# Physik 2 Elektrodynamik und Optik

#### Notizen zur Vorlesung im Sommersemester 2016

Peter Schleper

20. Juni 2016 Institut für Experimentalphysik, Universität Hamburg peter.schleper@physik.uni-hamburg.de http://www.desy.de/~schleper/lehre/physik2/SS\_2016



# Danksagung

Diese Notizen zur Vorlesung Physik-2 basieren in Teilen auf Unterlagen zur selben Vorlesung meiner Kollegen Prof. Friedrich Wilhelm Büsser, Prof. Rudolf Langkau, Prof. Gunnar Lindström und Prof. Wolfgang Scobel an der Universität Hamburg. Ich bedanke mich ganz herzlich bei ihnen für die großzügige und hilfreiche Überlassung ihrer Unterlagen.

# Inhaltsverzeichnis

1	Einle	eitung	7
	1.1	Übersicht	7
	1.2	Literatur zu Elektromagnetismus und Optik $\ \ldots$ .	9
2	Flok	trostatik	10
2	2 1	Coulomb-Kraft und elektrische Ladung	10
	$\frac{2.1}{2.2}$	Das MKSA Finhaitansystem	11
	2.2	Dia Flomontarladung	19
	$\frac{2.3}{2.4}$	Des Floktrische Fold	14
	2.4 9.5	Flaktrisches Potential und Spannung	14
	2.0 9.6	Influenz und Metalle	10
	2.0		10
	2.1	2.7.1 Current esitier anningin	10
		2.7.1 Superpositionsprinzip	18
		2.7.2 Elektrischer Dipol in einem außeren Feld	19
		2.7.3 Das Potential eines Dipols	19
		2.7.4 Flächenladungen, Kondensator und Kapazität	21
		2.7.5 Raumladungen und Multipole	22
	2.8	Gauß'scher Satz	23
		2.8.1 Integrale und Differentielle Form	23
		2.8.2 Begründung des Gauß'schen Satzes	24
		2.8.3 Anwendung des Gauß'schen Satzes	25
	2.9	Energie des $E$ -Feldes	27
	2.10	Dielektrika	28
3	Flek	trische Leitung	30
Ŭ	3.1	Strom und Ladungserhaltung	30
	3.2	Mechanismen des Ladungstransports	31
	0.2 3.3	Strombroico	33
	0.0		55
4	Stat	ische Magnetfelder	35
	4.1	Magnetismus und Ströme	35
	4.2	Lorentz-Kraft	36
	4.3	Biot-Savart Gesetz	38
	4.4	Ampere'sches Gesetz	39
	4.5	Quellenfreiheit von Magnetfeldern	40
	4.6	Magnetfelder von Stromverteilungen	41
		4.6.1 Magnetfeld in einer Spule	41
		4.6.2 Leiterschleife und magnetischer Dipol	41
	4.7	Magnetfeld der Erde	43
	4.8	Hall-Effekt	44
	4.9	Das Vektorpotential	45
	4.10	Materie im Magnetfeld	46
-	1		<b>F^</b>
5	indu		50
	5.1	Statische und zeitlich veränderliche Felder	50

	5.2	Faraday'sches Induktionsgsetz	51
		5.2.1 Lenz'sche Regel	53
		5.2.2 Stromerzeugung	53
		5.2.3 Wirbelströme	54
	5.3	Selbst-Induktivität	54
6	Cab		FG
0	6 1	Scholtvorgänge mit Spylen und Kondengsteren	50 56
	0.1	6.1.1 Finschalten einer Spule	56
		6.1.2 Finschalten einer Spule	$50 \\ 57$
		6.1.3 Ausschalten einer Spule	57
	69	5.1.5 Ausschaften einer Spule	50
	0.2 6.3	Energie im Wechelstromkreis	50
	0.5	Kompleye Widerstände	09 60
	0.4	6.4.1 Obreve Widerstande	61
		6.4.2 Ver demoter	01 61
		$0.4.2$ Kondensator $\dots$	01
		$\begin{array}{cccc} 0.4.3  \text{Spule} \\ \hline \\ C & A & D \\ L & C \\ \hline \\ C & A \\ \hline \\ \end{array}$	01 69
	с <b>г</b>	0.4.4 R-L-O Schaltungen	02
	0.0	Wecnselstromschaltungen	03
		0.5.1 R-C Glied als Hochpass	63 C4
	0.0	6.5.2 R-C Glied als Tiefpass	64
	6.6	Schwingkreise	64 C4
		6.6.1 R-C-L Serienschwingkreis als Frequenzfilter	64 62
	0.7	0.0.2 R-C-L als Parallelschwingkreis	66 66
	6.7	Energie im Schwingkreis	66 67
	0.8	Fourier-Analyse	07
7	Мах	well - Gleichungen	69
	7.1	Der Verschiebungsstrom	69
	7.2	Zusammenfassung der Maxwell-Gleichungen	71
	7.3	Maxwell-Gleichungen in Materialien	72
	7.4	Skalares Potential und Vektorpotential	72
		7.4.1 Maxwell-Gleichungen und Potentiale	73
		7.4.2 Eichtransformationen	74
		7.4.3 Bedeutung der Potentiale	75
•		due we estimate a Maller	
8		Ableitung	77
	0.1	Consistentia des alabitraria meticada en Wallon	11 70
	0.2	Deleviention	10
	8.3	Formation and Departies a Valetan	19
	8.4 0 F	Linergie und Poynting-vektor	80
	8.0 8.6	Impuls und Druck	80 01
	8.0	Erzeugung elektromagnetischer weiten	81 01
		8.6.1 Hertz scher Dipol	81
		8.6.2 Strahlung einer beschleunigten Ladung	84
9	Opti	ik	86
	9.1	Huygens'sches Prinzip	86
	$9.1 \\ 9.2$	Huygens'sches Prinzip	86 87
	9.1 9.2 9.3	Huygens'sches Prinzip       Reflexion         Reflexion und stehende Wellen       Brechung und Totalreflexion	86 87 88
	9.1 9.2 9.3 9.4	Huygens'sches PrinzipReflexion und stehende WellenBrechung und TotalreflexionPolarisation durch Brechung	86 87 88 89

	9.5	Dispersion	90	
	9.6	Phasen- und Gruppengeschwindigkeit		
	9.7	7 Linsen und Abbildungen		
	9.8 Kohärenz			
	9.9	Interferenz	99	
		9.9.1 Interferenz an planparallelen Platten	99	
		9.9.2 Michelson-Morley Experiment	100	
	9.10	Beugung	101	
		9.10.1 Doppelspalt mit kleiner Spaltbreite	102	
		9.10.2 Einzelspalt	103	
		9.10.3 Doppelspalt allgemein	104	
		9.10.4 Gitter	104	
		9.10.5 Kreisförmige Öffnungen	105	
	9.11	Dopplereffekte	106	
		9.11.1 Linearer nichtrelativistischer Dopplereffekt in		
		Medien	106	
		9.11.2 Transversaler nichtrelativistischer Doppleref-		
		fekt in Medien	107	
		9.11.3 Longitudinaler relativistischer Dopplereffekt .	107	
		9.11.4 Transversaler relativistischer Dopplereffekt	108	
A	Math	nematische Formeln	109	
в	Forn	neln zum		
	Elek	tromagnetismus	111	
С	Well	en	115	
	C.1	Harmonische Wellen	115	
	C.2	Beispiele für Wellen	116	
	C.3	Wellengleichung und Form der Lösungen	117	
	C.4	Ebene Wellen und Kugelwellen	118	
	C.5	Linearität und Superposition	118	
D	Diffe	erentialgleichungen	120	
	D.1	Herleitung der harmonischen Schwingung	120	
	D.2	Lösung für eine freie harmonische Schwingung	121	
	D.3	Gedämpfte harmonische Schwingung	124	
	D.4	Gedämpfter harmonischer Oszillator mit äußerer An-		

# 1 Einleitung

# 1.1 Übersicht

Unter den vier grundlegenden Naturkräften

- Gravitation
- Elektromagnetische Wechselwirkung
- Starke Wechselwirkung
- Schwache Wechselwirkung

nimmt die elektromagnetische Wechselwirkung eine besondere Rolle ein. Ursache hierfür ist vor allem die sehr kurze Reichweite der schwachen Wechselwirkung ( $10^{-18}$  m) und der starken Wechselwirkung ( $10^{-15}$  m). Beide sind also nur im sub-atomaren Bereich relevant. Im Gegensatz dazu ist die Reichweite der Gravitation und der elektromagnetischen Wechselwirkung im Prinzip unendlich groß. Die Gravitationskraft ist aber viel schwächer.

Elektromagnetische Wechselwirkungen sind daher für unsere Umgebung, unser tägliches Leben und technologische Entwicklung von überragender Bedeutung. Mit ihr können so unterschiedliche Phänomene wie Reibung, chemische Bindungen, Licht oder allgemeiner elektromagnetische Wellen und viele andere durch das gleiche System von Naturgesetzen vollständig erklärt werden.

Ein tiefes Verständnis des Elektromagnetismus ist in essentiellen Fragen nur auf der Grundlage der Relativitätstheorie und der Quantenphysik möglich. Tatsächlich kann sogar eine rigorose Ableitung des Elektromagnetismus erfolgen, wenn man eine bestimmte Symmetrieeigenschaft elementarer Teilchen postuliert<sup>1</sup>. Da hier die Quantenmechanik nicht vorausgesetzt werden kann, werden an den entsprechenden Stellen die Folgerungen aus der Quantenmechanik als Annahmen formuliert beziehungsweise aus Experimenten abgeleitet.

Die elektromagnetische Wechselwirkung beschreibt Kräfte, die sich mit Hilfe von

- elektrischen Feldern,  $\dot{E}$
- magnetischen Feldern,  $\overline{B}$
- Teilchen mit elektrischer Ladung, q

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Grundlage ist die 'Phaseninvarianz' der Quantenmechanik und darauf beruhend die 'Eichtheorie' des Elektromagnetismus. Ganz ähnlich lassen sich auch die Starke und die Schwache Wechselwirkung ableiten. Diese Ableitungen werden in der Regel im Rahmen der Vorlesungen zur Teilchenphysik behandelt.

### 1.1 Übersicht

	beschreiben und mathematisch formulieren lassen. Diese Größen lassen sich nicht direkt beobachten, sie dienen vielmehr der effekti- ven Beschreibung der Kräfte zwischen Teilchen und z.B. des Ener- gietransports durch elektromagnetische Wellen. Im Einzelnen:
	• Elektrische Ladungen erzeugen elektrische Felder.
	$\bullet$ Bewegte elektrische Ladungen erzeugen Magnetfelder^2
	• Elektrische Felder bewirken eine Kraft auf Teilchen mit elektrischer Ladung.
	• Magnetische Felder bewirken eine Kraft auf bewegte Teilchen mit elektrischer Ladung.
	• Die Änderung elektrischer Felder führt zu magnetischen Feldern, und umgekehrt.
Maxwell-Gleichungen	Offenbar benötigt man zur Beschreibung aller dieser Effekte nicht nur eine Gleichung, sondern mehrere miteinander gekoppelte Glei- chungen.
	Im Anhang findet sich dazu eine Sammlung mathematischer und physikalischer Formeln.

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>Offenbar ist dies eine zu einfache Darstellung, da der Unterschied zwischen bewegten und ruhenden Ladungen ja nur einem Wechsel des Bezugssytems entspricht. Die  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  Felder müssen also durch Lorentz-Transformationen ineinander umgerechnet werden können.

# 1.2 Literatur zu Elektromagnetismus und Optik

### Lehrbücher Experimentalphysik:

Experimentalphysik Bd. 2, Elektrizität und
Optik, Springer
Physik, Pearson
Fundamental University Physics, Addison-Wesley
University Physics, Pearson
Feynman Lectures

### Skripte zur Experimentalphysik:

Erdmann, Fl	ügge	Physik Denken, Bd. 6, Springer Spektrum
Lindström,	Langkau,	Physik kompakt: Elektrodynamik, Springer
Scobel		

#### Einführung in die Theorie / Mathematik:

Griffiths	Elektrodynamik, Pearson
Nolting	Grundkurs Theoretische Physik
Großmann	Mathematischer Einführungskurs für die
	Physik, Teubner
Weltner	Mathematik für Physiker 2, Springer
Fließbach	Elektrodynamik, Lehrbuch zur Theoreti-
	schen Physik, Spektrum
Wang	Introduction to Mathematical Physics,
	Oxford

### Sonstiges:

Kehlmann	Die Vermessung der Welt
Simonyi	Kulturgeschichte der Physik, Harri
Roger G. Newton	Thinking about Physics, Princeton
Genz, Henning	Gedankenexperimente, Weinheim Wiley

# 2 Elektrostatik

# 2.1 Coulomb-Kraft und elektrische Ladung

Im Folgenden werden zunächst Phänomene besprochen, die statisch sind, d.h. bei denen sich die elektrischen Ladungen nicht bewegen und die elektrischen Felder sich zeitlich und räumlich nicht ändern.



Durch Reibung lassen sich auf einfache Weise elektrische Kräfte demonstrieren. Es liegt nahe den Stoffen eine physikalische Eigenschaft zuzuschreiben, die sich durch den Reibungsvorgang geändert hat. Diese Eigenschaft wird als elektrische Ladung bezeichnet. Sie soll so definiert werden, dass die Kraft zwischen zwei beteiligten Materialien proportional zu ihrer Ladung ist.

 $F \sim q$ 

Da dies wechselseitig gelten muss folgt auch

 $F \sim q_1 q_2$ 

Experimentell und auch aus Symmetriegründen folgt, dass die Kraft nur parallel oder antiparallel zur Richtung  $\vec{e}_r$  zwischen den Ladungen sein kann,

$$F \sim q_1 q_2 \ \vec{e}_r$$

Experimentell findet man mit hervorragender Genauigkeit, dass der Betrag der Kraft für zwei Punktladungen mit dem Abstand

$$r = \left| \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \right|$$

quadratisch abnimmt, so dass

$$\vec{F} \sim \frac{q_1 q_2}{r^2} \, \vec{e}_r$$

Durch einfache Experimente findet man, dass sowohl anziehende als auch abstoßende Kräfte vorkommen, die man mit positiven und negativen Ladungen assoziiert. Ladungen mit gleichem Vorzeichen stoßen sich ab, Ladungen mit ungleichem Vorzeichen ziehen sich an.

**Abb. 2.1** Durch Reiben verschiedener Stoffe aneinander verbleiben Elektronen der Atomhüllen überwiegend auf einem der Stoffe. Bernstein heist griechisch *Elektron*.



#### Abb. 2.2

Die Coulombsche Drehwaage, ähnlich der Gravitationswaage von Cavendish, mit der Coulomb das elektrostatische Kraftgesetz ermittelte.



Abb. 2.3 Holundermark Kugeln werden durch Bernstein oder Glas aufgeladen. Gleichsinnige Ladungen stoßen sich ab und ungleichsinnige Ladungen ziehen sich an.



Die Proportionalitätskonstante hängt von der Wahl des Einheitensystems für die elektrische Ladung ab. Im MKSA System gilt für das Coulomb-Gesetz

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{e}_r$$
(2.1)

 $\epsilon_0$ : Elektrische Feldkonstante, Influenzkonstante (im Vakuum)

$$\epsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi c^2} \frac{C^2}{Ns^2} = 8,854187817... \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}$$
(2.2)

Dies ist keine neue Naturkonstante, sondern ergibt sich durch die Definition des Coulomb im MKSA-System (siehe Gl. 2.6).

**Beispiel:** Für  $q_1 = q_2 = 1$  C und r = 1 m ist

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{m}^2} = c^2 \cdot 10^{-7} \frac{\mathrm{Ns}^2}{\mathrm{m}^2} = 8,9876 \cdot 10^9 \,\mathrm{N}$$

 $1~{\rm C}$ ist diejenige Ladung, die in  $1~{\rm m}$  Abstand von einer gleich großen Ladung mit einer Kraft von 8,9876 $\cdot 10^9~{\rm N}$ abgestoßen wird.

## 2.2 Das MKSA Einheitensystem

In der MKSA Konvention wird nicht die Ladung (Einheit Coulomb) sondern die Stromstärke (Einheit Ampere) als Grundgröße definiert. Wir müssen daher zur Erklärung des Einheitensystems zwei Vorgriffe machen, zum einen auf den Zusammenhang zwischen Stromstärke und Magnetkraft und zum anderen auf die Lichtgeschwindigkeit. Coulomb-Gesetz

### Coulomb C

Einheit der elektrischen Ladung • Die Ladungsmenge q = 1 Coulomb wird bei einer konstanten Stromstärke von I = 1 A in einer Sekunde transportiert,

$$q = It \qquad \qquad 1C = 1As \qquad (2.3)$$

 Ein Ampere ist die Stromstärke, die im Vakuum zwischen zwei geraden Leitern im Abstand von 1 m eine Kraft von 2 · 10<sup>-7</sup> N je Meter Drahtlänge hervorruft. Wie später gezeigt wird, folgt hierfür (siehe Gleichung 4.9)

$$\frac{F}{L} = \frac{\mu_0}{2\pi R} I^2$$

Diese Definition des Ampere legt die magnetische Feldkonstante (Permeabilität) fest auf

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{N}{A^2} \tag{2.4}$$

• Elektromagnetische Wellen, d.h. auch Licht, bereiten sich im Vakuum mit der Lichtgeschwindigkeit c aus. Das Meter ist definiert als die Länge, die Licht in exakt 1 / 299 792 458 Sekunden zurücklegt. Wie später gezeigt wird, ergibt sich für die Lichtgeschwindigkeit

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \tag{2.5}$$

Damit gilt auch exakt

$$\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2} = \frac{10^7}{4\pi c^2} \frac{C^2}{N s^2}$$
(2.6)

Der Zahlenwert ist bereits in Gl. 2.2 angegeben worden.

## 2.3 Die Elementarladung

Die elektrische Ladung ist eine Eigenschaft elementarer Teilchen wie z.B. der Elektronen und Quarks. Entsprechend dem Konzept der ununterscheidbaren Teilchen in der Quantenmechanik haben alle Elektronen exakt die gleiche Ladung. Experimentell ist dies sehr gut bestätigt. Den Betrag dieser Ladung bezeichnet man als Elementarladung

$$e = 1,602176565(35) \cdot 10^{-19} \text{ C}$$
 (2.7)

• Es gibt positive und negative Ladung. Teilchen und ihre Antiteilchen besitzen genau entgegengesetzt gleiche Ladungen. Theoretische wurde dies erstmals von Dirac bei der Ableitung der relativistischen Quantenmechanik gezeigt.



#### Abb. 2.4

Versuch von Millikan zur Bestimmung der Elementarladung anhand der Sinkgeschwindigkeit von Öltröpfchen aufgrund von Coulomb-Kräften, Gravitation, Auftrieb und Reibung.

- Ladungen sind additiv. Die Gesamtladung eines Körpers ist die Summe seiner positiven und negativen Ladungen. Ist die Summe = 0, heißt der Körper elektrisch neutral. Da die Ladung über die Coulomb-Kraft gemessen wird, entspricht dies dem Superpositionsprinzip für Kräfte, d.h. die elektrischen Felder zweier Ladungen addieren sich ebenfalls ohne sich gegenseitig zu beinflussen<sup>3</sup>.
- Aus historischen Gründen ist die Ladung des Elektrons als negatives der Elementarladung definiert,

 $q_e = -1e$ 

• Die stabile Materie ist aufgebaut aus *u*-Quarks, *d*-Quarks und Elektronen. Die Atomkerne bestehen aus Protonen und Neutronen. Diese setzen sich aus je 3 Quarks zusammen.

Ladung
-1e
$+\frac{2}{3}e$
$1\frac{1}{3}e$
1e
0 e

Quarks:	u	u	d	= Proton
Ladungen:	$+\frac{2}{3}e$	$+\frac{2}{3}e$	$-\frac{1}{3}e$	= 1e
Quarks:	u	d	d	= Neutron
Ladungen:	$+\frac{2}{3}e$	$-\frac{1}{3}e$	$-\frac{1}{3}e$	= 0e

Es ist nicht bekannt, warum die Ladung der Quarks exakt -1/3 e oder +2/3 e, also ein rationales Vielfaches der Ladung der Elektronen, sein sollte. Damit ist auch nicht klar, warum Neutronen elektrisch neutral sind und warum die Ladung der Protonen exakt entgegengesetzt gleich der Ladung der Elektronen sein sollte (siehe aber "Grand Unified Theories"). Experimentell findet man für die Summe der Ladungen von Proton + Elektron

$$|q_p + q_e| < 10^{-21} e$$

Im Folgenden wird postuliert, dass die Ladungen von Elektronen und Protonen betragsmäßig exakt gleich sind.

- Atome bestehen aus Protonen im positiv geladenen Kern, an den durch die elektrische Anziehungskraft eine Hülle von negativ geladenen Elektronen gebunden ist. Atome sind elektrisch neutral.
- Die Summe der elektrischen Ladungen ist in allen Prozessen erhalten. Man kann zwar elektrisch geladene Teilchen neu erzeugen oder vernichten, aber nur so, dass die Ladung erhalten bleibt. Theoretisch lässt sich auch die Ladungserhaltung aus dem Prinzip der Eichinvarianz ableiten.

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup>Dies ist nicht selbsverständlich, kann aber für den Elektromagnetismus exakt gezeigt werden (Abel'sche Eichtheorie des Elektromagnetismus). Für die starke und schwache Wechselwirkung gelten andere Gesetze.



Abb. 2.5 Proton-Proton-Kollision im CMS Experiment am Large Hadron Collider. Gezeigt ist die Krümmung im Magnetfeld von neu produzierten positiv und negativ geladenen Teilchen, die aus Quarks bestehen. Die Summe aus positiven und negativen Ladungen bleibt auch bei höchsten Energien in Prozessen der elektromagnetischen, starken und schwachen Wechselwirkung erhalten.

