ÜBUNGSBLATT 3 ZU
Quantenmechanik II

Prof. Günter Sigl
II. Institut für Theoretische Physik der Universität Hamburg
Luruper Chaussee 149
D-22761 Hamburg
Germany
email: guenter.sigl@desy.de
tel: 040-8998-2224

Besprechung am 12.11.2010 in den Übungen

1. Streuphasen bei niedrigen Energien

   Ein radialsymmetrisches Potential $V(r)$ verschwinde für Radien $r > a$, so daß die radiale Wellenfunktion für $r > a$

$$R_l^{>a}(r) = \frac{1}{2}\left[h_l^*(kr) + e^{2i\delta_l(k)}h_l(kr)\right] = [j_l(kr)\cos\delta_l(k) - n_l(kr)\sin\delta_l(k)]$$

   erfüllt, wobei k die Wellenzahl des Teilchens für $r \to \infty$ und $h_l(\rho) \equiv h_l^{(1)}(\rho)$ die erste Hankelfunktion sind.

   a) Zeigen Sie, daß für die Streuphase $\delta_l(k)$

$$\cot\delta_l(k) = \frac{k\,n_l'(ka) - \alpha_l(k)n_l(ka)}{k\,j_l'(ka) - \alpha_l(k)j_l(ka)}$$

   gilt, wobei die Zahl α_l als

$$\alpha_l(k) \equiv \left.\frac{d\ln R_l^{<a}}{dr}\right|_{r=a}$$

   definiert ist und $R_l^{<a}(r)$ die radiale Wellenfunktion für $r \leq a$ darstellt.

   b) Verwenden Sie die in Aufgabe 1d aus Übungsblatt 2 ermittelte Asymptotik der sphärischen Bessel- und Neumann-Funktionen für kleine Argumente, um zu zeigen daß für $k \to 0$

$$\tan\delta_l(k) \simeq \frac{2l+1}{[(2l+1)!!]^2}\frac{l - a\alpha_l(k)}{l+1+a\alpha_l(k)}(ka)^{2l+1} \qquad (1)$$

   gilt, wobei $(2l+1)!! \equiv 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2l+1)$ ist.

   bitte wenden

2. s-Wellenstreuung bei kleinen Energien und Streulänge

Beschränken Sie nun Ihre Betrachtung auf s-Wellenstreuung, $l = 0$. Die *Streulänge* a_0 ist definiert durch

$$\lim_{k \to 0} k \cot \delta_0(k) = -\frac{1}{a_0} .$$

a) Drücken Sie mit Hilfe von Gl. (1) aus Aufgabe 1b die Streulänge a_0 durch a und α_0 aus.

b) Zeigen Sie daß für die Streuamplitude

$$f_0(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \simeq -\frac{a_0}{ika_0 + 1} \quad \text{für } k \ll a_0^{-1}$$

gilt.

c) Berechnen Sie daraus den totalen Streuquerschnitt

$$\lim_{k \to 0} \sigma .$$

d) Das Potential verschwinde wieder für $r > a$. Zeigen Sie daß für $k \to 0$ die Wellenfunktion für $r > a$ dann die Form

$$R_0^{>a}(r) \propto \frac{1}{r} \left(1 - \frac{r}{a_0} \right)$$

hat.