ÜBUNGSBLATT 10 ZU
Theoretische Physik II: Quantenmechanik

Prof. Günter Sigl
II. Institut für Theoretische Physik der Universität Hamburg
Luruper Chaussee 149
D-22761 Hamburg, Germany
email: guenter.sigl@desy.de
tel: 040-8998-2224

Abgabetermin: 06.07.2010 vor den Übungen

1. (8 Punkte) Wellenfunktion und elektromagnetische Potentiale

   a) Die Wellenfunktion $\psi_E(\mathbf{r})$ genüge der stationären Schrödingergleichung

   $$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\mathbf{r})\right]\psi_E(\mathbf{r}) = E\psi_E(\mathbf{r})\,.$$

   Konstruieren Sie daraus eine Wellenfunktion $\psi'_E(\mathbf{r})$, die der modifizierten Schrödingergleichung

   $$\left[\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla} - \frac{e}{c_0}\mathbf{A}(\mathbf{r})\right)^2 + V(\mathbf{r})\right]\psi'_E(\mathbf{r}) = E\psi'_E(\mathbf{r})$$

   für ein gegebenes Vektorpotential $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ genügt. Hinweis: $\psi'_E(\mathbf{r})$ unterscheidet sich von $\psi_E(\mathbf{r})$ durch einen Phasenfaktor, welcher $[-i\hbar\boldsymbol{\nabla} - (e/c_0)\mathbf{A}(\mathbf{r})]^2$ durch $-\hbar^2\Delta$ ersetzt.

   b) In Anwesenheit eines allgemeinen elektromagnetischen Potentials $[\mathbf{A}(\mathbf{r},t), \phi(\mathbf{r},t)]$ genügt die Wellenfunktion $\psi(\mathbf{r},t)$ der zeitabhängigen Schrödingergleichung

   $$i\hbar\frac{\partial\psi(\mathbf{r},t)}{\partial t} = \left[\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla} - \frac{e}{c_0}\mathbf{A}(\mathbf{r},t)\right)^2 + e\phi(\mathbf{r},t)\right]\psi(\mathbf{r},t)\,.$$

   Gesucht ist eine Wellenfunktion $\psi'(\mathbf{r},t)$, welche der analogen Schrödingergleichung für eichtransformierte Potentiale

   $$\mathbf{A}'(\mathbf{r},t) = \mathbf{A}(\mathbf{r},t) + \boldsymbol{\nabla}\Lambda(\mathbf{r},t)\,, \quad \phi'(\mathbf{r},t) = \phi(\mathbf{r},t) - \frac{1}{c_0}\frac{\partial\Lambda(\mathbf{r},t)}{\partial t}$$

   genügt, wobei $\Lambda(\mathbf{r},t)$ eine beliebige skalare Raum-Zeit-Funktion sei. Wie hängen $\psi'(\mathbf{r},t)$ und $\psi(\mathbf{r},t)$ zusammen ? Hinweis: Die beiden Wellenfunktionen unterscheiden sich um einen Phasenfaktor, der von $\Lambda(\mathbf{r},t)$ abhängt.

   bitte wenden

2. (4 Punkte) Spin-Operatoren

   Finden Sie die Matrix-Darstellung des Operators $S_{\mathbf{n}}$ der Spinprojektion auf die Richtung, die durch den Einheitsvektor $\mathbf{n}$ gegeben ist. Finden Sie die Erwartungswerte $\langle S_{\mathbf{n}} \rangle_{\chi_\pm} = \chi_\pm^\dagger S_{\mathbf{n}} \chi_\pm$ in den Zuständen $\chi_\pm$ mit $L_z \chi_\pm = \pm(\hbar/2)\chi_\pm$. Was sind die Wahrscheinlichkeiten der Spinprojektionswerte $\pm(\hbar/2)$ auf die Richtung $\mathbf{n}$ in diesen Zuständen ?

3. (8 Punkte) Unitäre Transformationen von Spin-1/2 Zuständen

   Betrachten Sie die unitäre Transformation

$$U_{\mathbf{e}\theta} = \exp\left[\frac{i}{2}\,\theta\,\mathbf{e}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right] ,$$

   welche einer Drehung um den Winkel θ um die durch den Einheitsvektor $\mathbf{e}$ definierte Richtung entspricht. Drücken Sie $U_{\mathbf{e}\theta}$ durch die Einheitsmatrix und die Pauli-Matrizen $\boldsymbol{\sigma}$ aus. Stellen Sie damit für $\mathbf{e} = \mathbf{e}_x$ die Drehung der Pauli-Matrizen $U_{\mathbf{e}_x\theta}\boldsymbol{\sigma}U^\dagger_{\mathbf{e}_x\theta}$ durch eine 3×3 Matrix dar. Hinweis: Verwenden Sie die Kommutations- und Antikommutations- Eigenschaften der Pauli-Matrizen.