## 2.4 Das Elektrische Feld

Die Coulomb-Kraft lässt sich auch so interpretieren, dass eine der beiden elektrischen Punktladungen im Coulomb-Gesetz (hier:  $q_1$ ) am Ort  $\vec{r}_1$  ein elektrisches Feld  $\vec{E}(\vec{r})$  im Raum erzeugt. Dieses elektrische Feld übt dann auf eine (Probe-) Ladung q' am Ort  $\vec{r}$  die Kraft

$$\vec{F} = q' \cdot \vec{E}(\vec{r})$$

aus. Das elektrische Feld einer Punktladung am Ort $\vec{r}_1$ ist damit

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{(\vec{r} - \vec{r}_1)^2} \vec{e}_r$$
(2.8)



**Abb. 2.6** Richtung des elektrischen Feldes.

 $\operatorname{mit}$ 

$$\vec{e}_r = rac{\vec{r} - \vec{r}_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|}$$

Für eine positive Ladung  $q_1$  zeigt der elektrische Feldvektor von der Ladung weg. Das  $\vec{E}$ - Feld lässt sich durch Feldlinien darstellen. Sie verlaufen in jedem Raumpunkt in Richtung des Feldes. Ihre Dichte ist ein Maß für die Stärke des elektrischen Feldes.

Das elektrische Feld hat Bedeutung weit über die Coulomb-Kraft hinaus. Es kann selber Energie tragen und ist damit zusätzlich zu den geladenen Teilchen ein dynamischer Freiheitsgrad elektrischer Systeme. Es kann auch ohne Ladungen durch Änderungen von Magnetfeldern erzeugt werden. Auch umgekehrt gilt, dass Änderungen elektrischer Felder Magnetfelder erzeugen.

# 2.5 Elektrisches Potential und Spannung

Die potentielle Energie einer Probeladung q' am Ort  $\vec{r}$  in einem festen elektrischen Feld  $\vec{E}(\vec{r})$  ist aufgrund der Coulomb-Kraft

$$E_{pot}(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = -q' \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E} \, d\vec{s}$$

Hierbei ist  $\vec{r}_0$  ein beliebig wählbarer Bezugspunkt. Physikalische Bedeutung hat nur die Differenz der potentiellen Energien an zwei Orten  $\vec{r}_1$  und  $\vec{r}_2$ , da sie unabhängig vom Bezugspunkt  $\vec{r}_0$  ist,

$$E_{pot}(\vec{r}_2) - E_{pot}(\vec{r}_1) = -q' \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_2} \vec{E} \, d\vec{s} + q' \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \vec{E} \, d\vec{s} = -q' \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} \, d\vec{s}$$

Wir definieren das elektrische Potential  $\varphi(\vec{r})$  durch

$$E_{pot}(\vec{r}) = q' \varphi(\vec{r}) \tag{2.9}$$

so dass

$$\varphi(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E} \, d\vec{s} \tag{2.10}$$

Die Umkehrung dieser Beziehung mit Hilfe des Gradienten lautet

$$\vec{E} = -\nabla\varphi \tag{2.11}$$

Das Potential ist also ein skalares Feld. Es ist unabhängig von der Probeladung q'. Aus ihm lässt sich leicht das  $\vec{E}$ -Feld berechnen. Potentialdifferenzen werden als Spannung bezeichnet, also

$$U = \varphi(\vec{r}_2) - \varphi(\vec{r}_1)$$
(2.12)

Die Einheit des Potentials und der Spannung ist das Volt (V)

$$\left[\varphi\right] = \left[U\right] = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{C}} = \frac{\mathrm{kg}\,\mathrm{m}^2}{\mathrm{A}\,\mathrm{s}^3} = 1\,V$$

Für das elektrische Feld ist damit eine praktische Einheit

$$[E] = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$$

**Beispiel 1:** Durchläuft ein Teilchen mit einer Elementarladung (q' = 1e) eine Potentialdifferenz von U = 1 Volt, so ändert sich seine potentielle Energie und seine kinetische Energie (je nach Bewegungsrichtung) um  $q'U = 1e \cdot 1V$ . Diese Energieeinheit wird als ein eV bezeichnet und beträgt

$$1 \,\mathrm{eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \,\mathrm{J} \tag{2.13}$$

Chemische Bindungsenergien zwischen Atomen in einem Molekül liegen typisch im Bereich E = 1 eV, die Masse des Elektrons beträgt  $E_e = m_e c^2 = 511000$  eV, die des Protons  $E_p = m_p c^2 = 938000000$  eV. Elektronvolt eV

elektrisches Potential  $\varphi$ 

Spannung U

**Beispiel 2:** Wir betrachten eine Punktladung q, die am Ursprung  $(\vec{r} = 0)$  festgehalten wird. Im Feld  $\vec{E}$  dieser Ladung wird eine Probeladung q' aus unendlich großer Entfernung auf die Ladung q zubewegt. Für eine Punktladung wählt man als Bezugspunkt  $r_0 = \infty$  und legt die potentielle Energie dort per Konvention fest zu

$$E_{pot}(r_0 = \infty) = 0, \qquad \qquad \varphi(r_0 = \infty) = 0$$

Haben beide Ladungen das gleiche Vorzeichen so stoßen sich die Ladungen ab. Gegen diese Kraft muss Arbeit verrichtet werden, dem System wird also potentielle Energie zugeführt. Für ein Zentralfeld  $\vec{E}$  gilt

$$\vec{E} \, d\vec{s} = E \, \vec{e}_r \, d\vec{s} = E \, dr$$

so dass die potentielle Energie nur vom Abstand r vom Urprung abhängt,  $\varphi = \varphi(r)$ . Damit erzeugt das E-Feld eine konservative Kraft, das Integral ist unabhängig vom Weg.

$$\varphi(r) = -\int_{\infty}^{r} E \, dr = -\int_{\infty}^{r} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \, dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r} \Big|_{\infty}^{r}$$

und damit

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r}$$
(2.14)

Das Potential ist nur vom Betrag von r abhängig. Damit sind Flächen gleichen Potentials (Äquipotentialflächen) Kugelflächen um die Punktladung und immer senkrecht zu den Feldlinien. Äquipotentialflächen mit  $\varphi(\vec{r}) = const$  stehen senkrecht auf dem *E*-Feld, da eine Ladung bei einer Bewegung senkrecht zum *E*-Feld keine Arbeit verrichtet. Da  $\varphi$  nur von r abhängt gilt für eine Punktladung

$$\vec{E} = -\nabla \varphi(r) = -(\partial_r \varphi) \vec{e}_r$$

Der Gradient von  $\varphi$  steht senkrecht auf den Äquipotentialflächen  $\varphi = const.$ 

## 2.6 Influenz und Metalle

Metalle zeichnen sich durch Kristallstrukturen aus, die aus positv geladenen Atomrümpfen bestehen, während Valenzelektronen über das ganze Gitter verteilt sind und nicht mehr an ein einzelnes Atom gebunden sind. Diese frei beweglichen Elektronen liegen in hoher Zahl vor und können ihre Position durch äußere  $\vec{E}$ -Felder leicht ändern. Metalle sind daher sehr gute elektrische Leiter. Bringt man einen Leiter in ein stationäres elektrisches Feld, so bewegen sich so lange Ladungen auf die Oberfläche zu, bis die dadurch aufgebaute Oberflächenladung das äußere Feld im Innern kompensiert. Diese Verschiebung der Elektronen erfolgt sehr schnell und endet, wenn sich durch die Ladung der Elektronen und Atomrümpfe ein Gegenfeld aufgebaut hat, das das äußere Feld kompensiert. Für statische E-Felder gilt daher sobald sich ein Gleichgewicht eingestellt hat:



Abb. 2.7 Ebenen konstanten Potentials um eine Punktladung.



Abb. 2.8 Metall in einem äußeren E-Feld

- Das gesamte *E*-Feld im Innern eines Metalls ist Null, denn  $\vec{E} \neq 0$  würde zu einer weiteren Verschiebung der Leitungselektronen führen.
- Das *E*-Feld steht senkrecht auf der Oberfläche des Metalls, denn jede Tangentialkomponente führt zu einer weiteren Verschiebung der Elektronen parallel zur Oberfläche.
- Das Potential im Innern des Metalls ist damit konstant, die Oberfläche eines Metalls also eine Äquipotentialfläche,  $\varphi = const.$

Diese Verschiebung der Elektronen durch ein äußeres E-Feld nennt man Influenz. Sie führt auch dazu, dass ein elektrisch neutrales Metall von einem äußeren Feld angezogen wird, siehe Fig. 2.2.

#### Beispiel: Trennung von Ladungen

In einem Feld E wird eine Leiterplatte von einer anderen getrennt. Danach tragen beide Platten entgegengesetzt gleiche Ladungen.



Abb. 2.9 Trennung zweier Leiterplatten in einem äußeren Feld

**Spiegelladung** Wir betrachten eine Ladung vor einer insgesamt ungeladenen Matallplatte. Die influenzierte Ladung in der Platte ändert das E-Feld außerhalb des Leiters, so dass die Feldlinien senkrecht auf der Metalloberfläche stehen. Das enstehende Gesamtfeld entspricht dem eines Feldes, das eine Spiegelladung mit entgegengesetztem Vorzeichen auf der anderen Seite der Metalloberfläche erzeugen würde. Das E-Feld einer Punktladung im Abstand a vor einer ebenen Leiterfläche läßt sich durch eine Spiegelladung im gleichen Abstand hinter der Leiterfläche darstellen.

**Faraday'scher Käfig** Ist ein Hohlraum von einem Leiter umgeben, so schirmt die influ-enzierte Ladung ein äußeres *E*-Feld komplett ab. Der feldfreie Innenraum wird Faraday'scher Käfig genannt. Dies macht man sich auch beim Van de Graaf Generator zunutze. Hierbei rotiert ein Band über zwei Rollen. Es wird mit Ladungen (aus einer Spannungsquelle) besprüht, die dann im Innern einer metallischen Hohlkugel auf die Kugel abgeleitet werden. Da im Innern der Kugel (fast) kein Feld ist, können immer weiter Ladungen nachgeführt werden. Die Ladungen stoßen sich gegenseitig ab und fließen daher auf die äußere Oberfläche der Kugel. Dort baut sich eine hohe Oberflächenladung und Spannung auf. Diese hängt nur von der Isolation der Kugel und der Luftfeuchtigkeit ab und beträgt oft bis zu 100 kV.

Influenz



**Abb. 2.10** Feld einer Ladung vor einer Metallfläche mit Spiegelladung



Abb. 2.11 Van de Graaf Generator

# 2.7 Ladungsverteilungen

### 2.7.1 Superpositionsprinzip

Experimentell findet man, dass sich die Coulomb-Kraft mehrerer Ladungen  $q_i$  addieren lässt, so dass für eine Probeladung q' gilt

$$\vec{F}_{ges} = \sum_{i} \vec{F}_{i} = \frac{1}{4\pi\epsilon_{0}} \frac{q' q_{1}}{(\vec{r}_{0} - \vec{r}_{1})^{2}} \vec{e}_{01} + \frac{1}{4\pi\epsilon_{0}} \frac{q' q_{2}}{(\vec{r}_{0} - \vec{r}_{2})^{2}} \vec{e}_{02} + \dots$$

mit  $\vec{e}_{0i}$  als Einheitsvektor mit Richtung von  $q_i$  nach q'. Da  $\vec{F}$  linear von  $\vec{E}$  abhängt, folgt für elektrische Felder und auch für das Potential allgemein

$$\vec{E}_{ges} = \sum_{i} \vec{E}_{i}, \qquad \qquad \varphi_{ges} = \sum_{i} \varphi_{i}$$
(2.15)

Ähnliche Gleichungen gelten auch für Magnetfelder und die dazugehörigen Potentiale. Diese Superpositionsgesetze für Kräfte und Felder scheinen trivial. Sie hängen aber kritisch davon ab, dass in den Gleichungen des Elektromagnetismus alle Felder nur linear auftauchen. Tatsächlich ist dies für die Maxwell-Gleichungen gegeben. Diese Linearität ist gleichbedeutend mit der Aussage, dass die Felder sich gegenseitig nicht stören oder beeinflussen (Licht wechselwirkt nicht mit sich selber). Für die schwache und starke Wechselwirkung gilt das nicht. Die entsprechenden Felder reagieren miteinander, so dass auch das Superpositionsgesetz für diese Wechselwirkungen nicht im obigen Sinn gilt.

Das Superpositionsgesetz für den Elektromagnetismus bedeutet, dass sich die Felder für Ladungsverteilungen leicht wie oben gezeigt (als Summen) berechnen lassen.

Da die Elementarladung sehr klein ist und häufig sehr viele Elektronen oder Protonen betrachtet werden, macht es Sinn, auch (Integrale über) kontinuierliche Ladungsverteilungen zu betrachten. Hierzu definiert man die Raumladungsdichte

$$\varrho(\vec{r}) = \frac{\Delta q}{\Delta V} \quad \text{für} \quad \Delta V \to 0$$
(2.16)

Damit ist die Gesamtladung q in einem Volumen V gegeben durch

$$q = \iiint \varrho \, dV \tag{2.17}$$

Flächenladungsdichte $\sigma$ 

Raumladungsdichte  $\rho$ 

Analog ist die Flächenladungsdichte 
$$\sigma$$
 z.B. an der Oberfläche eines Leiters definiert durch

$$\sigma(\vec{r}) = \frac{\Delta q}{\Delta A} \qquad \text{für} \qquad \Delta A \to 0$$

Die Gesamtladung q auf einer Fläche A ist dann

$$q = \iint \sigma \, dA$$

18

## 2.7.2 Elektrischer Dipol in einem äußeren Feld

Ein Dipol ist eine Anordnung von zwei entgegengesetzt gleichen Ladungen  $\pm q$ , die sich im Abstand  $\vec{a} \neq 0$  befinden.  $\vec{a}$  zeigt von der negativen zur positiven Ladung. Das elektrische Dipolmoment  $\vec{p}$  ist definiert durch

$$\vec{p} = q \cdot \vec{a} \tag{2.18}$$

In einem homogenen äußeren *E*-Feld wirkt auf den Dipol insgesamt keine Kraft,

$$\vec{F} = \vec{F}_{+} + \vec{F}_{-} = q \cdot \vec{E} - q \cdot \vec{E} = 0$$
(2.19)

Das Drehmoment  $\vec{M}$  auf den Dipol ist in diesem Fall

$$\vec{M} = \sum \vec{r} \times \vec{F} = \frac{\vec{a}}{2} \times \vec{F}_{+} + \frac{-\vec{a}}{2} \times \vec{F}_{-} = q \cdot \vec{a} \times \vec{E}$$
(2.20)

und daher

$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E} \tag{2.21}$$

Die potentielle Energie des Dipols im homogenen E-Feld ist

$$E_{pot} = q_+\varphi_+ + q_-\varphi_- = q\varphi_+ - q\varphi_-$$
(2.22)

$$= -q \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_+} \vec{E} \, d\vec{s} + q \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_-} \vec{E} \, d\vec{s} = -q \int_{\vec{r}_-}^{\vec{r}_+} \vec{E} \, d\vec{s} \quad (2.23)$$

$$= -q\vec{E} \int_{\vec{r}_{-}}^{\vec{r}_{+}} d\vec{s} = -q\vec{E}\,\vec{a} \tag{2.24}$$

 $\operatorname{oder}$ 

$$E_{pot} = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$
(2.25)

Der Dipol dreht sich also im *E*-Feld so, dass  $\vec{p}$  in Richtung des  $\vec{E}$ -Feldes zeigt. Er ist im Gleichgewicht, wenn er parallel zum Feld steht, denn dann ist die potentielle Energie minimal.

In einem inhomogenen E-Feld ist die gesamte Kraft auf den Dipol

$$\vec{F} = q \cdot (\vec{E}_+ - \vec{E}_-) \neq 0$$

Für einen im  $\vec{E}$ -Feld ausgerichteten Dipol wird der Dipol also insgesamt in die Richtung gezogen, in der das  $\vec{E}$ -Feld stärker wird.

### 2.7.3 Das Potential eines Dipols

Durch Überlagerung der Einzelpotentiale im Punkt  $\tilde{R}$  ergibt sich

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2}\right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{r_2 - r_1}{r_1 \cdot r_2}$$



**Abb. 2.12** Dipol in einem homogenen  $\vec{E}$ -Feld



Abb.2.13Elektrischer Dipol19



**Abb. 2.14** Elektrisches Feld eines Dipols (links) und von zwei gleich großen Ladungen (rechts).

Häufig reicht es in erster Näherung, das Feld in großer Entfernung  $r \gg a$  vom Dipol zu berechnen. Hierfür gilt

$$r_2 - r_1 \approx a \cos \theta \qquad r_1 r_2 \approx r^2$$

so dass

$$\varphi_{fern} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{a\cos\theta}{r^2} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\cos\theta}{r^2}$$
$$\varphi_{fern} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3} \qquad (2.26)$$

Weggelassen sind Terme, die stärker abfallen als  $r^{-2}$ . Das Potential eines Dipols fällt also mit  $r^{-2}$  ab, das Potential einer Punktladung dagegen mit  $r^{-1}$ .

Die elektrische Feldstärke eines Dipols (in Fernfeld Näherung) ergibt sich aus

$$E_{fern} = -\nabla \varphi_{fern}$$

Die x-Komponente lautet

$$E_{fern,x} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{p_x x + p_y y + p_z z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right)$$
(2.27)

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{3\,x\,\vec{p}\,\cdot\,\vec{r}}{r^5} - \frac{p_x}{r^3}\right) \tag{2.28}$$

so dass insgesamt

$$\vec{E}_{fern} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{3\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^5}\vec{r} - \frac{\vec{p}}{r^3}\right)$$
(2.29)

Die radiale und die transversale Feld-Komponente ergeben sich aus der Darstellung des  $\nabla$ -Operators in Kugelkoordinaten (siehe Formelsammlung)

$$E_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{p \cos \theta}{2\pi\epsilon_0 r^3} \qquad \qquad E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

Die Kompenente  $E_{\phi}$  ist aus Symmetriegründen gleich Null.

## 2.7.4 Flächenladungen, Kondensator und Kapazität

Die Flächenladungsdichte  $\sigma$  einer unendlich ausgedehnten Metallfläche sei konstant. Berechnet werden soll das  $\vec{E}$ -Feld im Punkt Pmit Abstand z von der Platte. Für einen schmalen Kreisring (wie in Abb. 2.15 gezeigt) mit Ladung  $dq = \sigma \cdot dA = \sigma \cdot 2\pi r \cdot dr$  ist

$$d\vec{E}(z,r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma 2\pi r \, dr}{R^2} \cos\theta \, \vec{e}_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{r \, dr}{R^2} \frac{z}{R} \, \vec{e}_z \tag{2.30}$$

Aus Symmetriegründen wird das  $\vec{E}$ -Feld nur in z-Richtung zeigen. Der Faktor  $\cos \theta = z/R$  sichert, dass von jedem Teil des Kreisrings nur die  $\vec{E}$ -Feld Komponente in z-Richtung benutzt wird. Hierbei ist R(r) der Abstand des Kreisrings von P. Das Integral über die ganze Fläche von r = 0 bis  $r = \infty$  kann wegen  $R^2 = z^2 + r^2$  und damit r dr = R dR umgerechnet werden in

$$\vec{E} = \int_{r=0}^{r=\infty} d\vec{E}(z,r) = \int_{r=0}^{r=\infty} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{r \, dr}{R^2} \frac{z}{R} \vec{e}_z \qquad (2.31)$$

$$= \int_{R=z}^{R=\infty} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{R dR}{R^2} \frac{z}{R} \vec{e}_z = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \vec{e}_z \int_{R=z}^{R=\infty} \frac{dR}{R^2} \qquad (2.32)$$

und damit

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z \tag{2.33}$$

Da die Fläche unendlich ausgedehnt sein soll, ist das Ergebnis unabhängig von z; das Feld ist überall im Raum gleich (homogen).

**Plattenkondensatoren** bestehen im einfachsten Fall aus zwei parallelen Metallplatten im Abstand *d*. Werden die Platten mit entgegengesetzt gleicher Ladungsdichte  $\pm \sigma$  aufgeladen, so addieren sich im Raum zwischen den Platten die  $\vec{E}$ -Felder vektoriell,  $\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-$ ,

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_z \tag{2.34}$$

wobe<br/>i $\vec{E}$ von der positiv geladenen zur negativ geladenen Platte<br/> zeigt. Die Spannung zwischen der + und – Platte ist dann

$$U = \varphi_{+} - \varphi_{-} = -\int_{\vec{r}_{0}}^{\vec{r}_{+}} \vec{E} \, d\vec{s} + \int_{\vec{r}_{0}}^{\vec{r}_{-}} \vec{E} \, d\vec{s} = -\int_{\vec{r}_{-}}^{\vec{r}_{+}} \vec{E} \, d\vec{s} \qquad (2.35)$$

$$\boxed{U = E \cdot d} \tag{2.36}$$

Auch für endlich große Platten mit Radius r wird obige Rechnung gültig bleiben, solange der Abstand viel kleiner als die Ausdehnung r der Platten ist,  $d \ll r$ . Für eine Plattenfläche A erhält man als Gesamtladung  $q = \sigma \cdot A$  und damit

$$U = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{d}{A} q \tag{2.37}$$



**Abb. 2.15** *E*-Feld über einer geladenen Metallplatte.

Feld eines Plattenkondensators Die Kapazität einer Anordnung aus Leitern wird allgemein definiert als

$$C = \frac{q}{U} \tag{2.38}$$

und gibt an, wieviel Ladung bei gegebener Spannung gespeichert ist. Im Fall des Plattenkondensators ist also

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d} \tag{2.39}$$

Kapazitäten werden oft in der Einheit 'Farad' angegeben, wobei <br/>1 $F=1\,C/V$ ist.

Die Homogenität des Feldes in einem Plattenkondensator lässt sich z.B. mit der Braun'schen Röhre zeigen, bei der ein Strahl von Elektronen in den Kondensator gelenkt wird. Bei konstanter Kraft ergibt sich eine Parabelbahn.



