l}} \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} | V^{(2)} | \mathbf{k}, \mathbf{l} \rangle a_{\mathbf{m}}^\dagger a_{\mathbf{n}}^\dagger a_{\mathbf{l}} a_{\mathbf{k}},$$

vertauscht.