Musterlösungen Übungsklausur

1.) Der Hamiltonian ist

$$H = \frac{p^2}{2m} - \frac{Ze^2}{r}$$

$$p \simeq \Delta p \qquad r \simeq \Delta r \qquad \Delta p \cdot \Delta r \simeq \hbar$$

$$\Rightarrow \quad E \simeq \frac{\hbar^2}{2m(\Delta r)^2} - \frac{Ze_0^2}{\Delta r}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dE}{d\Delta r} = -\frac{\hbar^2}{m(\Delta r)^3} + \frac{Ze_0^2}{(\Delta r)^2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \Delta r \text{ im Grundzustand} \simeq \frac{\hbar^2}{mZe_0^2}$$

$$\Rightarrow \quad E = E_{min} \simeq -\frac{mZ^2e_0^4}{2\hbar^2}$$ stimmt mit exakter Rechnung überein!

2.) $Y_{22} \propto \sin^2\theta \, e^{2i\varphi}$

$$\Rightarrow \quad Y_{21} \propto L_- Y_{22} \propto e^{-i\varphi}\left(-\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta \frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\sin^2\theta \, e^{2i\varphi}$$

$$= 2(-1+i)\sin\theta\cos\theta \, e^{i\varphi} \propto \sin\theta\cos\theta \, e^{i\varphi}$$

Normierung:

$$1 = |c|^2\int_0^\pi \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \, Y_{21}^* Y_{21} = 2\pi|c|^2 \int_0^\pi d\theta \sin^3\theta \cos^2\theta$$

$$= 2\pi|c|^2 \int_{-1}^{+1} dx (1-x^2)x^2 = \cancel{\frac{8\pi}{15}} = 4\pi|c|^2 \int_0^1 dx (x^2 - x^4)$$

$-\sin\theta \, d\theta = d\cos\theta = dx$

$$= 4\pi|c|^2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = \frac{8\pi}{15}|c|^2$$

$$\Rightarrow \quad |c| = \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \quad \Rightarrow \quad Y_{21}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin\theta\cos\theta \, e^{i\varphi}$$ bis auf ein Vorzeichen

3. Wegen $\partial_\varphi f = 0$ und $\partial_\varphi Y_{lm} = im Y_{lm}$, tragen nur Y_{l0} bei. Ausserdem sind die assozierten Legendre-Polynome Polynome für m=0 vom Grad (l-m). Daher können nur Y_{00}, Y_{10}, Y_{20} zu der Entwicklung von $f(\theta,\varphi) = \cos^2\theta + \cos\theta$ beitragen.

$$Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \quad Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta, \quad Y_{20} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}(3\cos^2\theta - 1)$$

$$f(\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{2} c_l Y_{l0}$$

$$c_2\sqrt{\frac{5}{16\pi}}(3\cos^2\theta - 1) = \cos^2\theta + \dots$$

$$\Rightarrow c_2 = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{16\pi}{5}}$$

$$c_1 \cdot \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta = \cos\theta$$

$$\Rightarrow c_1 = \sqrt{\frac{4\pi}{3}}$$

Hinweis: man kann sich Y_{10} und Y_{20} damit die Form von Y_{ll} und L_- aus Aufgabe 2 ableiten bis auf die Normierung

$$\int_{-1}^{+1} d\cos\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \, |Y_{lm}(\theta,\varphi)|^2 = 1$$

$$c_0 Y_{00} = f - c_1 Y_{10} - c_2 Y_{20}$$

$$= \cos^2\theta + \cos\theta - \cos^2\theta + \frac{1}{3} - \cos\theta = 1/3$$

$$\Rightarrow c_0 = \sqrt{4\pi}\,\frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad f(\theta,\varphi) = \frac{\sqrt{4\pi}}{3}\left[Y_{00}(\theta,\varphi) + \sqrt{3}\,Y_{10}(\theta,\varphi) + \frac{2}{\sqrt{5}}Y_{20}(\theta,\varphi)\right]$$

4.) Ortsraum: $\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}k_0 x^2\right]\psi(x) = E\,\psi(x)$

Impulsraum: $i\hbar\frac{\partial}{\partial x} \to p, \quad x \to i\hbar\frac{\partial}{\partial p}$

$$\left[\frac{p^2}{2m} - \frac{1}{2}k_0\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial p^2}\right]\varphi(p) = E\,\varphi(p)$$

Durch vergleich der Koeffizienten:

$$k_0 \leftrightarrow m^{-1}, \quad \omega = \sqrt{\frac{k_0}{m}} \leftrightarrow \omega$$

Frequenz ist invariant wie es sein muß

$$\varphi_n(p) \propto \exp\left(-\frac{\omega}{2\hbar k_0}p^2\right) H_n\left(\sqrt{\frac{\omega}{\hbar k_0}}\,p\right)$$

wobei $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$