Abb. 2.16 Ablenkung eines Elektronen-Strahls in einer Braun'schen Röhre

### 2.7.5 Raumladungen und Multipole

Für mehrere Ladungen an beliebigen Positionen im Raum oder eine beliebige Raumladungsdichte reicht es nicht mehr aus, nur die Gesamt-Ladung oder das Dipolmoment zu betrachten. Da wir bereits gesehen haben, dass das Coulomb-Potential für

- eine Punktladung ~  $R^{-1}$
- einen Dipol im Fernfeld ~ $R^{-2}$

mit dem Abstand R abfällt, bietet es sich an, für den allgemeinen Fall das Potential als eine Reihenentwicklung in Potenzen von  $R^{-n}$ zu beschreiben, die sogenannte Multipolentwicklung. Die einzelnen Terme nennt man Monopol, Dipol, Quadrupol, Sextupol etc.. Die Multipol-Näherung ist nur gut für Abstände, die sehr viel größer sind als die Abstände der Ladungen untereinander.

Bei mehreren diskreten Ladungen  $q_1, q_2 \dots q_n$  mit den Koordinaten  $\vec{r_1}, \vec{r_2} \dots \vec{r_n}$  ergibt sich das

- Monopolmoment (die Gesamt-Ladung) zu  $q = \sum_i q_i$
- Dipolmoment zu

$$\vec{p} = q_1 \vec{r}_1 + q_2 \vec{r}_2 \dots + q_n \vec{r}_n = \Sigma q_i \vec{r}_i \tag{2.40}$$

wobei  $\sum_{i} q_i = 0$  sein muss.

Kapazität



Abb. 2.17 Multipolentwicklung



**Abb. 2.18** Dipol-Moment eines  $H_2O$  Moleküls.

Für den kontinuierlichen Fall mit der Ladungsdichte $\varrho(\vec{r})$  definiert man entsprechend

• Monopolmoment:

$$q=\iiint \varrho\,dV$$

• Dipolmoment:

$$\vec{p} = \iiint \varrho \, \vec{r} \, dV$$

• Quadrupolmoment: (analog für  $Q_{yy}, Q_{zz}, Q_{xz}, Q_{yz}$ )

$$Q_{xx} = \iiint \varrho \, x^2 \, dV \qquad \qquad Q_{xy} = \iiint \varrho \, xy \, dV$$

Das Potential  $\varphi(\vec{R})$  am Ort  $\vec{R} = (X, Y, Z)$  ist dann gegeben durch

$$4\pi\epsilon_0 \varphi = \frac{q}{R} + \frac{\vec{p}\vec{R}}{R^3} + \frac{1}{2R^5} \left( Q_{xx} (3X^2 - R^2) + \dots + Q_{xy} \, 6XY + \dots \right) + \frac{1}{R^7} \dots$$

## 2.8 Gauß'scher Satz

### 2.8.1 Integrale und Differentielle Form

Nach dem Coulomb-Gesetz und dem Superpositionsprinzip lässt sich das Feld einer Ladungsverteilung aus der Addition der Felder aller Ladungen berechnen. Eine dazu äquivalente aber oft einfachere Formulierung ist der Gauß'sche Satz der Elektrostatik. Er besagt, dass der Fluß  $\Phi$  des elektrischen Feldes durch eine geschlossene Oberfläche A proportional zur gesamten eingeschlossenen Ladung q ist,

$$\Phi = \iint_{A} \vec{E} \, d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0} \tag{2.41}$$

Dabei ist die Ladung innerhalb A im Volumen V

$$q = \iiint_V \varrho \, dV \tag{2.42}$$

Dies ist die erste Maxwell'sche Formel in integraler Form. Die Oberfläche A kann beliebig geformt sein. Der Flächenvektor  $d\vec{A}$  zeigt überall nach außen. Ladungen außerhalb der Oberfläche tragen nicht bei (obwohl ihre Felder natürlich auch die Oberfläche durchdringen).

Unter Benutzung des Gauß'schen Integralsatzes der Mathematik (siehe Formelsammlung in Abschnitt A) folgt

$$\iiint_V (\nabla \vec{E}) \, dV = \oint_A \vec{E} \, d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \, \iiint_V \varrho \, dV \tag{2.43}$$

1. Maxwell'sche Formel in integraler Form Da diese Gleichung auch für beliebig kleine Volumen gilt, folgt durch Vergleich der Integranden die differentielle Form der 1. Maxwell'schen Gleichung. Feld und Dichte sind hierbei am gleichen Ort auszuwerten.

$$\nabla \vec{E} = \frac{\varrho}{\epsilon_0} \tag{2.44}$$

1. Maxwell'sche Formel in differentieller Form Unter Verwendung von Gleichung 2.11,  $\vec{E} = -\nabla \varphi$ , folgt die Poisson-Gleichung für das Potential,

$$\Delta \varphi = -\frac{\varrho}{\epsilon_0} \tag{2.45}$$

Poisson-Gleichung und Laplace-Gleichung Von Interesse ist häufig auch die Lösung für das Potential in räumlichen Bereichen ohne Ladung, in denen daher die sogenannte Laplace-Gleichung gilt,

$$\Delta \varphi = 0 \tag{2.46}$$

### 2.8.2 Begründung des Gauß'schen Satzes

Wir betrachten zunächst eine Punktladung q bei  $\vec{r} = 0$  mit dem Coulomb-Feld wie in Gleichung 2.8. Die Fläche soll eine Kugelfläche A mit dieser Ladung im Zentrum sein.

Eine anschauliche Begründung ergibt sich aus dem Bild der Feldlinien. Die Feldstärke E entspricht der Dichte der Feldlinien, der Fluß  $\Phi$  ist dann einfach die Anzahl der Feldlinien, die die Fläche durchqueren. Offenbar durchqueren immer alle Feldlinien der von Akomplett eingeschlossenen Ladung die Fläche A, egal wie A geformt ist. Es macht Sinn, dass die Anzahl der Feldlinien einer Ladung proportional zur Ladung sein soll.

Quantitativer ist für eine Kugelfläche A um eine Punktladung im Ursprung ein Flächenelement  $d\vec{A} = \vec{e}_r \cdot dA$ . Da auch das Feld aus Symmetriegründen radial nach außen zeigt,  $\vec{E} = E \cdot \vec{e}_r$ , folgt

$$\vec{E} \cdot d\vec{A} = E \cdot dA$$

Da Eaus Symmetriegründen nur von r und nicht von  $\theta$  und  $\phi$ abhängt, folgt mit dem Coulomb-Gesetz

Für diese Wahl der Fläche sind also Coulomb-Gesetz und Gauß'scher Satz äquivalent. Die Abhängigkeiten vom Abstand heben sich für das Feld (~ $r^{-2}$ ) und der Kugelfläche (~ $r^{2}$ ) gegenseitig auf, so dass die Größe der Fläche oder des eingeschlossenen Volumens offenbar keine Rolle spielt.

Um anders geformte Flächen zu diskutieren, drehen wir das Flächenelement  $d\vec{A}$  um einen Winkel  $\alpha$  und vergrößern es gleichzeitig um einen Faktor  $1/\cos\alpha$ , so dass es den gleichen Raumwinkel abdeckt,  $dA_1 = dA/\cos\alpha$ . Der entsprechende Fluß durch das neue Flächenelement  $\vec{A}_1$  bleibt unverändert, denn

$$d\Phi_1 = \vec{E} \cdot d\vec{A}_1 = E \cdot dA_1 \cos\alpha = E \cdot dA = d\Phi$$

Es kommt also nur auf die Abdeckung des ganzen Raumwinkels an. Man kann also die Kugel verschieben oder die Ladung in der Kugel verschieben oder die Form der Integrationsfläche ganz anders wählen, ohne dass sich der Fluß ändert.

Nach dem Superpositionsgesetz addieren sich die Felder aller Ladungen innerhalb der Fläche. Da im Gauß'schen Satz sowohl das Feld als auch die Ladungen linear auftreten, kann man die entsprechenden Gleichungen für alle Ladungen innerhalb der Fläche einfach addieren, der Gauß'sche Satz gilt also für die Gesamtladung innerhalb der Fläche, egal wie sie dort verteilt ist.

Ladungen außerhalb der Fläche A tragen nicht bei, denn ihre Feldvektoren durchdringen die Fläche erst von außen und dann von innen. Da der Flächenvektor immer nach außen zeigt, gibt es also negative und positive Beiträge zum Integral, die sich gegenseitig aufheben.

### 2.8.3 Anwendung des Gauß'schen Satzes

Bei beliebigen Ladungsverteilungen lässt sich das  $\dot{E}$ -Feld am Besten durch Integration der Ladungsdichte mit dem Coulomb-Gesetz berechnen. Hingegen ist für Ladungsverteilungen, die Symmetrien aufweisen, die Anwendung des Gauß'schen Satzes viel einfacher. Dies können vor allem ebene Symmetrien, Zylindersymmetrien oder Kugelsymmetrien sein.

#### Punktladung, Hohlkugel und Vollkugel

Zur Berechnung des  $\tilde{E}$ -Feldes außerhalb einer Vollkugel oder Hohlkugel mit Gesamt-Ladung q, Radius R betrachtet man als Integrationsfläche eine zentrierte Kugeloberfläche mit Radius r > R. Aus Symmetriegründen ist  $\tilde{E}(r) = E(r) \tilde{e}_r$ , so dass mit  $d\tilde{A} = \tilde{e}_r dA$  folgt:

$$\Phi = \iint_A \vec{E}(r) \, d\vec{A} = E(r) \, 4\pi r^2$$

Da beim Gauß'schen Satz nur die eingeschlossene Gesamt-Ladung, nicht aber deren räumliche Verteilung, eine Rolle spielt, folgt das gleiche Feld wie für eine Punktladung gleicher Größe in der Mitte dieser Kugeln, also einfach das Coulomb-Gesetz für eine entsprechende Punktladung q.

$$\vec{E}_{q,\text{Kugel},r>R} = \vec{E}_{q,\text{Punkt}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{e}_r \qquad (2.48)$$

Zur Berechnung des  $\tilde{E}$ -Feldes im Innern einer homogen geladenen Vollkugel mit Ladung q und Ladungsdichte  $\rho = q/(\frac{4}{3}\pi R^3)$  betrachtet man als Integrationsfläche eine zentrierte Kugeloberfläche mit Radius r < R. Nur die eingeschlossene Ladung  $q_{r<R}$  darf beim Gauß'schen Satz berücksichtigt werden,

$$q_{r(2.49)$$



**Abb. 2.19** Flächen zur Integration für das Feld von Kugeln.



Abb. 2.20 Feld im Innern einer homogen geladenen Kugel.

so dass

$$\vec{E}_{q,\,\text{Kugel},\,r< R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \, \frac{q_{r< R}}{r^2} \, \vec{e}_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \, q \, \frac{r}{R^3} \, \vec{e}_r \tag{2.50}$$

Das Feld steigt also im Innern einer homogen geladenen Kugel linear an. Im Zentrum ist das Feld aus Symmetriegründen Null.

Bei einer homogen geladenen Kugelschale ist das Feld im Innern überall gleich Null, denn die von einer kugelförmigen Integrationsfläche im Innern eingeschlossene Ladung ist Null.

#### Feld einer homogen geladenen, ebenen Oberfläche

Wie in Abschnitt 2.7.4 betrachten wir eine ausgedehnte Ebene mit Flächenladung  $\sigma$ . Als Integrationfläche A für den Gauß'schen Satz wählen wir die Oberfläche eines Zylinders, dessen ebene Flächen knapp oberhalb (Fläche  $A_1$ ) und unterhalb ( $A_2$ ) der Ladungsebene liegen. Die eingeschlossene Ladung ist dann  $q = \sigma A_1$ . Für eine ausgedehnte Ladungsebene ist aus Symmetriegründen das Feld  $\vec{E}_1$  und  $\vec{E}_2$  homogen und senkrecht zur Ladungsebene, so dass  $\Phi_1 = \vec{E}_1 \vec{A}_1 =$  $E_1 A_1$  ist. Aus Symmetriegründen ist  $\Phi_1 = \Phi_2$ . Auf dem Zylindermantel (Fläche  $A_3$ ) ist  $\vec{E}_3 \perp d\vec{A}_3$ . Aus dem Gauß'schen Satz folgt dann

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = 2\Phi_1 = 2E_1A_1 = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{\sigma A_1}{\epsilon_0}$$
(2.51)

Dies stimmt mit dem Ergebnis aus der viel komplizierteren Integration von Gleichung 2.33 überein,

$$\vec{E}_1 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{e}_z \tag{2.52}$$

Da  $\tilde{E}_3 \perp d\tilde{A}_3$  kann man den Zylinder beliebig hoch machen ( $A_3$  beliebig groß), ohne dass sich der Fluß ändert. Damit gilt auch, dass das Feld  $E_1, E_2$  unabhängig vom Abstand von der Ladungsfläche und damit homogen ist.

#### Feld eines geladenen Drahtes

Wir betrachten einen unendlich langen Draht mit Ladung/Länge= $\lambda$ . Als Integrationsfläche wählen wir aus Symmetriegründen einen Zylinder mit Radius R und Höhe z, der den Draht zentrisch umschliesst. Die Ladung innerhalb der Fläche ist dann  $q = \lambda L$ . In Zylinderkoordinaten  $R, \phi, z$  ist das Feld aus Symmetriegründen radial,  $\vec{E} = E\vec{e}_R$ , so dass nur der Zylindermantel zum Fluß beiträgt,

$$\Phi = \iint \vec{E} \, d\vec{A} = E(r) \, 2\pi R z = \frac{\lambda \, z}{\epsilon_0} \tag{2.53}$$

und damit

$$\vec{E}(R) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \vec{e}_R \tag{2.54}$$

#### Abb. 2.22 Integration für einen geladenen Draht.

#### Ladungsdichte in Metallen

Im Abschnitt 2.6 ergab sich für den elektrostatischen Fall, dass im Innern eines Metalls  $\vec{E} = 0$  gilt. Aus der differentiellen Form des Gauß'schen Satzes  $\nabla \vec{E} = \rho$  folgt dann als neues Ergebnis, dass die Ladungsdichte innerhalb von Metallen  $\rho = 0$  ist.



**Abb. 2.21** Integration für eine geladene Ebene.



## 2.9 Energie des *E*-Feldes

Ein Plattenkondensator sei mit der Ladung  $\pm q$  aufgeladen, so dass die Platten sich gegenseitig anziehen. Bei der Erhöhung des Plattenabstandes um d muß daher am System Arbeit verrichtet werden. Da die Feldstärke zwischen den Platten unabhängig vom Plattenabstand ist besteht also die einzige Änderung darin, dass in einem zusätzlichen Volumen  $V = A \cdot d$  ein elektrisches Feld E aufgebaut wird. Die Arbeit wird also vollständig in die Energie dieses Feldes transferiert. Die Kraft  $\vec{F}$  auf die positiv geladene Platte im Feld  $\vec{E}_{-}$ der negativ geladenen Platte ist

$$\vec{F} = q_+ \vec{E}_-$$

Da nach Gleichung 2.33 und Abbildung 2.23

$$\vec{E}_{+} = -\frac{q_{+}}{2\epsilon_{0}A}\vec{e}_{x}, \qquad \vec{E}_{-} = -\vec{E}_{+}, \qquad E = 2E_{+}$$

folgt auch

$$\vec{F} = -2\epsilon_0 A E_+^2 \vec{e}_x = -\frac{1}{2}\epsilon_0 A E^2 \vec{e}_x$$

Die im Feld des Kondensators gespeicherte Arbeit ist dann

$$W = -\int_{x}^{x+d} \vec{F} d\vec{x} = \frac{1}{2} \epsilon_0 A d E^2$$
 (2.55)

Mit der Definition der Kapazität aus Gleichung 2.38 und U = Ed zeigt sich, dass die gespeicherte Energie proportional zur Kapazität des Kondensators ist,

$$W = \frac{1}{2}CU^2 \tag{2.56}$$

Die im Volumen V = Ad gespeicherte Energiedichte ist dann

$$w = \frac{W}{V} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$$
(2.57)

Diese Gleichung gilt ganz allgemein, also auch für inhomogene E-Felder.

Alternativ kann man die Energie in einem Kondensator auch herleiten, indem man kleine Ladungsmengen von einer Platte zur anderen bringt, gegen die sich langsam durch die schon verschobene Ladungsmenge aufbauende Potentialdifferenz. Viel allgemeiner gilt jedoch für beliebige Anordnungen, dass man zur Verschiebung einer kleinen Ladungsmenge dq um eine Potentialdifferenz  $U = \Phi_2 - \Phi_1$ die Arbeit

$$dW = U \, dq = \frac{1}{C} \, q \, dq$$

aufbringen muss, wobei die Potentialdifferenz U für jede schon transferierte Ladungsmende q durch C = q/U gegeben ist. Integration ergibt dann wieder Gleichung 2.56,

$$W = \int dW = \frac{1}{C} \int q \, dq = \frac{1}{2} \frac{1}{C} q^2 = \frac{1}{2} C U^2$$



Abb. 2.23 Kraft zwischen zwei Kondensatorplatten



Bringt man Metalle in ein E-Feld, so wandern die frei beweglichen Elektronen, bis deren eigenes E-Feld das äußere Feld komplett abschirmt.

Bei nicht-metallischen Stoffen ohne frei bewegliche Ladungsträger (Monopole) ist dies nicht möglich. Die nächste Näherung der Reaktion des Stoffes auf das äußere Feld ist daher die Ausrichtung von Dipolen im Material.

- Manche Moleküle haben bereits aufgrund ihrer Bindungsstruktur ein Dipolmoment. Hierzu gehören z.B. NaCl und  $H_2O$ . Solche Dipole erfahren im äußeren *E*-Feld ein Drehmoment (siehe Abschnitt 2.7.2).
- Bei anderen Atomen oder Molekülen ohne natürliches Dipolmoment kann durch das äußere *E*-Feld die Atomhülle gegen den Kern verschoben werden. Der entstehende Dipol ist ebenfalls im äußeren Feld ausgerichtet.

Orientieren sich die Dipole im Material im Mittel in eine Richtung (Polarisation), so bleibt das Material im Innern elektrisch neutral, allerdings entstehen effektiv an den Rändern Oberflächenladungen  $\pm \sigma_p$ , die - ähnlich wie bei Metallen - das äußere Feld teilweise abschirmen. Das gesamte Dipolmoment des Dielektrikums ergibt sich aus der Summe der elementaren Dipolmomente  $\vec{p}_i$  (Superpositionsprinzip). Dieses muss gleich dem makroskopischen Dipolmoment aufgrund der Oberflächenladung sein, das sich aus der Dicke d und Volumen V = Ad des Dielektrikums ergibt,

$$\sum_{i} \vec{p}_{i} = \sigma_{p} A \, d \, \vec{e}_{E} = \sigma_{p} V \, \vec{e}_{E} \tag{2.58}$$

Die Dipolvektoren zeigen in Richtung des  $\vec{E}$ -Feldes. Die Polarisation  $\vec{P}$  ist definiert als das Dipolmoment pro Volumeneinheit. Für ein Dielektrikum im homogenen Feld eines Plattenkondensators ergibt sich

$$\vec{P} = \frac{1}{V} \sum_{i} \vec{p}_i = \sigma_p \,\vec{e}_E \tag{2.59}$$

Für die Anwendung des Gauß'schen Satzes mit der Integrationsfläche wie in Abbildung 2.25 gilt:

- Das Feld außerhalb des Kondensators ist Null.
- Das Feld an den Seiten der Integrationsfläche ist senkrecht zu den Flächenvektoren und trägt daher nicht zum Integral bei.
- Das Feld im Innern ist homogen und parallel zum Flächenvektor.

Für die Summe aus Oberflächenladung der Kondensatorplatte  $(\sigma)$ und des Dielektrikums  $(-\sigma_p)$  folgt dann

$$\iint \vec{E} \, d\vec{A} = \frac{q - q_p}{\epsilon_0} = \frac{\sigma A - \sigma_p A}{\epsilon_0}$$







Abb. 2.25 Dielektrikum in einem Kondensator.

so dass für das homogene  $\vec{E}$ -Feld gilt:

$$\vec{E} = \frac{\sigma - \sigma_p}{\epsilon_0} \vec{e}_E \tag{2.60}$$

Im Vergleich zum Feld ohne Dielektrikum ( $E_V = \sigma/\epsilon_0$ ) ist das Feld im Dielektrikum reduziert um die Polarisation des Dielektrikums,

$$\vec{E} = \vec{E}_V - \frac{\vec{P}}{\epsilon_0}$$
(2.61)

Die elektrische Verschiebungsdichte D

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}_V = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$
(2.62)

ist hingegen unabhängig von den Polarisationseigenschaften und nur von den frei beweglichen Ladungen abhängig. Das Verhältnis

$$\epsilon_r = \frac{E_V}{E} \tag{2.63}$$

ist eine reine Materialkonstante und wird als relative Dielektrizitätszahl bezeichnet. Hiermit gilt

$$\vec{D} = \epsilon_0 \, \epsilon_r \, \vec{E} \tag{2.64}$$

Auch die Spannung zwischen den Kondensatorplatten U = Ed ist damit kleiner als im Vakuum ( $U_V = E_V d$ ), so dass bei gleicher Ladung q

$$\epsilon_r = \frac{E_V}{E} = \frac{U_V}{U} = \frac{C}{C_V} \tag{2.65}$$

Die Kapazität des Kondensators steigt also mit einem Dielektrikum,

$$C = \epsilon_0 \,\epsilon_r \, \frac{A}{d} \tag{2.66}$$

Es kann also mehr Ladung gespeichert werden. Schiebt man ein Dielektrikum in einen Kondensator ein, so beobachtet man:

- Liegt eine feste Spannung U am Kondensator an, so fließen zusätzliche Ladungen auf den Kondensator.
- Ist der Kondensator aufgeladen aber isoliert, so bleibt die Ladung q konstant, aber die Spannung U sinkt.

Der Energieinhalt des Feldes

$$W = \frac{1}{2}CU^{2} = \frac{1}{2}\epsilon_{0}\epsilon_{r}\frac{A}{d}E^{2}d^{2}$$
(2.67)

und damit die Energiedichte

$$w = \frac{1}{2}\vec{D}\,\vec{E} \tag{2.68}$$

sind also geringer, wenn das Dielektrikum im Feld ist als außerhalb. Es wird also ins Feld hineingezogen.

Material	$\epsilon_r$
Vakuum	1
Luft	$1,\!000576$
$H_2O$	82
Plexiglas	$^{3,5}$
Keramiken	bis 8000

# 3 Elektrische Leitung

## 3.1 Strom und Ladungserhaltung

Elektrischer Strom wird durch die Bewegung von Ladungsträgern hervorgerufen. Er ist definiert über die Änderung der Ladung in einem bestimmten Volumen,

$$I = \partial_t q \tag{3.1}$$

Wir betrachten in einem Leiter zunächst ein Volumen V = Ax mit konstanter Raumladungsdichte  $\rho$  und Ladung  $q = \rho V$ .

Mikroskopisch betrachten wir Ladungsträger mit mittlerer Geschwindigkeit  $\vec{v} = v \vec{e}_x$ , die in der Zeit t die Strecke x zurücklegen. Die durch die Fläche A in der Zeit t transportierte Ladung ist

$$q = \varrho A x$$

so dass für den konstanten Strom ${\cal I}$ 

$$I = \frac{q}{t} = \varrho \ A \ \frac{x}{t} = \varrho \ \vec{v} \ \vec{A} = \vec{j} \ \vec{A}$$

gilt mit der konstanten Stromdichte

$$\vec{j} = \varrho \vec{v} \tag{3.2}$$

In Realität werden  $\rho$ ,  $\vec{v}$  und damit  $\vec{j}$  nicht konstant sondern ortsabhängig sein. Betrachtet man daher lieber eine infinitesimal kleine Fläche  $d\vec{A}$  mit beliebigem Winkel zur Geschwindigkeit und damit zur Stromdichte  $\vec{j}$ , so ist der entsprechende inifitesimale Strom

$$dI = \vec{j} \, d\vec{A} \tag{3.3}$$

Für beliebig geformte, makroskopische Oberflächen gilt entsprechend

$$I = \iint \vec{j} \, d\vec{A} \tag{3.4}$$

Insbesondere gilt für eine geschlossene Fläche mit dem Gauß'schen Integralsatz

$$I = \oint \vec{j} \, d\vec{A} = \iiint (\nabla \vec{j}) \, dV \tag{3.5}$$

Makroskopisch bedeutet Ladungserhaltung, dass ein Strom I von Ladungsträgern von Innen durch die Oberfläche des Volumens die Ladung innerhalb des Volumens verringert (für V konstant),

$$I = -\partial_t q = -\partial_t \iiint \varrho \, dV = -\iiint (\partial_t \varrho) \, dV \tag{3.6}$$

Diese Definition des Stroms ist ebenfalls für beliebig geformte Volumen anwendbar.

Abb. 3.1 Stromdichte durch Ladungsträger.

#### **Richtungskonvention:**

Für positiv geladene Ladungsträger zeigt die Stromdichte in Richtung ihrer Geschwindigkeit (technische Stromdichterichtung).

(3.8)

Da die letzten beiden Formeln auch für beliebige Volumen gelten müssen, folgt durch Vergleich der Integranden als Folge der elektrischen Ladungserhaltung die sogenannte Kontinuitätsgleichung in integraler und differentieller Form,

$$\nabla \vec{j} = -\partial_t \, \varrho \tag{3.7}$$

$$\oint \int \vec{j} \, d\vec{A} = -\partial_t \, q$$

Kontinuitätsgleichung: Ladungserhaltung

## 3.2 Mechanismen des Ladungstransports

Ladungsträger, die aufgrund eines äußeren elektrischen Feldes zum Strom beitragen, liegen in vielen verschiedenen Materialien vor. Ihre mittlere Geschwindigkeit  $\vec{v}$  entsteht durch die Coulombkraft, sollte also in einem homogenen *E*-Feld linear mit der Zeit wachsen. Viele Streuprozesse der Ladungsträger mit den Atomen im Material sorgen allerdings dafür, dass diese einen Teil ihrer kinetischen Energie abgeben, effektiv also gebremst werden.

Der Energieübertrag auf das Material geht als thermische Energie verloren und führt zu einer Temperaturerhöhung. Die Verlustleistung P ist die Arbeit pro Zeit,

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}(qU) \tag{3.9}$$

Bei konstanter Spannung gilt

$$P = U\frac{dq}{dt} = UI \tag{3.10}$$

Die Einheit dieser Leistung ist das Watt,  $[P] = 1 \text{ W} = 1 \text{ VA} = 1 \text{ Nms}^{-1}$ .

Wie bei einem Vorgang mit Reibung stellt sich ein Gleichgewicht zwischen beschleunigender Kraft und Reibung ein. Die im Mittel erreichte Geschwindigkeit und damit auch die Stromdichte ist normalerweise proportional zum äußeren Feld,

$$\vec{v} = \mu \vec{E}, \qquad \vec{j} = \varrho \vec{v} = \varrho \mu \vec{E} = \sigma_{el} \vec{E} \qquad (3.11)$$

Die Beweglichkeit  $\mu$  beziehungsweise die elektrische Leitfähigkeit  $\sigma_{el}$  sind Materialkonstanten. Das Ohm'sche Gesetz gilt, wenn genügend Stöße vorkommen, entsprechend effektiv Energie abgegeben wird und durch die Energieübertragung selber keine neuen Ladungsträger entstehen (Ionisation). In den meisten Materialien ist dies erfüllt, so dass  $\mu$  und  $\sigma_{el}$  unabhängig von  $\vec{E}$  sind.

Drückt man das E-Feld durch die Potentialdifferenz U = EL entlang des Stromwegs L aus, so folgt

$$I = j A = \sigma_{el} E A = \sigma_{el} \frac{A}{L} U$$

#### **Ohm'sches** Gesetz

Damit ist der elektrische Widerstand  ${\cal R}$ eines langen Leiters gegeben durch

$$R = \frac{U}{I} = \frac{1}{\sigma_{el}} \frac{L}{A}$$
(3.12)

mit der Einheit Ohm,  $[R] = \Omega = V/A$ . Der materialspezifische Widerstand  $\rho_s$  hingegen ist das Inverse der Leitfähigkeit,

$$\rho_S = \frac{1}{\sigma_{el}} = R \frac{A}{L} \tag{3.13}$$

und hat die Einheit  $\Omega$ m.

- In Metallen liegen, wie bereits erwähnt, Elektronen in großer Zahl als Ladungsträger vor, die sich im Kristallgitter frei bewegen können. Der Widerstand ensteht durch Streuprozesse der Elektronen an Brüchen oder Fehlstellen im Kristall sowie bei höheren Temperaturen durch die Störung des Gitters aufgrund der thermischen Bewegung der Atome im Kristall. Der Widerstand steigt daher mit der Temperatur.
- In perfekten Halbleiterkristallen brauchen Elektronen eine Mindestenergie ΔE, um aus der Valenzbindung in das sogenannte Leitungsband zu gelangen (Silizium: ΔE = 1, 1 eV). Erst dann tragen sie zur Leitfähigkeit bei. Licht oder auch thermische Energie kann hierfür ausreichend Energie liefern. Die Wahrscheinlichkeit bei einer Temperatur T die Energielücke zu überspringen ist proportional zu ~ exp(-ΔE/kT), die Ladungsträgerdichte ρ steigt also schnell mit der Temperatur<sup>4</sup>. Atome im Kristall, die ein Elektron an das Leitungsband abgegeben haben, können von Nachbaratomen ein Elektron aufnehmen. Durch weitere Prozesse dieser Art entsteht effektiv ein zusätzlicher Strom, der als Bewegung positiver Ladungsträger (Defektelektronen) beschrieben werden kann. Diese haben eine andere Dichte und Beweglichkeit als die Elektronen im Valenzband. Für den Gesamtstrom gilt dann

$$\vec{j} = (\varrho_-\mu_- + \varrho_+\mu_+) \vec{E}$$

Bei nicht perfekten Kristallen mit Fremdatomen anderer Bindungsstrukturen können diese weitere Elektronen an das Leitungsband abgeben (Donatoren) oder von benachbarten Kristallatomen Elektronen aufnehmen (Akzeptoren). Besteht der Halbleiter aus 4-wertigem Silizium, so können 3- oder 5-wertige Atome in Konzentrationen von z.B. ~  $10^{-7}$  eingebracht werden. Der durch Dotierung entstehende Anteil der Ladungsdichte ist unabhängig von der Temperatur und führt zu deutlich erhöhter Leitfähigkeit.

Material	$ ho_S$
Kupfer	$1,7\cdot 10^{-8}\Omega m$
Porzellan	$3\cdot 10^{16}\Omega m$



Abb. 3.2 Energieniveaus im Halbleiter

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup>Ohne Kühlung besteht daher die Gefahr, dass die Verlustwärme den Halbleiter aufheizt, hierduch mehr Ladungsträger entstehen, wodurch der Strom und damit wiederum die Verlustwärme steigt (Thermal Runaway).

- In Lösungen liegen in der Regel Anionen und Kationen vor, die beide zur Leitfähigkeit beitragen.
- Gasentladungen entstehen bei sehr hohen Spannungen durch Stoßionisation, d.h. beschleunigte Elektronen ionisieren weitere Gasatome und es entsteht ein Lawineneffekt (Luft: 3,3 kV/mm).
- In Plasmen liegen Atome weitgehend ionisiert vor, so dass es sehr viele sowohl negativ wie positiv geladene frei bewegliche Ladungsträger gibt. Plasmen liegen z.B. in der außeren Atmosphäre und in der Sonne vor.

## 3.3 Stromkreise

Leiter: Wie bereits diskutiert ist der Widerstand eines Metalldrahts extrem klein, es sei denn, der Draht ist extrem lang oder extrem dünn. Die Leitungen in einem Stromkreis haben daher in der Regel einen vernachlässigbaren Widerstand und Energieverlust. In dieser Näherung ist die Spannung an jedem Punkt eines Leiters in einem Stromkreis gleich.

**Ohm'scher Widerstand:** An einem extrem dünnen und langen Draht tritt ein Ohm'scher Widerstand R auf. Es entsteht daher an ihm ein Spanungsabfall von U = RI.

**Spannunsgquellen:** In einer Spannungs- oder Stromquelle wird Energie z.B. durch eine chemische Reaktion oder aufgrund mechanischer Bewegung in einem Generator so umgewandelt, dass Elektronen Energie gewinnen und damit auf höheres Potential gehoben werden. In der Spannungsquelle fließen also Elektronen aufgrund einer sogenannten "elektro-motorischen Kraft" (emk) anders als bisher diskutiert von negativem zu positivem Potential.

Dies ist nicht mit beliebiger Effizienz möglich, so dass auch in der Spannungsquelle ein Energieverlust auftritt, der in einem Schaltbild ersatzweise als Innen-Widerstand  $R_i$  dargestellt werden kann. Diese sind in der Regel klein,  $R_i \leq 1\Omega$ , können aber nur vernachlässigt werden, wenn die Außenwiderstände deutlich größer sind,  $R_i << R$ .

**Knotenregel:** Elektrische Ladungserhaltung gilt an jedem Punkt eines Leiters und insbesondere auch an Kontaktstellen zwischen 3 oder mehr Leitern (Knoten). Für die Ströme in den beteiligten Leitern muss daher gelten

$$\partial_t q = 0 = \sum_i I_i \tag{3.14}$$



Abb. 3.3

Stromkreis mit Spannungsquelle, Innenwiderstand  $R_i$ und äußerem Verbraucherwiderstand R. Maschenregel: Da in einer geschlossenen Leiterschleife

$$\sum U = -\oint \vec{E}\,d\vec{s} = 0$$

gilt, folgt, dass die Spannungsverluste  $U_a$  an äußeren Widerständen  $R_a$  von den Spannungsquellen  $U_{emk}$  kompensiert werden müssen,

$$\sum U_{emk} = \sum_{a} U_a = \sum_{a} R_a I_a \tag{3.15}$$

**Addition von Widerständen:** Bereits aus der Gleichung 3.12 für den Widerstand eines langen Drahts ist klar, dass eine Verlängerung des Drahts zu einer linearen Erhöhung des gesamten Widerstands führt,

$$L_{ges} = L_1 + L_2 \qquad \Rightarrow \qquad R_{ges} = R_1 + R_2 \tag{3.16}$$

Für die **Reihen-Schaltung** in Abbildung 3.4 folgt auch aus der Knotenregel, dass der Strom durch alle Widerstände gleich ist,  $I = I_1 = I_2$ . Kann man den Innenwiderstand der Spannungsquelle vernachlässigen, so folgt mit der Maschenregel

$$U_{emk} = U_1 + U_2 = R_1 I_1 + R_2 I_2 = (R_1 + R_2) I$$

Hierbei wurden die Vorzeichen der einzelnen Beiträge durch die Stromdichte-Richtung in der Abbildung festgelegt. Es folgt wie in Gleichung 3.16 antizipiert für die Reihenschaltung

$$R_{ges} = \frac{U_{ges}}{I_{ges}} = \frac{U_1 + U_2}{I} = R_1 + R_2$$
(3.17)

Falls relevant muss der Innenwiderstand der Spannungsquelle addiert werden,  $R_{qes} = R_i + R_1 + R_2$ .

In der **Parallel-Schaltung** von Widerständen in Abbildung 3.5 gibt es zwei Schleifen und zwei Knoten. Mit den Vorzeichen wie in der Abbildung ergibt sich aus den Knoten

$$I = I_1 + I_2$$

und damit für die Maschenregeln

oder

$$0 = U_1 - U_2 = R_1 I_1 - R_2 I_2$$
$$U_{emk} = U_1 = R_1 I_1$$

Aus den drei Gleichungen folgen die drei Unbekannten  $I_1, I_2, I_3$ und damit der Gesamt-Widerstand für die Parallel-Schaltung

$$R_{ges} = \frac{U_{ges}}{I_{ges}} = \frac{R_1 I_1}{I_1 + I_2} = \frac{R_1 I_1}{I_1 + \frac{R_1}{R_2} I_1} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

$$\boxed{\frac{1}{R_{ges}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$
(3.18)







Abb. 3.5 Stromkreis mit zwei parallel geschalteten Widerständen.

# 4 Statische Magnetfelder

## 4.1 Magnetismus und Ströme

In der Natur treten zahlreiche magnetische Effekte auf, die hier kurz zusammenfassend dargestellt und später quantitativ diskutiert werden.

Es gibt "magnetische" Materialien (z.B. Magnetit), die Kräfte aufeinander ausüben. Es treten immer anziehende *und* abstoßende Kräfte auf, das Vorzeichen hängt ausschließlich von der relativen Orientierung dieser "Magnete" zueinander ab. Teilt man einen Magneten, so enstehen wieder zwei Magnete, die nach wie vor anziehende und abstoßende Kräfte aufweisen. Dies bedeutet offenbar, dass es - anders als bei elektrischen Kräften - keine magnetischen Monopole gibt. Tatsächlich lässt sich diese Form des Magnetismus durch den quantenmechanischen Spin von Elektronen und Atomkernen erklären. Dieser Spin ist mit Drehimpuls und einem magnetischen Dipol-Moment verbunden. In magnetischen Materialien richten sich diese elementaren Dipole relativ zueinander aus, so dass ein großer gemeinsamer Dipol entsteht.

Die beiden Enden eines magnetischen Dipols nennt man Nordund Süd-Pol. Durch Versuche mit drei Magneten lässt sich leicht zeigen, dass sich gleiche Pole abstoßen und ungleiche Pole anziehen. Da sich Dipol-Magnete in der Nähe anderer Magnete ausrichten, lassen sich dadurch die Kraftrichtungen als magnetische Feldlinien sichtbar machen. Das zugehörige Vektorfeld  $\vec{B}$  heißt aus historischen Gründen magnetische Induktion. Historisch wurde die Orientierung durch das Erdmagnetfeld festgelegt (siehe unten). Außerhalb eines Magneten zeigt das Feld vom Nord- zum Süd-Pol.

Magnete richten sich auch in der Nähe eines stromdurchflossenen Leiters aus. Die Magnetfeldlinien zeigen dabei kreisförmig um die Stromrichtung herum. Die Richtung des Stroms legt die Orientierung des  $\vec{B}$ -Feldes fest. Diese Feldlinien sind geschlossen. Es liegen also keine Monopole vor, an denen die Magnetfeldlinien enden oder anfangen würden (vergleiche Coulomb- $\vec{E}$ -Feld).



#### Abb. 4.1

Schema von ungeordneten Elementarmagneten in einem unmagnetischen Material.



#### Abb. 4.2

Schema von ausgerichteten Elementarmagneten in einem Magneten.



**Abb. 4.3** Magnetfeld eines Dipolmagneten mit Hilfe von Eisenfeilspänen.

Rechte-Hand-Regel für technische Stromrichtung und Magnetfeldrichtung



**Abb. 4.5** Magnetfeld einer Leiterschleife.



**Abb. 4.4** Geschlossene Magnetfeldlinien um einen stromdurchflossenen Leiter.

Das Magnetfeld einer Stromschleife berechnet sich aus den Beiträgen der einzelnen Linienelemente nach dem Superpositionsprinzip. Im Zentrum der Schleife zeigt das  $\vec{B}$ -Feld senkrecht zur Schleifenebene.

Eine Spule besteht aus mehreren Leiterschleifen, die vom gleichen Strom durchflossen werden. Die Magnetfelder der einzelnen Schleifen addieren sich nach dem Superpositionsprinzip.



Abb. 4.6 Magnetfeld einer Spule.

Rechte-Hand-Regel für Spulenwicklung und Magnetfeldrichtung Das resultierende Magnetfeld im Innern der Spule ist näherungsweise homogen. Seine Richtung ergibt sich aus der Rechten-Hand-Regel.

## 4.2 Lorentz-Kraft

Ähnlich wie bei der Coulomb-Kraft soll die Wirkung eines Stroms auf eine Ladung beschrieben werden durch zwei Schritte,

- die Erzeugung eines Magnetfeldes durch den Strom,
- die Wirkung des Magnetfeldes auf geladene Teilchen.

Das Magnetfeld  $\vec{B}$  ist wie das  $\vec{E}$  Feld keine Hilfskonstruktion, sondern kann selber Energie tragen und  $\vec{E}$ -Felder erzeugen oder von ihnen erzeugt werden. Es ist also ein weiterer dynamischer Freiheitsgrad des Elektromagnetismus. Zunächst wird die Wirkung durch das Magnetfeld betrachtet.
**Kraft auf eine Ladung** Elektrisch geladene Teilchen erfahren im Magnetfeld  $\vec{B}$  eine Kraft senkrecht zum Feld und senkrecht zu ihrer Bewegungsrichtung. Die Kraft ist proportional zur Geschwindigkeit der Teilchen,

$$\vec{F} = q \, \vec{v} \times \vec{B} \tag{4.1}$$

Zusammen mit der Coulomb-Kraft ergibt sich also die "Lorentz-Kraft" auf elektrisch geladene Teilchen zu

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right) \tag{4.2}$$

Das Einheitensystem wurde so gewählt, dass in dieser Gleichung keine weitere Proportionalitätskonstante zwischen  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  notwendig ist.

Die Kraft durch das Magnetfeld führt zu Kreisbahnen beziehungsweise Helix-Bahnen im Magnetfeld. Effektiv folgen geladene Teilchen damit Kreisbahnen um die Magnetfeldlinien herum.

Die durch das Magnetfeld auf einem kleinen Wegstück  $d\vec{s}$  an einem Teilchen verrichtete Arbeit ist

$$dW = -\vec{F} \, d\vec{s}$$

Die Geschwindigkeit  $\vec{v}$  zeigt in die gleiche Richtung wie  $d\vec{s}$ . Da die Kraft  $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$  senkrecht zu  $\vec{v}$  und damit auch zu  $d\vec{s}$  ist, ist das Skalarprodukt für dW = 0. Das Magnetfeld verrichtet also keine Arbeit an einem geladenen Teilchen. Die Geschwindigkeit  $\vec{v}$  und damit auch der Radius R der Kreisbahn bleibt also konstant.

Der Radius der Kreisbahn ergibt sich durch Gleichsetzen der Kraft durch das Magnetfeld mit der Zentrifugalkraft. Mit  $v_T$  als Komponente der Geschwindigkeit senkrecht zum  $\vec{B}$  Feld folgt

$$q v_T B = m \frac{v_T^2}{H}$$

Damit lässt sich der Transversalimpuls  $P_T = mv_T$  eines Teilchens aus seiner Kreisbahn im Magnetfeld bestimmen,

$$P_T = q B R \tag{4.3}$$

Diese Gleichung gilt auch für hohe Geschwindigkeiten, wenn der relativistische Impuls  $P = \gamma m v$  eingesetzt wird.

Für ein Elektron oder Proton in einem Magnetfeld von B = 1Tund einem Bahnradius R = 1m ist der Impuls  $P_T = 3 \cdot 10^8 \text{ eV/c}$ .

**Kraft auf einen Leiter** Die Kräfte auf die einzelnen Ladungen in einem Leiter addieren sich zur Gesamtkraft auf den ganzen Leiter. In einem kleinen Volumen dV eines Leiters mit Ladungsdichte  $\varrho$ erfahren die Ladungen  $dq = \varrho dV$  aufgrund ihrer Geschwindigkeit  $\vec{v}$ die Kraft

$$d\vec{F} = \rho \, dV \, \vec{v} \times \vec{B} = (\vec{j} \times \vec{B}) \, dV$$

Die Gesamtkraft ergibt sich durch Integration über das Volumen,

$$\vec{F} = \iiint (\vec{j} \times \vec{B}) \, dV$$

Einheit des Magnetfeldes

1 Tesla = 
$$1T = 1\frac{N}{Am}$$



#### Abb. 4.7

Rechte-Hand-Regel für die Lorentzkraft auf eine positive Ladung durch ein Magnetfeld.



Abb. 4.8 Ablenkung eines Strahls aus Elektronen auf eine Kreisbahn im Magnetfeld.

Speziell für einen dünnen Leiter mit konstanter Stromdichte  $\vec{j}$  parallel zur Drahtrichtung  $\vec{e}_l$  folgt mit  $\vec{j} dV = j dA d\vec{l}$ :

$$\vec{F} = \iiint (\vec{j} \times \vec{B}) dA \, dl = \iint j \, dA \cdot \int d\vec{l} \times \vec{B}$$

und

$$\vec{F} = I \int d\vec{l} \times \vec{B}$$
(4.4)

Falls  $\vec{B}$  konstant ist, vereinfacht sich dies für einen geraden Leiter mit Gesamtlänge  $\vec{L}$  ( $\vec{L}$  zeigt in Richtung von  $\vec{j}$ ) zu

$$\vec{F} = I \,\vec{L} \times \vec{B} \tag{4.5}$$

### 4.3 Biot-Savart Gesetz

Bewegte elektrische Ladungen (Ströme) erzeugen ein Magnetfeld. Durch kleine Kompasse oder die Darstellung von Magnetfeldlinien mit Eisenfeilspänen sieht man experimentell, dass um einen langen geraden Leiter die Magnetfeldlinien geschlossene Kreise bilden. Die Stärke des Magnetfeldes ist proportional zum Strom durch den Leiter und nimmt mit dem Abstand quadratisch ab.

Für stationäre Ströme,  $\nabla \vec{j} = 0$  und damit auch  $\partial_t \rho = 0$ , die sich zeitlich nicht ändern und bei denen nirgendwo Ladungen erzeugt, vernichtet oder angehäuft werden, findet man experimentell die Abhängigkeit

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$
(4.6)

Es beschreibt das Magnetfeld aufgrund eines Stroms I durch einen Leiter. Hierbei ist  $d\vec{l}$  ein kleines Stück Länge entlang des Leiters in Stromrichtung,  $\vec{r}$  ist der Abstand von dem Stück Leiter zum Punkt, an dem das Magnetfeld berechnet werden soll.

Dieses Gesetz entspricht in seiner Bedeutung dem Coulomb-Gesetz der Elektrostatik. Das Kreuzprodukt beschreibt, dass das Magnetfeld nicht auf den Leiter zeigt, sondern senkrecht zu  $d\vec{l}$ . Die Konstante  $\mu_0$  wurde schon bei der Einführung des MKSA Systems erklärt.

**Magnetfeld eines unendlich langen Leiters** Gesucht ist das Magnetfeld in einer Ebene senkrecht zum Leiter. Es sei R der Abstand eines Punktes in dieser Ebene vom Leiter und  $\vec{l}$  der Abstand der Ebene von einem Leiterstück  $d\vec{l}$ . Damit ist das Kreuzprodukt in Gleichung 4.6

$$|d\vec{l} \times \vec{r}| = dl \cdot r \sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = dl \cdot r \cos \alpha$$

Aus der Winkelbeziehung  $l = R \tan \alpha$  folgt  $dl = \frac{R}{\cos^2 \alpha} d\alpha$  und damit

$$\frac{|d\vec{l} \times \vec{r}|}{r^3} = \frac{\cos \alpha \, dl}{r^2} = \frac{R \, \cos \alpha \, d\alpha}{r^2 \cos^2 \alpha} = \frac{R \, \cos \alpha \, d\alpha}{R^2}$$

#### **Biot-Savart Gesetz**



**Abb. 4.9** Zur Berechnung des Magnetfeldes um einen Leiter.

Damit folgt

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \alpha \, d\alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \sin \alpha |_{-\pi/2}^{\pi/2} \tag{4.7}$$

Als Resultat

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \vec{e}_\phi \tag{4.8}$$

fällt das *B*-Feld mit dem Abstand von einem unendlich langen Leiter ~ 1/R und zeigt an jeder Stelle tangential um den Leiter herum,  $\vec{e}_{\phi} = \vec{e}_l \times \vec{e}_r$ . Die Orientierung ergibt sich aus der Rechten-Hand-Regel.

Für einen Strom von I = 1A ergibt sich in R = 1m Abstand ein Magnetfeld von  $B = 2 \cdot 10^{-7}T$ . Zum Vergleich: Das Magnetfeld der Erde beträgt im Mitteleuropa ca  $4.8 \cdot 10^{-5}T$ .

**Kraft zwischen zwei Leitern** Kombiniert man Gleichung 4.8 mit 4.5, so erhält man für die Kraft zwischen zwei parallelen Leitern mit Strom  $I_1 = I_2 = I$ 

$$\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B} = I\vec{L} \times \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi R}\vec{e}_{\phi}\right)$$

Normiert auf die betrachtete Länge L des Leiters folgt

$$\frac{F}{L} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi R} \tag{4.9}$$

Dieses Resultat wurde bereits bei der Definition des Ampere als Einheit des Stroms verwendet (siehe Abschnitt 2.2). Die Kraft ist anziehend, wenn der Strom in beiden Leitern in die gleiche Richtung fließt.

## 4.4 Ampere'sches Gesetz

Das Ampere'sche Gesetz wird aus dem Biot-Savart-Gesetz abgeleitet und gilt damit nur für den Fall stationärer Ladungsverteilungen,  $\partial_t \varrho = 0$ , und damit zeitlich konstaner elektrischer Felder,  $\partial_t \vec{E} = 0$ . Der allgemeine Fall wird in Abschnitt 7.1 diskutiert.

Wir betrachten wieder einen unendlich langen Leiter nach Abbildung 4.9. Bildet man das Wegintegral um diesen Leiter entlang eines geschlossenen Kreises mit Radius R, so ist jedes Wegstück  $d\vec{s} = ds \vec{e}_{\phi}$  parallel zum jeweiligen Magnetfeld  $\vec{B} = B \vec{e}_{\phi}$ . Daher ist auch  $\vec{B} d\vec{s} = B ds$ . Das Integral ist daher einfach

$$\oint \vec{B} \, d\vec{s} = B \oint ds = B \, 2\pi R$$

Der Vergleich mit dem Ergebnis für das Biot-Savart Gesetz (Gleichung 4.8) zeigt, dass

$$\oint \vec{B} \, d\vec{s} = \mu_0 \, I \tag{4.10}$$

Ampere'sches Gesetz in Integralform Offenbar gilt dies nicht nur für einen kreisförmigen Weg, sondern für beliebige geschlossene Wege, denn man kann jedes Wegelement  $d\vec{s}$ in Komponenten parallel und senkrecht zu  $\vec{e}_{\phi}$  aufteilen. Wegen der Multiplikation mit  $\vec{B} = B\vec{e}_{\phi}$  zählen aber nur die parallelen Komponenten. Wichtig ist nur, dass der Weg geschlossen ist und den Strom einschließt. Aus dem Superpositionsprinzip folgt auch, dass man die Magnetfelder mehrerer Ströme addieren kann. Das Gesetz ist also sehr allgemeingültig für beliebige Wege und beliebige stationäre, umschlossene Ströme, beziehungsweise Stromdichten.

Nach dem Stokes'schen Integralsatz lässt sich das Linienintegral über einen geschlossenen Weg umformen in ein Oberflächenintegral,

$$\oint \vec{B} \, d\vec{s} = \iint \left( \nabla \times \vec{B} \right) \, d\vec{A} = \mu_0 \, I = \iint \left( \mu_0 \, \vec{j} \right) \, d\vec{A}$$

Ampere'sches Gesetz in differentieller Form so dass durch Vergleich der Integranden folgt:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \,\vec{j} \tag{4.11}$$

Das Magnetfeld ist ein Wirbelfeld, das durch Ströme erzeugt wird. Wie das Biot-Savart Gesetz ist auch das Ampere'sche Gesetz nur gültig für den statischen Fall und muss später erweitert werden.

## 4.5 Quellenfreiheit von Magnetfeldern

Die Magnetfeldlinien um einen Strom sind geschlossene Linien ohne Anfang und Ende. Es gibt also (zumindest durch Ströme) keine magnetischen Monopole. Mathematisch lässt sich dies durch das Integral des Feldes über eine geschlossene Oberfläche beschreiben,

$$\Phi_m = \oint \vec{B} \, d\vec{A} = 0 \tag{4.12}$$

Der magnetische Fluß  $\Phi_m$  beschreibt die Anzahl der magnetischen Feldlinien, die durch die Oberfläche dringen. Der Fluß muss Null sein, da alle Feldlinien, die durch die Fläche eindringen, auch wieder auslaufen, denn es gibt ja keine Quellen oder Senken für das *B*-Feld. Mit dem Gauß'schen Integralsatz folgt

$$\Phi_m = \oint \vec{B} \, d\vec{A} = \iiint (\nabla \vec{B}) \, dV = 0 \tag{4.13}$$

2. Maxwell'sche Gleichung

Dies kann für beliebige Volumen nur gelten, wenn

$$\nabla \vec{B} = 0 \tag{4.14}$$

Mit Divergenz und Rotation ist das  $\vec{B}$ - Feld komplett bestimmt. Diese Gleichungen stellen das zweite Maxwell'sche Gesetz dar.

## 4.6 Magnetfelder von Stromverteilungen

### 4.6.1 Magnetfeld in einer Spule

In einer unendlich langen Spule lässt sich das Magnetfeld B berechnen, indem man das Ampere'sche Gesetz in Integralform benutzt. Das Feld in der Spule wird aus Symmetriegründen parallel zur Spulenachse liegen und homogen sein. Daher wählt man als Integrationsweg ein Viereck, das in der Spule eine Strecke  $s_1$  parallel zur Spule läuft und sich außerhalb der Spule in unendlicher Entfernung schließt. Man nimmt nun an, dass das Magnetfeld in unendlicher Entfernung Null und auf den nach außen führenden Strecken senkrecht zum Integrationsweg ist. Man braucht daher für das Wegintegral nur die Strecke  $s_1$  zu betrachten.

Für den Strom müssen alle vom Weg eingeschlossenen Windungen der Spule einzeln zählen. Die Windungsdichte n sei die Anzahl der Windungen je Meter Länge. Dann ist die Zahl der eingeschlossenen Windungen  $N = n s_1$ . Damit folgt

$$\int \vec{B} \, d\vec{s} = Bs_1 = \mu_0 \, I \, N$$

so dass das Feld der unendlich langen Spule gegeben ist durch

$$B = \mu_0 n I \tag{4.15}$$

Bei n = 1000/m ergibt sich z.B. für I = 1A das Feld B = 0,0012T.

Mit den oben gemachten Annahmen für eine unendlich lange Spule gilt diese Formel scheinbar unabhängig vom Abstand zur Spulenachse oder der Geometrie der Spule. Bei realistischen Spulen hängt die Homogenität des B Feldes vom Verhältnis Durchmesser/Länge ab und ist selbst auf der Spulenachse bereits sehr inhomogen. Im Detail kann es durch das Biot-Savart Gesetz berechnet werden.

### 4.6.2 Leiterschleife und magnetischer Dipol

**Rechteckige Leiterschleife** Für eine rechteckige Leiterschleife in einem homogenen Magnetfeld gilt nach Gleichung 4.5, dass die Vektoren  $\vec{L}_i$  der Seiten in Richtung der Stromdichte zeigen. Durch die Änderung der Stromrichtung bei einander gegenüber liegenden Seiten gilt daher

$$\vec{L}_1 = -\vec{L}_3, \qquad \vec{L}_2 = -\vec{L}_4$$

Damit ist die Kraft auf die Schleife insgesamt gleich Null,

$$\vec{F} = \sum_{i} I \vec{L}_{i} \times \vec{B} = I \cdot \left(\sum_{i} \vec{L}_{i}\right) \times \vec{B} = 0$$



**Abb. 4.10** Zur Berechnung des Magnetfelds in einer sehr langen Spule.



Abb. 4.11 Leiterschleife im Magnetfeld.

Die Drehmomente  $M_i$  durch den Strom in den einzelnen Seiten der Leiterschleife ist (bei Orientierung der Drehachse parallel zu  $L_1$ ) gegeben durch

$$\vec{M}_{1} = \vec{r}_{1} \times \vec{F}_{1} = \frac{-L_{2}}{2} \times \left(I\vec{L}_{1} \times \vec{B}\right) = -\frac{I}{2}\vec{L}_{2} \times (\vec{L}_{1} \times \vec{B})$$
$$= \frac{I}{2}\vec{L}_{1} \times (\vec{B} \times \vec{L}_{2}) + \frac{I}{2}\vec{B} \times (\vec{L}_{2} \times \vec{L}_{1})$$

Hierfür wurde die Jacobi-Identität<sup>5</sup> benutzt. Beim ersten Term ist das Drehmoment senkrecht zur Drehachse. Dieses Drehmoment belastet nur die Aufhängung der Drehachse. Für den zweiten Term ist  $\vec{L}_1 \times \vec{L}_2 = \vec{A}$ , wobei die Richtung von  $\vec{A}$  entsprechend dem Umlaufsinn des Stroms durch die Rechte-Hand-Regel gegeben ist.

$$\vec{M}_1 = \frac{I}{2}\vec{A} \times \vec{B} \tag{4.16}$$

Die gegenüberliegende Seite trägt ein gleich großes Drehmoment bei, die anderen beiden Seiten dagegen ergeben keine Komponente entlang der Drehachse. Damit ist das gesamte Drehmoment

$$\vec{M} = I \,\vec{A} \times \vec{B} \tag{4.17}$$

Definiert man das magnetische Dipolmoment als

$$\vec{m} = I \vec{A} \tag{4.18}$$

so folgt für das Drehmoment einfach

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B} \tag{4.19}$$

Analog zur Rechnung beim elektrischen Feld ergibt sich für die potentielle Energie im Magnetfeld

$$W = -\vec{m}\,\vec{B} \tag{4.20}$$

**Kreisförmige Leiterschleife** Offenbar kann man aus kleinen Vierecken beliebige andere Leiterschleifen zusammensetzen, so dass die obigen Gleichungen z.B. auch für eine Leiterschleife (Ring) gelten, insbesondere auch  $\vec{m} = I\vec{A}$ .

Das Magnetfeld einer Leiterschleife kann man mit dem Biot-Savart Gesetz berechnen. In der Kreisebene zeigt das Magnetfeld immer senkrecht zur Kreisebene in Richtung  $\vec{m}$ . Man findet im Mittelpunkt des Kreises mit Radius R:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2R} \vec{e}_A = \frac{\mu_0 \vec{m}}{2\pi R^3}$$

Auf der Achse des Kreises findet man im Abstand r

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \, m}{2\pi \, (r^2 + R^2)^{3/2}}$$

Bei R = 1cm und I = 1A wäre das Feld im Mittelpunkt 6,  $3 \cdot 10^{-5}$ T. In großem Abstand r >> R gilt also ähnlich wie beim elekrischen Dipol

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \, \vec{m}}{2\pi \; r^3}$$

<sup>5</sup>Jacobi-Identität:  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$ 





Richtung eines magnetischen Dipols aus einer Stromschleife.



Abb. 4.13 Dipolfeld einer Leiterschleife.



**Abb. 4.14** Magnetfeld im Abstand vom Zentrum auf der Achse. 42

## 4.7 Magnetfeld der Erde

Einzelne Magnete richten sich auf der Erde alle in die gleiche Richtung aus. Das hierfür verantwortliche Magnetfeld der Erde ist ebenfalls näherungsweise ein Dipolfeld. Magnetische Dipolachse und Drehachse der Erde schließen einen Winkel von 12<sup>0</sup> ein. Das Zentrum des Dipols ist etwa 450 km vom Erdmittelpunkt entfernt. Der magnetische Südpol liegt unterhalb Kanada, also nahe des geographischen Nordpols. In Mitteleuropa zeigt das Magnetfeld in die Erde hinein, die senkrechte Komponente ist etwa doppelt so groß wie die horizontale.

Magnetpole, die sich Richtung Kanada ausrichten, werden historisch "Nordpole" genannt. Historisch wurde die Richtung des  $\vec{B}$ Feldes so festgelegt, dass es außerhalb der Erde von der Antarktis nach Kanada zeigt, also vom magnetischen Nordpol zum magnetischen Südpol. Das Magnetfeld der Erde entsteht durch Kreisströme geladener Flüssigkeiten im Erdkern. Hinzu kommen nahe der Erdoberfläche auch Schichten aus magnetisiertem Gestein. Das Dipolmoment der Erde beträgt  $m = 7, 7 \cdot 10^{22} Am^2$ .

Das Feld ist nicht konstant. Es schwächt sich pro Jahr um ca. 1/1300 ab. Der magnetische Südpol in Kanada wandert unregelmäßig, um ca. 30 km /Jahr. Im Mittel alle 250.000 Jahre kehrt sich die Polarität des Erdmagnetfeldes um.



**Abb. 4.15** Magnetfeld der Erde (mit freundlicher Genehmigung durch dwu-Unterrichtsmaterialien).

Die Sonne emittiert ständig ein Plasma von Elektronen (und Pro-

Magnetfeld der Erde in Mitteleuropa:  $B = 50 \mu T$ 

tonen), die mit einer Dichte von  $5 \cdot 10^6/m^3$  und einer typischen Geschwindigkeit von 500 km/s die Erde erreichen. Sie werden durch das Magnetfeld der Erde auf Schraubenbahnen entlang der Magnetfeldlinien zu den Polen gelenkt.



Abb. 4.16 Ablenkung des "Sonnenwindes" durch das Erdmagnetfeld.

In der Atmosphäre regen sie Gasatome an, die ihre Energie anschließend in Form von Licht wieder emitieren. Diese Polarlichter kann man von der Erde beziehungsweise vom Weltraum aus sehen.



Abb. 4.17 Polarlicht, aufgenommen von einem Satelliten.

Weitere Teilchen des Sonnenwinds werden im sogenannten Van Allen Strahlungsgürtel durch das Magnetfeld der Erde eingefangen.

## 4.8 Hall-Effekt

Auch innerhalb eines Leiters oder Halbleiters erfahren Ladungsträger die Lorentzkraft. Bei konstantem Strom muss daher die Lorentzkraft durch eine entprechende Coulombkraft aufgehoben werden. Dies geschieht durch Verschiebung der Ladungsträger innerhalb des Leiters, bis senkrecht zur Stromrichtung die Gesamtkraft Null ist. Zur Kompensation der Lorenzkraft baut sich also durch Verschiebung der Ladungsträger ein elektrisches Gegenfeld  $E_H$  auf, so dass für ein Magnetfeld senkrecht zur Stromrichtung

$$qE_H = qvB$$

folgt. Das  $\vec{E}$ -Feld zeigt dabei senkrecht zu  $\vec{B}$  und  $\vec{j}$ . Ist v konstant über den Querschnitt A des Leiters, so muss dies auch für  $E_H$  gelten. Damit ist die "Hall-Spannung" quer zur Stromrichtung (wie beim Plattenkondensator)  $U_H = \int E_H db = E_H b$ , so dass

$$U_H = v \, b \, B = \frac{j}{\varrho} \, b \, B = \frac{I}{\varrho} \, \frac{b}{A} \, B \tag{4.21}$$

mit Stromdichte  $j = \rho v = I/A$ .

Die Hallspannung hat z.B. für einen Halbleiter mit Ladungsdichte  $\rho = e \cdot 10^{15} \text{cm}^{-3}$ , b = 1 cm und I = 1 A bei einem Feld B = 1 T den Wert  $U_H \approx 0, 6 \text{V}$ . Hiermit kann also bei bekanntem Strom und  $\vec{B}$ -Feld die Geschwindigkeit, das Vorzeichen und die Dichte der Ladungsträger gemessen werden. Sind diese bekannt, können mit sogenannten Hall-Sonden auch Magnetfelder bestimmt werden.

### 4.9 Das Vektorpotential

Für das Coulomb-Gesetz des E-Feldes konnte man alternativ ein skalares Potential  $\varphi$  einführen, aus dem sich das E-Feld mittels

$$E = -\nabla \varphi$$

berechnen lässt.

Analog kann man das Magnetfed  $\vec{B}$  durch ein Potential  $\vec{A}$  beschreiben, das allerdings selber ein Vektorfeld ist:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \tag{4.22}$$

(A ist hier keine Fläche !) Da allgemein für alle Vektorfelder und damit auch  $\vec{A}$  mathematisch die Beziehung  $\nabla (\nabla \times \vec{A}) = 0$  gilt, ist damit auch die Maxwell-Gleichung

$$\nabla \vec{B} = \nabla (\nabla \times \vec{A}) = 0$$

automatisch erfüllt.

Für das Ampere'sche Gesetz  $\nabla \times \vec{B} = \vec{j}/\mu_0$  ergibt sich

$$\nabla \times B = \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla (\nabla \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{j}$$

Ähnlich wie das skalare Potential ist auch das Vektor-Potential nicht eindeutig definiert, denn man kann zu  $\vec{A}$  ein beliebiges Vektorfeld  $\vec{A}_0$  addieren, falls sich dadurch  $\vec{B}$  nicht ändert. Dies ist der



Abb. 4.18 Ablenkung der Ladungsträger beim Hall-Effekt.

Fall, wenn  $\nabla \times \vec{A}_0 = 0$  ist. Zum Beispiel kann  $\vec{A}_0$  so gewählt werden, dass  $\nabla \vec{A} = 0$  ist<sup>6</sup>. Für diese spezielle "Eichung" folgt dann

$$\nabla \times B = -\nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{j}$$

Dies sind drei Poisson-Gleichungen (für jede der Komponenten von  $\vec{A}$ ), die einzeln gelöst werden können. Analog zur Poisson-Gleichung der Elektrostatik ergibt sich die Lösung

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{j}}{r} \, dV \tag{4.23}$$

wobei r der Abstand zwischen dem jeweils betrachteten Volumenelement dV und dem Ort ist, an dem  $\vec{A}$  berechnet werden soll.

### 4.10 Materie im Magnetfeld

Magnetismus in Materialien lässt sich nur quantenmechanisch verstehen. Bereits einzelne Atome und Moleküle können ein magnetisches (Dipol-)Moment tragen, dass sich zusammensetzt aus:

• Dem Bahndrehimpuls der Elektronen in den Atomhüllen. Dieser entspricht dem "Kreisstrom" der Elektronen um die Atomkerne.

 $^6$ Sei $\vec{a}$ ein Vektorfeld, dass sich aus einem skalaren Feld $\alpha$ berechnet lässt über

$$\vec{a} = \nabla \alpha$$

Dann folgt

$$\nabla \times \vec{a} = \nabla \times (\nabla \alpha) = 0$$

denn Rotation und Gradient hintereinander ergeben immer Null. Eine "Eichtransformation" von  $\vec{A}$  nach  $\vec{A}'$  soll so definiert sein, dass das Magnetfeld  $\vec{B}$  unverändert bleibt. Dies ist tatsächlich erfüllt für

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{a}$$

denn

$$\vec{B}' = \nabla \times \vec{A}' = \nabla \times \vec{A} + \underbrace{\nabla \times \vec{a}}_{=0} = \vec{B}$$

Das Magnetfeld legt also  $\nabla\times\vec{A'}=\nabla\times\vec{A}$ fest, dagegen kann $\nabla\vec{A'}$ frei gewählt werden.

Beispiel: Die einfachste Wahl ist die sogenannte Coulomb Eichung

 $\nabla \vec{A}' = 0$ 

Hierfür muss  $\vec{a}$  entsprechend gewählt werden, so dass es die Divergenz in  $\vec{A}$  gerade aufhebt:

$$0 = \nabla \vec{A}' = \nabla \vec{A} + \nabla \vec{a} \qquad \Rightarrow \qquad \nabla \vec{a} = \nabla^2 \alpha = -\nabla \vec{A}$$

Dies ist in der Form eine Poisson-Gleichung für  $\alpha$  die gelöst werden kann analog zur entsprechenden Gleichung in der Elektrostatik

$$\alpha = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\nabla \vec{A}}{r} \, dV$$

- Dem Spin der Elektronen. Dies ist ein rein quantenmechanischer Effekt, der sich in der relativistischen Quantenmechanik herleiten lässt. Er lässt sich anschaulich (und falsch) interpretieren als Eigendrehimpuls der Elektronen.
- Dem Kernspin. Dieser setzt sich wiederum zusammen aus den Spins und Bahndreimpulse der Quarks (und Gluonen), die in der Summe das magnetische Moment der Protonen und Neutronen ergeben. Hinzu kommt der Bahndrehimpuls der Protonen und Neutronen im Kern. In der Regel ist wegen der hohen Kernmasse dieser Beitrag zum gesamten magnetischen Moment eines Atoms sehr klein, wird aber z.B. bei MRT Verfahren benutzt.

Die Zusammensetzung der Elektronenbeiträge hängt stark von der Elektronenkonfiguration ab. Liegen in der äußeren Schale jeweils zwei Elektronen vor, so sind deren Spins entgegengesetzt und die Beiträge heben sich exakt auf. Bei einzelnen Elektronen in der äußeren Schale ergibt sich ein deutliches magnetisches Moment.

In einem äußeren Magnetfeld werden sowohl neue "Kreisströme" induziert als auch gegebenenfalls vorhandene magnetischen Momente ausgerichtet.

In einem Festkörper sind aber kollektive Effekte zusätzlich sehr wichtig. Zum einen werden die elementaren magnetischen Momente auch untereinander wechselwirken und sich zueinander ausrichten. Dem entgegen wirkt, dass die Ausrichtung der magnetischen Momente durch Wärmebewegungen stark gestört wird. Daher liegt bei den meisten Stoffen ohne äußeres Feld keine Magnetisierung vor.

Die Magnetisierung eines Materials setzt sich zusammen aus den elementaren magnetischen Momenten  $\vec{m}_i$ , normiert auf das betrachtete Volumen.

$$\vec{M} = \frac{1}{V} \sum_{i} \vec{m}_{i}$$

Ist  $\vec{H}$  das Magnetfeld ohne Material, so gilt

$$\vec{B} = \mu_0 \left( \vec{H} + \vec{M} \right)$$
 (4.24)

In erster Näherung wird die Magnetisierung proportional zum Magnetfeld  $\vec{H}$  sein,

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \tag{4.25}$$

Die Suszeptibilität  $\chi_m$  hängt aber stark von Temperatur und Frequenz des Magnetfelds ab. Die Proportionalität gilt nicht für Ferromagnete. In diesem Fall ist  $\mu_r$  abhängig von  $\vec{H}$ . Definiert man die relative Permeabilität als

$$\mu_r = 1 + \chi_m \tag{4.26}$$

so ergibt sich

$$\vec{B} = \mu_0 \,\mu_r \,\vec{H} \qquad \vec{M} = (\mu_r - 1) \,\vec{H} \qquad (4.27)$$

Magnetische Suszeptibilität und relative Permeabilität

Suszeptibilität $\chi_m$		
$H_2$	$-2 \cdot 10^{-9}$	
Kupfer	$-6, 4 \cdot 10^{-6}$	
Vakuum	0	
Luft	$0, 4 \cdot 10^{-6}$	
Aluminium	$2, 2 \cdot 10^{-5}$	
Platin	$2,6\cdot 10^{-4}$	
Kobalt	80 - 200	
Eisen	30010000	
MuMetall	$4 \dots 140000$	

Curie-Temperatur: Eisen 1040 <sup>o</sup>K

Cobalt	1400 °K
Nickel	$370~^0{\rm K}$

Abb. 4.19 Weiß'sche Bezirke in einem Ferromagnet.

#### **Diagmagnetismus** $\mu_r < 1$

Das äußere  $\hat{B}$ -Feld induziert neue magnetische Momente im Material. Diese schwächen nach der Lenz'schen Regel das äußere  $\hat{B}$ -Feld.

Effektiv werden die  $\vec{B}$ -Feld-Linien aus dem Material hinausgedrängt, das Material wird aus dem Magnetfeld hinausgedrängt.

Beispiele: Kupfer, Silber Kohlenstoff

Paramagnetismus  $\mu_r > 1$ Manche Materialien haben permanente magnetische Momente, die sich im äußeren  $\vec{B}$ -Feld ausrichten. Dabei wird Energie frei. Das äußere  $\vec{B}$ -Feld wird verstärkt.

Die  $\vec{B}$ -Feld-Linien werden in das Material hin<br/>eingezogen, das Material ebenfalls.

Beispiele: Sauerstoff, Aluminium, Platin

#### Ferromagnetismus $\mu_r >> 1$

Im Material wechselwirken bereits vorhandene magnetische Momente sehr stark miteinander und richten sich zueinander aus. Es bilden sich "Weiß'sche Bezirke" gleicher Magnetisierungsrichtung. In einem äußeren  $\vec{B}$ -Feld richten sich diese Bezirke aus, bei hohem Feld sogar komplett (Sättigungsmagnetisierung). Das äußere  $\vec{B}$ -Feld wird sehr stark verstärkt.

Die  $\tilde{B}$ -Feld-Linien werden entspreched stark in das Material hineingezogen. Ferromagnete werden in Magnetfelder hineingezogen. Die Magnetisierung verschwindet oberhalb einer kritischen Temperatur, der Curie-Temperatur. Beispiele: Eisen, MuMetall (NiFe)







Abb. 4.20 Aufnahme eines Fe-Kristalls mit einem Raster-Elektronen-Mikroskop. Die Farben entsprechen den verschiedenen Orientierungen der Weißschen Bezirke. Die typische Ausdehnung ist  $10^{-3}$ m.

Da maximale Magnetfeld in Eisen liegt im Bereich 1,5 - 2 T. Höhere Magnetfeldstärken werden durch Elektromagnete erreicht, der Rekord liegt bei ca. 20 T.

Bei Ferromagneten hängt durch die Natur der Weiß'schen Bezirke die Magnetisierung auch von der Vorgeschichte ab. Man unterschei-

det "weiche" Materialien (wie Eisen), die ihre Magnetisierung ohne äußeres Feld bis auf eine "Remanenz" wieder verlieren, und "harte" Materialien, die für Permanentmagnete verwendet werden. Es ergibt sich eine "Hysteresekurve" zwischen  $\vec{H}$  und  $\vec{B}$ -Feld. Die Fläche innerhalb der Hysteresekurve entspricht der Wärmeenergie, die beim Durchlaufen der Kurve im Material deponiert wird.



Abb. 4.21 Hysteresekurve bei Weicheisen.

# 5 Induktion

# 5.1 Statische und zeitlich veränderliche Felder

Bisher haben wir elektrische und magnetische Felder betrachtet, die durch zeitlich konstante Ladungs- und Stromverteilungen

$$\partial_t \varrho = 0, \qquad \nabla \vec{j} = 0$$

entstehen. Für diese gelten die Gleichungen

sind Quellen des  $\nabla \vec{E} = \frac{\varrho}{\epsilon_0} \qquad \oint \vec{E} \, d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0}$ (5.1)

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \qquad \oint \vec{E} \, d\vec{s} = 0 \qquad (5.2)$$

$$\nabla \vec{B} = 0 \qquad \iint \vec{B} \, d\vec{A} = 0 \tag{5.3}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \,\vec{j} \qquad \oint \vec{B} \, d\vec{s} = \mu_0 \,I \qquad (5.4)$$



Abb. 5.1 Richtung des elektrischen und magnetischen Feldes.

Die Richtungen der Felder entsprechen den obigen Ableitungen, wenn man berücksichtigt, dass

$$\nabla r = \vec{e}_r, \qquad \nabla \vec{r} = 3, \qquad \nabla \times \vec{r} = 0$$

Zusammen mit den Gleichungen für Lorentzkraft und Strom

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}), \qquad \vec{j} = \sigma_{el}\vec{E}$$

ergibt dies ein komplettes Bild statischer elektrischer und magnetischer Effekte.

Einige dieser Gleichungen sind jedoch nicht mehr gültig, wenn sich Ladungsverteilungen, Stromverteilungen oder Felder zeitlich ändern. So wird z.B. der Strom beim Aufladen eines Kondensators ein Magnetfeld erzeugen, das den Ladevorgang selber beeinflußt.

Ladungen sind Quellen des elektrischen Feldes

E-Felder sind wirbelfrei

 $B\operatorname{-Felder}$ haben keine Quellen

Ströme erzeugen B-Felder mit geschlossenen Feldlinien

Praktisch alle technischen Anwendungen beruhen auf zeitlich veränderlichen Vorgängen. Nicht zuletzt sind die gebräuchlichsten Energiequellen Wechselstromquellen. Der wichtigste Prozess mit veränderlichen Feldern ist die Induktion von elektrischen Feldern durch Magnetfelder.

**Versuche:** Ein unmagnetischer, stromloser, kreisförmiger Leiter wird von einem Magneten abgestoßen, wenn man diesen schnell nähert. Dies gilt sowohl für Annäherung mit dem Nordpol als auch mit dem Südpol. Dies kann so interpretiert werden, dass im Leiter ein kreisförmiger Strom induziert wird, der seinerseits ein Magnetfeld erzeugt. Ist dieses Magnetfeld dem ersten entgegengerichtet stoßen sich die beiden Magnete ab. Diesen Effekt kann man sich auch bei der Induktionskanone zunutze machen. Benutzt man einen Ring mit einem Schlitz so entsteht keine messbare Abstoßung. Offenbar wird der Strom im Ring über den ganzen Radius induziert.

Verbindet man zwei Spulen so, dass die Magnetfeldlinien immer beide Spulen durchlaufen, erzeugt eine Stromänderung in der einen Spule eine Magnetfeldänderung, die wiederum in der anderen Spule eine Spannungsänderung induziert. Dies ist das Prinzip des Transformators. Die induzierte Spannung ist umso größer, je schneller die Magnetfeldänderung erfolgt.

Insgesamt zeigt sich, dass ein sich zeitlich änderndes Magnetfeld ein elektrisches Feld erzeugt, das das Magnetfeld kreisförmig umgibt. Dieses ist für die Induktion von Strömen verantwortlich. Das E-Feld ist also nicht mehr wirbelfrei. Die elektrischen Feldlinien sind geschlossen und haben keinen Anfang und kein Ende.





Abb. 5.2 Die Änderung des *B*-Feldes erzeugt einen Strom im Ring.



Abb. 5.3 Induktions-Kanone.



Abb. 5.4 Transformator mit Eisenkern.

**Abb. 5.5** Erzeugung von elektrischen Feldern durch Änderung des Magnetfelds.

## 5.2 Faraday'sches Induktionsgsetz

Wir betrachten einen U-förmigen Leiter, der von einem verschiebbaren Draht abgeschlossen wird. Bewegt sich der Draht mit Ge-



Abb. 5.6

In einem Magnetfeld wird in einem Draht mit Geschwindigkeit  $\vec{v}$  ein Strom induziert.

Faraday'sches Induktionsgesetz in integraler Form

Faraday'sches Indukti-

onsgesetz in differentiel-

schwindigkeit  $\vec{v}$ , so wird durch die Lorentzkraft eine Kraft auf die Ladungsträger ausgeübt. Nach den gleichen Überlegungen wie bei der Hall-Spannung entspricht dies einem äquivalenten elektrischen Feld E = vB entlang des beweglichen Drahts. Die "induzierte" Spanungsdifferenz ist bei einer Länge s gegeben durch

$$U_{ind} = \int \vec{E} d\vec{s} = -Es = -vsB$$

Die Richtung des  $\tilde{B}$ -Feldes gibt nach der Rechten-Hand-Regel die Richtung des Weges  $\vec{s}$  vor, der damit entgegengesetzt zum  $\vec{E}$ -Feld ist. Dies erklärt das Minus-Zeichen. Diese Spannung erzeugt einen Strom in der geschlossenen Leiterschleife, wirkt also wie eine Spannungsquelle.

In Verallgemeinerung dieses Spezialfalls lässt sich das Produkt vsauf der rechten Seite dieser Gleichung auch interpretieren als eine Änderung der Fläche A = xs der Leiterschleife (s ist konstant)

$$\partial_t A = \partial_t (xs) = vs$$

Wenn B ebenfalls konstant ist, kann man die rechte Seite mit der zeitlichen Änderung des magnetischen Flusses identifizieren

$$\partial_t \phi_m = \partial_t \iint \vec{B} \, d\vec{A} = \partial_t (B \iint dA) = \partial_t (AB) = (\partial_t A) B = vsB$$

so dass

$$U_{ind} = -\partial_t \iint \vec{B} \, d\vec{A} \tag{5.5}$$

Auch die linke Seite der Gleichung lässt sich verallgemeinern. Da der U-förmige Leiter ruht, wird dort keine Spannung induziert, so dass man das Linienintegral auf einen geschlossenen Weg ausweiten kann,

$$\oint \vec{E} \, d\vec{s} = -\partial_t \iint \vec{B} \, d\vec{A} \tag{5.6}$$

Dabei sind die Richtung des Integrationswegs  $d\vec{s}$  und des Flächenvektos  $d\vec{A}$  über die Rechte-Hand-Regel miteinander verbunden. Wendet man den Stokes'schen Integralsatz auf die linke Seite an

$$\oint \vec{E} \, d\vec{s} = \iint \left( \nabla \times \vec{E} \right) d\vec{A}$$

so folgt für beliebige Flächen

$$\nabla \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B} \tag{5.7}$$

Diese neuen Maxwellgleichungen erzetzen die Gleichung  $\nabla\times\vec{E}=0$ und  $\oint\vec{E}\,\vec{s}=0$ der Elektrostatik. Sie beschreiben die Entstehung von elektrischen Wirbelfeldern bei zeitlicher Änderung des Magnetfeldes.

ler Form

### 5.2.1 Lenz'sche Regel

Das Minuszeichen in Gleichung 5.6 und 5.7 beinhaltet die Lenz'sche Regel:

• Die durch Induktion entstehenden Ströme und Felder sind immer entgegengesetzt zu ihrer Ursache.

Dies lässt sich auch als Energieerhaltung interpretieren. Steigt der magnetische Fluß  $\phi_m$ , so sollte er keine Wirkung entfalten, die zu einer erneuten Steigerung und damit sukzessive zu einem beliebig großen Magnetfeld führt.

**Beispiel:** Gegeben sei ein Metallring mit Flächenvektor  $\vec{A}$  im Feld  $\vec{B}$  eines Stabmagneten. Wir definieren  $\vec{A}$  so, dass  $\vec{A}$  in Richtung von  $\vec{B}$  zeigt. Wird der Magnet weggezogen, so verringert sich der magnetische Fluß  $\phi_m$  durch die Ebene  $\vec{A}$  des Rings, also  $\partial_t \phi_m < 0$ . Wegen des Minuszeichens in Gleichung 5.6 ist damit  $\oint \vec{E} d\vec{s} > 0$ , so dass der im Ring induzierte Strom  $I_{ind} = U_{ind}/R$  entsprechend der Rechten-Hand-Regel zu  $\vec{A}$  orientiert ist. Dieser Strom erzeugt ein magnetisches Moment  $\vec{m}$ , das in Richtung von  $\vec{A}$  und damit auch  $\vec{B}$  zeigt. Damit ergibt sich, bei Verringerung des Feldes  $\vec{B}$ des Stabmagneten in der Ebene des Rings, ein neues Magnetfeld in Richtung von  $\vec{B}$ :

- $\vec{B}$  wird schwächer  $\Rightarrow$   $\vec{B}_{ind}$  zeigt parallel zu  $\vec{B}$ .
- $\vec{B}$  wird stärker  $\Rightarrow$   $\vec{B}_{ind}$  zeigt entgegengesetzt zu  $\vec{B}$ .

Im ersten Fall werden also entgegengesetzte Pole von  $\vec{B}$  und  $\vec{m}$  zueinander zeigen und es wirkt eine anziehende Kraft.

### 5.2.2 Stromerzeugung

Es gibt zahlreiche Anwendungen des Induktionsgesetzes. So wird zum Beispiel beim Lesen von Kreditkarten ein magnetisierter Streifen an einer Spule vorbeigeführt und die induzierte Spannung gemessen.

Bei weitem die wichtigste Anwendung ist jedoch die Erzeugung von Strom durch das Drehen einer Leiterschleife in einem permanenten Magnetfeld. In einem homogenen Magnetfeld  $\vec{B}$  gilt für eine konstante Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  der Drehung

$$\phi_m = \iint \vec{B} \, d\vec{A} = \vec{B} \vec{A} = B \ A \ cos \omega t$$

Die induzierte Spannung

$$U_{ind} = -\partial_t \phi_m = \omega \ B A \sin \omega t \tag{5.8}$$

ist also proportional zur Drehgeschwindigkeit. Schließt man den Stromkreis über einen Verbraucherwiderstand, so ist die zur Drehung erforderliche mechanische Energie abhängig vom induzierten Lenz'sche Regel und Energieerhaltung



**Abb. 5.7** Erzeugung einer Spannung durch das Drehen einer Leiterschleife im Magnetfeld.



Abb. 5.8 Magnetischer Fluß und induzierte Spannung in einer drehenden Leiterschleife.



**Abb. 5.9** Erzeugung von Wirbelströmen (Wikipedia).

Strom und damit vom Wert des Widerstands. Zu Zeiten maximaler Änderungsrate von  $\phi_m$  ist die induzierte Spannung maximal.

Der Strom in der Leiterschleife bewirkt selber ebenfalls ein Magnetfeld (Dipolfeld), das mit dem äußeren Magnetfeld wechselwirkt. Die dadurch entstehenden Kräfte bewirken die Übertragung von mechanischer Energie in elektrische Energie.

### 5.2.3 Wirbelströme

Bei der Bewegung ausgedehnter Metallkörper in einem äußeren Magnetfeld werden im Letall durch Induktion Ströme induziert, die in den inhomogenen Randbereichen wirbelförmig verlaufen. Das durch den Strom entstehende magnetische Moment wechselwirkt mit dem äußeren Magnetfeld. Entsprechend der Lenz'schen Regel wirkt diese Kraft entgegen der Bewegungsrichtung. Die Bewegungsenergie des Metalls wird durch den Ohm'schen Widerstand in Wärme umgewandelt. Dieser Effekt wird zum Beispiel bei Zügen als Bremse benutzt.

## 5.3 Selbst-Induktivität

Für jede Anordnung von Leitern und Strömen gilt, dass die Ströme Magnetfelder erzeugen. Ändert sich der Strom, so ändert sich auch das Magnetfeld, und damit wird nach dem Induktionsgesetz eine Spannung induziert,

$$\partial_t I \quad \Rightarrow \quad \partial_t B \quad \Rightarrow \quad U_{ind}$$

Man definiert daher die Selbstindiktivität L über die Gleichung

$$U_{ind} = -L \ \partial_t I \tag{5.9}$$

Dabei wird L nur von der Geometrie und den Materialeigenschaften der Leiter abhängen und damit im Allgemeinen konstant sein. Die Einheit der Induktivität ist

$$[L] = 1$$
Henry  $= 1H = \frac{Vs}{A}$ 

#### Beispiel: Spule

Bei einer langen Spule mit N Windungen, Länge l und Windungsdichte n = N/l ist das Magnetfeld

$$B = \mu_0 \, \mu_r \, n \, I$$

so dass

$$\partial_t B = \mu_0 \, \mu_r \, n \, \partial_t I$$

Die in der Spule selber induzierte Spannung ist bei N Windungen ist insgesamt

$$U_{ind} = \oint \vec{E} \, d\vec{s} = -N\vec{A} \, \partial_t \vec{B} = -n \underbrace{lA}_{=V} \partial_t B = -\underbrace{nV \, \mu_0 \, \mu_r \, n}_{=L} \partial_t I$$

so dass mit dem Volumen V = A l für die Induktivität folgt:

$$L = \mu_0 \,\mu_r \, n^2 \, V \tag{5.10}$$

Anschaulich ergibt sich der Faktor  $n^2$ , da die nl Windungen ein Magnetfeld erzeugen, dass auf die nl Windungen wirkt. Beispielsweise ist bei  $n = 10 \text{cm}^{-1}$  und  $V = 10 \text{cm}^3$  und  $\mu_r = 1000$  die Induktivität  $L \approx 12 \text{mH}$ .

# 6 Schaltkreise

## 6.1 Schaltvorgänge mit Spulen und Kondensatoren

### 6.1.1 Einschalten einer Spule

Wir betrachten einen Stromkreis mit Spannungsquelle  $U_0 = const.$ , Widerstand R und Spule mit Induktivität L. Hier beinhaltet Rsowohl den Ohm'schen Widerstand der Spule als auch den Innenwiderstand der Stromquelle. Schaltet man den Stromkreis zur Zeit t = 0 ein, so beobachtet man, dass sich der Strom nur langsam aufbaut, bis er schließlich einen konstanten Wert  $I = U_0/R$  erreicht. Der Grund hierfür ist die Selbstinduktivität der Spule, in der nach der Lenz'schen Regel eine Gegenspannung aufgebaut wird, die der Spannung  $U_0$  entgegenwirkt.

Für die Maschenregel  $\sum_{a} U = \sum U_R$  wird die induzierte Spannung als weitere Spannungquelle betrachtet,

$$U_0 + U_{ind} = U_R = RI$$

mit  $U_{ind} = -L \partial_t I$  folgt

$$U_0 - L \ \partial_t I = RI \qquad \Rightarrow \qquad \frac{L}{R} \ \partial_t I + I = \frac{U_0}{R}$$

also eine Differentialgleichung erster Ordnung. Da die Größe L/R die Dimension einer Zeit trägt und U/R die Dimension eines Stroms, werden die Abkürzungen

$$\tau = \frac{L}{R} \qquad \qquad I_{\infty} = \frac{U_0}{R} \qquad (6.1)$$

eingeführt. Damit folgt für die Differentialgleichung<sup>7</sup>

$$\tau \cdot \partial_t I + I = I_{\infty} \tag{6.2}$$

 $^{7}$ Eine Differentialgleichung der Form

$$\tau \; \partial_t I + I = I_{\infty}$$

kann man nach Variablen separieren

$$\tau \frac{dI}{dt} = -(I - I_{\infty}) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dI}{I - I_{\infty}} = -\frac{dt}{\tau}$$

und integrieren (nach Umbenennung der Variablen)

$$\int_{I_0}^{I(t)} \frac{dI'}{I' - I_\infty} = -\int_{t_0}^t \frac{dt}{\tau} \qquad \Rightarrow \qquad \ln \frac{I(t) - I_\infty}{I_0 - I_\infty} = -\frac{t - t_0}{\tau}$$



Abb. 6.1 Schaltung zum Einschalten einer Spule.

Offenbar ist  $\tau$  die charakteristische Zeit und  $I_{\infty}$  der charakteristische Strom des Einschaltvorgangs. Insbesondere erwartet man für lange Zeiten  $t = \infty$  nach dem Einschaltvorgang, dass der Stromkreis stabil wird, d.h.  $\partial_t I = 0$ . Aus der Differentialgleichung folgt daher unmittelbar, dass

$$I(t=\infty)=I_{\infty}$$

Die Lösung der Differentialgleichung ist allgemein

$$\boxed{\frac{I(t) - I_{\infty}}{I_0 - I_{\infty}} = e^{-\frac{t - t_0}{\tau}}}$$
(6.3)

Zum Zeitpunkt  $t_0 = 0$  soll auch der Strom Null sein,  $I_0 = 0.$  Damit folgt

$$I(t) = I_{\infty} \left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$
(6.4)

Offenbar baut sich der Strom durch die Selbstinduktion der Spule nur langsam auf mit einer Zeitkonstante  $\tau = L/R$ .

### 6.1.2 Einschalten eines Kondensators

Für die gleiche Schaltung nur mit einem Kondensator der Kapazität C anstelle der Spule gilt nach der Maschenregel mit  $U_C = Q/C$ 

$$U_0 = RI + \frac{Q}{C} = R \partial_t Q + \frac{Q}{C}$$

Hier ist Q die Ladung im Kondensator. Mit

$$\tau = RC \qquad \qquad Q_{\infty} = U_0 C \qquad (6.5)$$

folgt

$$\boxed{\tau \cdot \partial_t \, Q + Q = Q_\infty} \tag{6.6}$$

Diese Differentialgleichung hat dieselbe Form und Lösung wie Gleichung 6.2 mit der Ersetzung  $I(t) \rightarrow Q(t)$ . Wird der Kondensator ab  $t_0 = 0$  aufgeladen, so ist Q(t = 0) = 0 und daher

$$Q(t) = Q_{\infty} \left(1 - e^{-t/\tau}\right) \tag{6.7}$$

Der Strom hingegen ist

$$I(t) = \partial_t Q(t) = \frac{U_0}{R} e^{-t/\tau}$$

Der Kondensator muss zunächst aufgeladen werden. Danach ist der Strom Null. Der Kondensator ist undurchlässig für Gleichstrom.

### 6.1.3 Ausschalten einer Spule

Eine Spule wird lange Zeit nach Einschalten wieder über einen weiteren Widerstand kurzgeschlossen. Zur Zeit  $t \ll 0$  wurde der Schalter geschlossen. Zur Zeit t = 0 gilt dann  $I_L(t = 0) = U_0/R_L$ . Wird



Abb. 6.2 Strom beim Einschalten einer Spule.



#### Abb. 6.3

Schaltung zum Einschalten eines Kondensators.



Abb. 6.4 Ladung beim Einschalten eines Kondensators.

Mit

folgt



Abb. 6.5 Schaltung zum Ausschalten einer Spule.



**Abb. 6.6** Strom beim Ausschalten einer Spule.

der Schalter zur Zeit t = 0 geöffnet, so ist die Spule über die beiden Widerstände kurzgeschlossen. Nach der Maschenregel folgt

$$0 = (R_1 + R_L) I + L \partial_t I$$

$$\tau = \frac{L}{R_1 + R_L}$$

 $\tau \, \partial_t \, I + I = 0$ 

Diese Differential<br/>gleichung hat dieselbe Form und Lösung wie Gleichung 6.2 mit der Ersetzung <br/>  $I_\infty$  = 0, so dass

$$I(t) = I_0 \ e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} \tag{6.8}$$

Mit  $I(0) = I_L(0) = U_0/R_L$  folgt

$$I(t) = \frac{U_0}{R_L} e^{-t/\tau}$$
(6.9)

Insbesondere ist die Spannung ganz kurze Zeit $t\gtrsim 0$ nach dem Kurzschließen

$$U_1 = R_1 I = U_0 \frac{R_1}{R_L}$$

Für  $R_1 \gg R_L$  treten daher sehr hohe Spannungs-Spitzen bei  $R_1$  auf. Daher muss beim Ausschalten von Spulen vorsichtig vorgegangen werden, um Schaltungen nicht zu gefährden.

## 6.2 Energiedichte des Magnetfelds

Die Energie, die im Stromkreis (Abbildung 6.5) nach Abschalten der Spannungsquelle verbraucht wird, muss im Magnetfeld der Spule gespeichert gewesen sein. Daraus soll die Energiedichte des Magnetfelds berechnet werden. In einem kleinen Zeitraum dt wird in den beiden Widerständen die Energie

$$dW = P(t) dt = U I dt = (R_1 + R_L) I^2 dt = \frac{L}{\tau} I^2 dt$$

deponiert. Integration ergibt mit Gleichung 6.9

$$W = \int dW = \int_0^\infty \frac{L}{\tau} I_0^2 e^{-2t/\tau} dt = \frac{1}{2} L I_0^2$$

Der Strom  $I_0$  hatte zum Zeitpunkt t = 0 das Magnetfeld  $B = \mu_0 \mu_r n I$  erzeugt. Zusammen mit der Induktivität L nach Gleichung 5.10 ergibt sich

$$W = \frac{1}{2} B H V \tag{6.10}$$

Die Energiedichte ist damit also

$$w = \frac{W}{V} = \frac{1}{2} B H = \frac{1}{2\mu_0 \mu_r} B^2$$
(6.11)

Für eine Kombination aus elektrischem und magnetischem Feld folgt also als Energiedichte

$$w = \frac{1}{2}ED + \frac{1}{2}BH$$
(6.12)

Ein Magnetfeld der Stärke $B=1{\rm T}$ hat also in einem Volumen von  $V=1{\rm m}^3$  den Energieinhalt von  $W=4\cdot 10^5{\rm Joule}.$ 

### 6.3 Energie im Wechelstromkreis

Wie beschrieben kann man Wechselspannungen durch Drehen einer Spule in einem Magnetfeld recht einfach erzeugen. Im Folgenden soll die Reaktion eines Stromkreises auf eine äußere Wechselspannung betrachtet werden. Einschaltvorgänge, die ja nach kurzer Zeit abklingen, werden hierbei vernachlässigt. Beispiele für Anwendungen sind elektrische Geräte im Haushalt, Musik-Wiedergabe oder elektronische Signalverarbeitung.

Im Allgemeinen wird eine Wechselspannung der Form

$$U(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi_U) \tag{6.13}$$

mit Frequenz  $\nu$ , Kreisfrequenz  $\omega$  und Periodendauer T,

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega} \qquad \qquad \omega = 2\pi\nu \qquad (6.14)$$

in einem Schaltkreis mit Widerständen, Kondensatoren und Spulen zu einem Strom

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi_I) \tag{6.15}$$

führen. Die im Stromkreis verbrauchte Leistung (siehe auch Gleichung 3.10) zu jedem Zeitpunkt ist

$$P(t) = U(t)I(t)$$

Da Spannung und Strom periodisch sind, reicht es, eine Periodendauer

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

zu betrachten. Die mittlere Leistung über eine Periode ist

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T U I \, dt \tag{6.16}$$

Einsetzen von U(t) und I(t) ergibt aufgrund der Additionstheoreme<sup>8</sup> unter dem Integral die Terme

$$\frac{\int_0^T \cos^2(\omega t + \varphi_U) dt}{\int_0^T \cos(\omega t + \varphi_U) \sin(\omega t + \varphi_U) dt} = 0$$
<sup>8</sup> Für  $\Delta = \gamma - \beta$  gilt

$$cos(\alpha + \beta) cos(\alpha + \gamma)$$
  
=  $cos(\alpha + \beta) cos(\alpha + \beta + \Delta)$   
=  $cos(\alpha + \beta) [cos(\alpha + \beta) cos \Delta - sin(\alpha + \beta) sin \Delta]$   
=  $cos^{2}(\alpha + \beta) cos \Delta - cos(\alpha + \beta) sin(\alpha + \beta) sin \Delta$ 



Abb. 6.7 Strom und Spannung in Phase.



Abb. 6.8 Strom und Spannung um  $\pi/2$ phasenverschoben.

Dies gilt unabhängig von der Anfangsphase  $\varphi_U$  bei Integration über eine volle Periode. Insgesamt ergibt sich für die tatsächliche "Wirkleistung"

$$\bar{P} = \frac{1}{2} U_0 I_0 \cos(\varphi_U - \varphi_I)$$
(6.17)

Die Phasendifferenz zwischen U und I ist also entscheidend für die Wirkleistung.

- $\varphi_U \varphi_I = 0$ Strom und Spannung sind in Phase, die Wirkleistung ist  $\bar{P} = \frac{1}{2}U_0I_0$ .
- $\varphi_U \varphi_I = \pm \pi/2$ Hierfür ist  $\overline{P} = 0$ , es wird keine Wirkleistung verbraucht.

Häufig werden anstelle der Spitzenwerte  $U_0$  und  $I_0$  die Effektivwerte

$$U_{eff} = \frac{1}{\sqrt{2}} U_0, \qquad \qquad I_{eff} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \ I_0$$

verwendet, so dass

$$\bar{P} = U_{eff} I_{eff} \cos(\varphi_U - \varphi_i)$$
(6.18)

Zum Beispiel ist für die standardisierte Spannung  $U_{eff} = 220$ V die Spitzenspannung  $U_0 = 311$ V.

## 6.4 Komplexe Widerstände

Für Schaltkreise mit mehreren Kondensatoren und Spulen wird die Berechnung der Differentialgleichungen und deren Lösung sehr aufwendig und die resultierenden Widerstände sind frequenzabhängig,  $R = R(\omega)$ . Man führt daher - zur Vereinfachung der Rechnungen komplexe Widerstände ein.

Wir betrachten eine kosinusförmige Spannung und wählen den Zeitpunkt t = 0 so, dass die Phase Null ist. Der daraus resultierende Gesamtstrom kann gegenüber der Spannung um einen Winkel  $\varphi$  verschoben sein. Anstelle der Darstellung mit reellen Funktionen

$$U = U_0 \cos \omega t \qquad \qquad I = I_0 \cos(\omega t + \varphi) \qquad (6.19)$$

führen wir eine Darstellung mit komplexen Funktionen ein,

$$U = U_0 e^{i\omega t} \qquad I = I_0 e^{i\omega t + \varphi} \tag{6.20}$$

Auch hierbei sind  $U_0$ ,  $I_0$  und  $\varphi$  reell. Für die komplexe Darstellung definieren wir den komplexen Widerstand

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{U_0}{I_0} e^{-i\varphi}$$

und die Impedanz als |Z|.

### 6.4.1 Ohm'scher Widerstand

In diesem Fall gilt auch in der komplexen Darstellung einfach das Ohm'sche Gesetz

$$U = RI = U_0 e^{i\omega t}$$

so dass mit  $I_0 = U_0/R$ 

$$I = \frac{U_0}{R} e^{i\omega t}$$

Die Impedanz ist in diesem Fall reell,

$$Z_R = \frac{U}{I} = R \tag{6.21}$$

### 6.4.2 Kondensator

Die Ladung Q im Kondensator ist gegeben durch Spannung U und die Kapazität C = Q/U. Damit folgt für den Strom, der in den Kondensator fließt,

$$I = \partial_t Q = C \partial_t U \tag{6.22}$$

In der komplexen Darstellung folgt aus

$$U = U_0 e^{i\omega t}$$

der Strom

$$I = C \partial_t U = i\omega C U_0 e^{i\omega t} = \omega C U_0 e^{i(\omega t + \pi/2)}$$
(6.23)

und für den komplexen Widerstand Z = U/I

$$Z_C = \frac{1}{i\,\omega\,C} \tag{6.24}$$

Die Phasenverschiebung um  $\pi/2$  ergibt sich, weil erst ein Strom fließen muss, um im Kondensator die Spannung aufzubauen. Dies gilt auch für die reelle Darstellung<sup>9</sup>. Nach Gleichung 6.17 wird bei dieser Phasenverschiebung im Kondensator keine Leistung verbraucht.

### 6.4.3 Spule

Entsprechend dem Induktionsgesetz ist die Spannung in der Spule gegeben durch

$$U = L \partial_t I \tag{6.25}$$

 $^9$  In der reellen Darstellung folgt für  $U=U_0\,\cos\omega t$ als Strom

$$I = C \partial_t U = -\omega C U_0 \sin \omega t = \omega C U_0 \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

Dies ist aber gerade der Realteil der komplexen Darstellung,

$$Re U = U_0 \cos \omega t$$
  $Re I = \omega C U_0 \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$ 



Abb. 6.9 Strom und Spannung sind beim Ohm'schen Widerstand in Phase.



Abb.6.10PhasenverschiebungbeimKondensator.

Im Kondensator eilt der Strom vor.

so dass sich für den Strom

$$I = \frac{1}{L} \int U \, dt = \frac{1}{L} \int U_0 \, e^{i\omega t} \, dt = \frac{1}{i\omega L} \, U_0 \, e^{i\omega t} = \frac{1}{\omega L} \, U_0 \, e^{i(\omega t - \pi/2)}$$
(6.26)

ergibt. Der komplexe Widerstand Z = U/I ist damit

$$\overline{Z_L = i\,\omega\,L} \tag{6.27}$$

Die Phasenverschiebung um  $-\pi/2$  zwischen Strom und Spannung ergibt sich, weil nach der Lenz'schen Regel die induzierte Spannung dem Strom entgegenwirkt und dieser sich daher erst langsam aufbauen kann. Dies gilt auch für die reelle Darstellung<sup>10</sup>. Nach Gleichung 6.17 wird bei dieser Phasenverschiebung in der Spule keine Leistung verbraucht.

### 6.4.4 R-L-C Schaltungen

Für eine Schaltung mit Ohm'schen Widerständen, Kondensatoren und Spulen ergeben sich Phasenverschiebungen zwischen den Spannungen und Strömen dieser Komponenten. In der reellen Darstellung führt dies zu komplizierten Formeln mit Sinus und Kosinus Termen und deren Amplituden und Phasen. Das Rechnen in der komplexen Darstellung ist dagegen viel einfacher. Entsprechend

	Ohm'scher W.	Kondensator	Spule
Formel	U = R I	$I = C \partial_t U$	$U = L \partial_t I$
Z	R	$\frac{1}{i\omega C}$	$i\omega L$
Phase $\varphi_I - \varphi_U$	0	$+\frac{\pi}{2}$ , <i>I</i> vor	$-\frac{\pi}{2}$ , <i>I</i> spät
Leistung $\bar{P}$	$\frac{1}{2}U_0I_0$	0	0

**Tabelle 6.1** Komplexe Widerstände und Phasenverschiebungen beiWechselspannungen.

diesen Formeln sperrt der Kondensator bei kleinen Frequenzen  $\omega$ , die Spule dagegen sperrt bei großen Frequenzen.

Für das Beispiel einer Reihenschaltung von R, C und L in Abb. 6.14 ergibt sich nach den Kirchhoff'schen Regeln

- Knoten: es gibt keine
- Masche:

$$U = U_R + U_C + U_L$$

 $^{\overline{10}}$  In der reellen Darstellung folgt für  $U=U_0\,\cos\omega t$  als Strom

$$I = \frac{1}{L} \int U dt = \frac{U_0}{\omega L} \sin \omega t = \frac{U_0}{\omega L} \cos(\omega t - \pi/2)$$

Auch für die Spule ist dies gerade wieder der Realteil der komplexen Lösung,

$$Re U = U_0 \cos \omega t$$
  $Re I = \frac{U_0}{\omega L} \cos(\omega t - \pi/2)$ 

**Abb. 6.11** Phasenverschiebung bei der Spule.

Bei einer Induktivität kommt der Strom spät.



**Abb. 6.12** Komplexe Widerstände als Funktion der Frequenz.



Abb. 6.13

Zeigerdiagramm: Widerstände in der komplexen Ebene.



Abb. 6.14 R-C-L Reihenschaltung.

Hierbei ist U die von außen angelegte Spannung. Durch Ableiten nach der Zeit folgt aus den Formeln in Tabelle 6.1

$$\partial_t U = R \,\partial_t I + \frac{1}{C} \,I + L \,\partial_t^2 \,I \tag{6.28}$$

Dies ist für I(t) eine lineare Differentialrechnung 2. Ordnung mit reellen Koeffizienzen. Gelöst werden soll diese Gleichung für

 $U = U_0 \cos \omega t$ 

Für reelle  $U_0$  ist dies der Realteil der komplexen Winkelfunktion,

$$Re\left(U_0 e^{i\omega t}\right) = U_0 \cos \omega t$$

Man löst also die komplexe Gleichung

$$\partial_t (U_0 e^{i\omega t}) = R \partial_t I + \frac{1}{C} I + L \partial_t^2 I = (R \partial_t + \frac{1}{C} + L \partial_t^2) I$$

mit einem komplexen Ansatz für I(t) und betrachtet nachher als physikalische Lösung nur den Realteil<sup>11</sup> von I(t). Dies ist nur ein mathematischer Trick, der funktioniert, weil die Ausdrücke in der Klammer alle reell sind<sup>12</sup>.

### 6.5 Wechselstromschaltungen

### 6.5.1 R-C Glied als Hochpass

Zunächst wird der Gesamtwiderstand und Strom berechnet. Daraus folgt die Ausgangsspannung  $U_a$  als Spannungsabfall über den Widerstand R. Für diese Schaltung findet man

$$U = U_R + U_C = Z_R I + Z_C I = (Z_R + Z_C) I = Z_{ges} I$$

 $\operatorname{mit}$ 

$$Z_{ges} = R + \frac{1}{i\omega C} \qquad |Z_{ges}| = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}$$

Der Winkel  $\varphi_Z$  zwischen Imaginär- und Realteil von Z ist

$$\tan \varphi_Z = \frac{-1/(\omega C)}{R} = -\frac{1}{\omega CR} \qquad \qquad Z_{ges} = |Z_{ges}| e^{i\varphi_Z}$$

Damit ist der Strom

$$I = \frac{U}{Z_{ges}} = \frac{U_0 e^{i\omega t}}{|Z_{ges}| e^{i\varphi_Z}} = \frac{U_0}{|Z_{ges}|} e^{i(\omega t - \varphi_Z)}$$

<sup>11</sup>Man könnte auch den Imaginärteil von I(t) betrachten. Dieser entspricht der Lösung für  $U = U_0 \sin \omega t$  und enthält bis auf eine Phasenverschiebung keine neuen Informationen.



Abb. 6.15 Hochpass aus Widerstand und Kondensator.



#### Abb. 6.16 Ausgangsspannung von Hochund Tiefpass.



**Abb. 6.17** Phase der Ausgangsspannung von Hoch- und Tiefpass. 63

<sup>&</sup>lt;sup>12</sup>In der Quantenmechanik dagegen müssen Differentialgleichungen (Schrödinger-Gleichung, Dirac-Gleichung) mit komplexen Koeffizienten gelöst werden. Ihre Lösungen, die Wellenfunktionen von Teilchen, sind dann tatsächlich komplexe Funktionen, die physikalisch interpretiert werden müssen.

Die Ausgangsspannung  $U_a$  wird gemessen als Spannungsabfall über dem Ohm'schen Widerstand R,

$$U_a = Z_R I = \frac{Z_R}{Z_{ges}} U = \frac{RU}{Z_{ges}} = \frac{\omega CR}{\sqrt{1 + \omega^2 C^2 R^2}} U e^{-i\varphi Z} U e^{-i\varphi$$

Die Durchlassfunktion für diesen "Spannungsteiler"

$$\frac{|U_a|}{|U|} = \frac{|Z_R|}{|Z_{ges}|} = \frac{\omega CR}{\sqrt{1 + \omega^2 C^2 R^2}}$$

zeigt, dass der Kondensator für kleine Frequenzen sperrt, für hohe Frequenzen  $\omega >> 1/(RC$  aber durchlässig ist, so dass die Eingangsspannung fast vollständig auch am Ausgang anliegt,  $|U_a| \leq |U|$ (Hochpass).

Der Strom ist gegenüber der Spannung um  $-\varphi_Z$  phasenverschoben. Da an R keine Phasenverschiebung stattfindet, sind  $U_a$  und I in Phase und damit ist auch  $\varphi_a = \varphi_I = -\varphi_Z$ .

### 6.5.2 R-C Glied als Tiefpass

Ändert man in der obigen Schaltung die Reihenfolge von Kondensator und Widerstand, so bleibt der Gesamtwiderstand und Strom unverändert. Die Ausgangsspannung fällt über dem Kondensator ab,

$$U_a = Z_C I = \frac{Z_C}{Z_{ges}} U = \frac{1/(i\omega C)}{R + 1/(i\omega C)} U$$

so dass die Durchlassfunktion

$$\frac{|U_a|}{|U|} = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2 C^2 R^2}}$$

ist. In diesem Fall liegt ein Tiefpass vor, denn der Kondensator schließt hohe Frequenzen gegenüber der Masse kurz.



Abb. 6.19 RCL- Reihenschwingkreis.

## 6.6 Schwingkreise

### 6.6.1 R-C-L Serienschwingkreis als Frequenzfilter

Die bereits in Gleichung 6.28 angegebene Differentialgleichung hat die gleiche Form wie die Bewegungsgleichung eines Pendels mit Reibung und periodischer Anregung (siehe Mechanik-Vorlesung). Genau wie dort erwartet man also ein Resonanzverhalten.

Der Gesamtwiderstand ist in diesem Fall

$$Z_{ges} = Z_C + Z_L + Z_R = \frac{1}{i\omega C} + i\omega L + R = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$



Abb. 6.18 Tiefpass aus Widerstand und Kondensator.

Aus C und L lassen sich Größen mit der Dimension einer Frequenz und eines Widerstands konstruieren, die charakteristisch für das Problem sind:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad \qquad R_{LC} = \sqrt{\frac{L}{C}} \qquad (6.29)$$

Damit lässt sich der Imaginärteil von  $Z_{ges}$  schreiben als

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = R_{LC} \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega \,\omega_0} \tag{6.30}$$

$$|Z_{ges}| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{R^2 + R_{LC}^2 \left(\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega \omega_0}\right)^2}$$

Offenbar wird  $Z_{ges}$  minimal bei  $\omega = \omega_0$ , so dass  $\omega_0$  die Resonanzfrequenz ist. Die Ausgangsspannung ist wieder

$$U_a = Z_R I = \frac{Z_R}{Z_{ges}} U$$

so dass die Durchlassfunktion

$$\frac{|U_a|}{|U_{ges}|} = \sqrt{1 + \frac{R_{LC}^2}{R^2} \left(\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega \,\omega_0}\right)^2}^{-1}$$

ein Maximum bei der Resonanzfrequen<br/>z $\omega_0$ hat. Bei dieser Frequenz ist das LC-Glied vollständig durchlässig. Die Breite der Resonanzkurve wird so definiert, dass Realteil und Imaginärteil von  $Z_{ges}$ gleich groß sind, also

$$\omega_{1,2}L - \frac{1}{\omega_{1,2}C} = \mp R$$

oder

$$\omega_{1,2}^2 LC - 1 = \mp \omega_{1,2} CR$$

Subtrahiert man diese beiden Gleichungen voneinander, so findet man als Breite beziehungsweise relative Breite der Resonanzkurve

$$\Delta \omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{R}{L} = \omega_0 \frac{R}{R_{LC}} \qquad \qquad \frac{\Delta \omega}{\omega_0} = \frac{R}{R_{LC}}$$

Die Phasenverschiebung ergibt sich wegen

$$\tan(\varphi_Z) = \frac{Im(Z_{ges})}{Re(Z_{ges})}$$

zu

$$\tan(\varphi_{U_a}) = \tan(-\varphi_Z) = -\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} = -\frac{R_{LC}}{R} \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega \omega_0}$$

Auf der Resonanz, bei  $\omega = \omega_0$ , ist

$$\varphi_{U_a} = 0, \qquad \qquad Z_{ges} = R, \qquad \qquad U_a = U$$



Abb. 6.20

Ausgangsspannung des Reihenschwingkreises für  $R_{CL} = 4R$ .



Abb. 6.21 Ausgangsphase des Reihenschwingkreises für  $R_{CL} = 4R$ .



Abb. 6.22 CL- Parallelschwingkreis.



Abb. 6.23

Ausgangsspannung des Parallelschwingkreises für  $R = 4R_{CL}$ .



Abb. 6.24 Ausgangsphase des Parallelschwingkreises für  $R = 4R_{CL}$ .

### 6.6.2 R-C-L als Parallelschwingkreis

Für die Parallelschaltung von C und L gilt nach der

• Maschenregel:

$$U_C = U_L$$

• Knotenregel:

$$I = I_L + I_C = \frac{U_L}{Z_L} + \frac{U_C}{Z_C} = U_C \frac{1}{Z'}$$

mit dem rein imaginären Widerstand

$$\frac{1}{Z'} = \frac{1}{Z_L} + \frac{1}{Z_C} \qquad \qquad Z' = \frac{Z_L Z_C}{Z_L + Z_C} = \frac{L/C}{i(\omega L - \frac{1}{\omega C})}$$

Mit den gleichen Definitionen für  $\omega_0$  und  $R_{LC}$  wie beim Reihenschwingkreis (Gleichung 6.30) folgt

$$Z' = -i R_{LC} \frac{\omega \,\omega_0}{\omega^2 - \omega_0^2}$$

Für den Gesamtwiderstand gilt dann

$$|Z_{ges}| = |Z_R + Z'| = \sqrt{R^2 + R_{LC}^2 \left(\frac{\omega \,\omega_0}{\omega^2 - \omega_0^2}\right)^2}$$

Offenbar wird der Betrag von  $Z_{ges}$  beliebig groß bei der Resonanzfrequenz  $\omega = \omega_0$ . Die Spannung fällt also auf der Resonanz komplett über dem *LC*-Glied ab. Aus der Ausgangsspannung des Spannungsteilers folgt als Durchlassfunktion

$$\frac{|U_a|}{|U_{ges}|} = \frac{|Z_R|}{|Z_{ges}|} = \sqrt{1 + \frac{R_{LC}^2}{R^2} \left(\frac{\omega \,\omega_0}{\omega^2 - \omega_0^2}\right)^2}^{-1}$$

## 6.7 Energie im Schwingkreis

In einem Reihenschwingkreis ohne äußere Spannungsquelle muss zu jedem Zeitpunkt die zeitliche Änderung der Energie in Kondensator und Spule gleich der Verlustleistung im Widerstand sein,

$$-\partial_t \left(\frac{1}{2}CU_C^2 + \frac{1}{2}LI^2\right) = U_R I \tag{6.31}$$

Mit  $U_R = RI$  und  $U_C = CQ$  folgt

$$0 = RI^2 + \partial_t \left(\frac{1}{2C}Q^2 + \frac{1}{2}LI^2\right) = RI^2 + \frac{1}{C}QI + LI\partial_t I = I\left(RI + \frac{1}{C}Q + L\partial_t I\right)$$

Der Ausdruck in der Klammer muss Null sein. Ableitung nach der Zeit liefert

$$L \partial_t^2 I + R \partial_t I + \frac{1}{C} I = 0$$

Dies ist wieder die Differentialgleichung 6.28,, die aus der Maschenregel folgte.

- Die Energie in der Spule ist maximal, wenn der Realteil Re(I) maximal ist.
- Die Energie im Kondensator ist maximal, wenn die Spannung  $Re(U_C)$  maximal ist.

### 6.8 Fourier-Analyse

Untersucht werden soll zunächst die Reaktion eines Stromkreises auf eine beliebige periodische Anregung U = f(t) mit Periodendauer T. Hierfür gilt

$$f(t) = f(t+T)$$

für alle t. In diesen Fällen kann jede beliebige Pulsform durch eine Fourier-Zerlegung in Beiträge einzelner Frequenzen zerlegt werden. Bei linearen Schaltkreisen, bei denen Spannungen und Ströme linear voneinander abhängen, kann dann nach dem Superpositionsprinzip das Resultat für jede Frequenz aus den Beiträgen der einzelnen Frequenzen wieder zusammengesetzt werden.

Jede periodische Funktion kann durch eine diskrete Fourierzerlegung beschrieben werden als eine Superposition von Sinus und Kosinus-Funktionen. Allgemein gilt für jede periodische Funktion f(t) mit  $\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T$ 

$$f(t) = f_0 + f_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + f_2 \cos(2\omega t + \varphi_2) + f_3 \cos(3\omega t + \varphi_3) + \dots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty} f_n \cos(n\,\omega t + \varphi_n) \tag{6.33}$$

Dies ist also ein Linienspektrum mit konstanten Abständen  $\omega$  und reellen Amplituden  $f_n$ . Da

$$\cos\alpha = \frac{1}{2} (e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})$$

lässt sich die Summe auch mit komplexen Funktionen schreiben, wenn man auch negative n zulässt.

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{i(n\,\omega t + \varphi_n)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{in\,\omega t} e^{i\varphi_n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{f}_n e^{in\,\omega t} \quad (6.34)$$

wobei im letzten Schritt die komplexe Phase in die dann ebenfalls komplexen Fourier-Amplituden  $\tilde{f}_n$  absorbiert wurde. Diese lassen sich berechnen<sup>13</sup> durch

$$\tilde{f}_m = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-im\,\omega t} dt \qquad (6.35)$$

 $^{\overline{13}}$  Multiplikation mit  $e^{-im\omega t}$  und Integration auf beiden Seiten führt zu

$$\int_0^T f(t) e^{-im\omega t} = \sum_{n=-\infty}^\infty \int_0^T \tilde{f}_n e^{in\omega t - im\omega t} = \sum_{n=-\infty}^\infty \int_0^T \tilde{f}_n e^{i(n-m)\omega t}$$

• Für n = m ist die Exponentialfunktion gleich 1 und das Integral gleich T.



#### Abb. 6.25

Approximation einer periodischen Rechteck-Funktion mit den ersten 10 Summanden einer Fourier-Transformation (www.falstad.com/fourier). Bei nicht periodischen Vorgängen ist die "Periodendauer T" quasi unendlich groß, so dass die Abstände  $\omega = 2\pi/T$  zwischen den Frequenzen unendlich klein werden. Damit geht das Linienspektrum über in ein kontinuierliches Spektrum

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \qquad \qquad \tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$
(6.36)

Jeder Schwingkreis, und ganz allgemein jeder Messprozess, stellt einen Apparat zur Fourier-Analyse dar. Er reagiert unterschiedlich auf unterschiedliche Frequenzen. Ist der Schwingkreis linear, so reicht eine Darstellung seiner Eigenschaften als Funktion der Frequenz aus um sein Verhalten vollständig zu charakterisieren. Das zeitliche Verhalten ergibt sich dann aus der Rücktranformation. Ein idealer Messapparat, der ein zeitliches Verhalten exakt messen kann, muss also einen linearen Zusammenhang zwischen Eingangs- und Ausgangsignal haben, und seine Ausgangsamplitude und -Phase muss frequenzunabhängig sein.

$$\int_0^T e^{i(n-m)\omega t} = \frac{1}{i(n-m)\omega} \left( e^{i(n-m)\omega T} - 1 \right) = 0$$

wegen  $\omega T = 2\pi$  und  $e^{i2\pi} = 1$ .

Insgesamt bleibt also nur der Term mit n = m und es folgt Gleichung 6.35.

<sup>•</sup> Für  $n \neq m$  ist

# 7 Maxwell - Gleichungen

### 7.1 Der Verschiebungsstrom

Das Faraday'sche Gesetz

$$\nabla \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}$$

beschreibt, dass die zeitliche Veränderung des magnetischen Flusses ein "wirbelförmiges"  $\vec{E}$ -Feld erzeugt (und umgekehrt). Im Folgenden wird gezeigt, dass dies auch anders herum gelten muss:

• Die zeitliche Änderung von  $\vec{E}$ -Feldern erzeugt  $\vec{B}$ -Felder.

Im Detail betrachtet man einen Kondensator beim Aufladen und berechnet das Magnetfeld um eines der Zuleitungskabel.

$$\oint \vec{B} \, d\vec{s} = \underbrace{\mu_0 \iint \vec{j} \, d\vec{A}}_{I} = \mu_0 I \qquad (7.1)$$

Integral über Kreisbahn Integral über Kreisfläche

Man kann, bei gleicher Kreisbahn als Rand der Fläche, aber auch eine Fläche wählen, die keine Ebene ist, sondern mitten durch den Kondensator verläuft. Da mitten zwischen den Kondensatorplatten kein Strom fließt, gilt

$$\oint \vec{B} \, d\vec{s} = \underbrace{\mu_0 \iint \vec{j} \, d\vec{A}}_{=0} = 0 \quad (7.2)$$

Integral über Kreisbahn Integral mitten durch Kondensator

Mathematisch gibt es also einen Widerspruch zwischen diesen beiden Gleichungen. Maxwell interpretierte dies so, dass das Ampere'sche Gesetz nicht vollständig sein kann, sondern dass das sich im Kondensator aufbauende  $\vec{E}$ -Feld die Funktion des Stroms übernimmt. Mit der Kapazität  $C = \epsilon_0 A/d$  gilt für die Ladung im Kondensator

$$Q = C U = \epsilon_0 \frac{A}{d} U = \epsilon_0 A E$$

Daraus folgt

$$I = \partial_t Q = \epsilon_0 A \partial_t E$$

Damit definierte Maxwell die "Verschiebungsstromdichte" als

$$j_V = \frac{I}{A} = \epsilon_0 \,\partial_t E$$

Dies ist ein symbolischer Strom, der im Kondensator nur durch die zeitliche Änderung des  $\vec{E}$ -Feldes gegeben ist. Addiert man nun die tatsächliche, reale Stromdichte j und die Verschiebungsstromdichte  $j_V$ , so erhält man die neue Form des Ampere'schen Gesetzes.

$$\oint \vec{B} \, d\vec{s} = \mu_0 \iint \left( \vec{j} + \vec{j}_V \right) d\vec{A} \tag{7.3}$$





#### **Abb. 7.1** Integrationswege zur Ableitung des Verschiebungsstroms.

und damit

Ampere-Maxwell'sches Gesetz in integraler Form

$$\oint \vec{B} \, d\vec{s} = \mu_0 \, I + \epsilon_0 \, \mu_0 \, \partial_t \, \iint \vec{E} \, d\vec{A} \tag{7.4}$$

Experimentell kann man auch tatsächlich in einem Plattenkondensator, der mit Wechselstrom auf- und entladen wird, ein Magnetfeld nachweisen. Man stellt dafür eine Ringspule mit Magnetkern in den Kondensator. Das sich im Kondensator auf- und abbauende  $\vec{E}$ -Feld erzeugt ein wirbelförmiges  $\vec{B}$ -Feld, das in der Ringspule verläuft und dadurch in den Spulenwicklungen eine Spannung induziert. Der Effekt ist allerdings durch die zusätzliche Konstante  $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} C^2 / (Nm^2)$  sehr klein. Er spielt aber für elektromagnetische Wellen eine entscheidende Rolle.

Die Notwendigkeit für diese Erweiterung des Ampere'schen Gesetzes kann man auch aus der Ladungserhaltung folgern. Zunächst kann man sehen, dass das Ampere'sche Gesetz in der Form, in der es in der Magnetostatik benutzt wurde,

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

nicht allgemein gültig sein kann. Wendet man nämlich die Divergenz auf diese Gleichung an, so findet man

$$\nabla(\nabla \times \vec{B}) = \mu_0 \nabla \vec{j}$$

Die linke Seite mit  $\nabla(\nabla \times ...)$  ist mathematisch für alle Vektorfelder immer Null. Die rechte Seite  $\nabla \vec{j}$  ist aber wegen der Ladungserhaltung  $\nabla \vec{j} = -\partial_t \rho$  nur dann Null, wenn sich die Ladungsdichte zeitlich nirgendwo ändert, also im statischen Fall. Z.B. beim Aufladen eines Kondensators gilt das aber nicht. Benutzt man das Coloumb-Gesetz  $\nabla \vec{E} = \rho/\epsilon_0$ , so ergibt sich aus der Ladungserhaltung

$$\nabla \vec{j} = -\partial_t \varrho = -\partial_t (\epsilon_0 \nabla \vec{E}) = -\nabla (\epsilon_0 \partial_t \vec{E})$$
(7.5)

Ladungserhaltung und Coulomb-Gesetz erzwingen also, dass man $\nabla \times \vec{B}$ nur schreiben kann als

Ampere-Maxwell'sches Gesetz in differentieller Form

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{j} + \epsilon_0 \,\partial_t \vec{E} \right) \tag{7.6}$$

Magnetische Wirbelfelder werden also von Strömen und zusätzlich von zeitlich veränderlichen elektrischen Feldern hervorgerufen. Integration über eine zeitlich konstante Fläche und Anwendung des Stokes'schen Integralsatzes ergibt wieder das Ampere-Maxwell Gesetz in integraler Form,

$$\oint \vec{B} \, d\vec{s} = \mu_0 \, I + \epsilon_0 \, \mu_0 \, \partial_t \, \iint \vec{E} \, d\vec{A} \tag{7.7}$$

9)

## 7.2 Zusammenfassung der Maxwell-Gleichungen

Aus den bisher diskutierten Experimenten ergeben sich die 4 Maxwellgleichungen und die Lorentzkraft als Grundlage der klassischen Elektrodynamik:

$$\nabla \vec{E} = \frac{\varrho}{\epsilon_0} \qquad \qquad \text{Gauß} \qquad (7.8)$$

$$\nabla \vec{B} = 0 \tag{7}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}$$
 Faraday (7.10)

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \,\vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \,\partial_t \vec{E} \qquad \text{Ampere-Maxwell} \tag{7.11}$$

 $\vec{F} = q \left( \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right)$  Lorentzkraft (7.12)

- 7.8 Ladungen sind Quellen des *E*-Feldes.
- 7.9 *B*-Felder haben keine Quellen.
- 7.10 E-Felder werden von variablen B-Feldern erzeugt.
- 7.11 B-Felder werden von Strömen und von variablen E-Feldern erzeugt.
- 7.12 *E* und *B*-Felder üben Kräfte auf Ladungen aus.
  - Die Erhaltung der elektrischen Ladung ist in diesen Gleichungen bereits enthalten. Wendet man die Divergenz auf Gleichung 7.11 an

$$\nabla(\nabla \times \vec{B}) = 0 = \mu_0(\nabla \vec{j} + \epsilon_0 \partial_t \nabla \vec{E})$$

und benutzt Gleichung 7.8, so folgt

$$\nabla \vec{j} + \partial_t \varrho = 0 \tag{7.13}$$

- Ladungserhaltung
- Die Maxwell-Gleichungen ändern ihre Form nicht bei einer Lorentz-Transformation, wenn Zeit und Ortskoordinaten sowie die Felder  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  adäquat transformiert werden. Sie gehorchen also den Gesetzen der speziellen Relativitätstheorie.
- Durch Anwendung des Gauß'schen oder Stokes'schen Satzes erhält man die Maxwell-Gleichungen in integraler Form. Man sollte beachten, dass sich die integralen Formen aus den differentiellen ergeben, wenn man die zeitlichen Ableitungen mit den Integralen vertauschen kann. Dies ist nur dann der Fall, wenn die Integralgrenzen nicht zeitabhängig sind. Dies schränkt die Anwendbarkeit der angegebenen Integralformen ein.

Maxwell-Gleichungen in differentieller Form Maxwell-Gleichungen in

differentieller und inte-

graler Form

 $\nabla \vec{E} = \frac{\varrho}{\epsilon_0} \qquad \qquad \oint \vec{E} \, d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0} \tag{7.14}$ 

$$0 \qquad \qquad \oint \vec{B} \, d\vec{A} = 0 \tag{7.15}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B} \qquad \qquad \oint \vec{E} \, d\vec{s} = -\partial_t \iint \vec{B} \, d\vec{A} \qquad (7.16)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \,\vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \,\partial_t \vec{E} \qquad \oint \vec{B} \,d\vec{s} = \mu_0 \,I + \mu_0 \epsilon_0 \partial_t \,\iint \vec{E} d\vec{A} \quad (7.17)$$

## 7.3 Maxwell-Gleichungen in Materialien

Die Ladungen, Ströme und Felder in den Gleichungen 7.14 etc. berücksichtigen bereits Effekte durch Materialien, wenn man in  $\rho$  und  $\vec{j}$  Ladungen und Ströme einberechnet, die durch Polarisation  $\vec{P}$  und Magentisierung  $\vec{M}$  des Materials entstehen. Möchte man die Maxwell-Gleichungen nur mittels der äußeren (freien) Ladungen  $q_{frei}$  und Ströme  $I_{frei}$  berücksichtigen, so müssen statt der Felder  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  die Felder  $\vec{D}$  und  $\vec{H}$  benutzt werden. Mit den Definitionen

$$\vec{D} \equiv \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \qquad \vec{H} \equiv \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} \qquad (7.18)$$

gilt in Materialien

 $\nabla \vec{B}$  =

$$\nabla \vec{D} = \varrho_{frei} \qquad \qquad \oint \vec{D} \, d\vec{A} = q_{frei} \tag{7.19}$$

$$\nabla \vec{B} = 0 \qquad \qquad \oint \vec{B} \, d\vec{A} = 0 \tag{7.20}$$

Maxwell-Gleichungen in Materie

$$\nabla \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B} \qquad \qquad \oint \vec{E} \, d\vec{s} = -\partial_t \iint \vec{B} \, d\vec{A} \qquad (7.21)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j}_{frei} + \partial_t \vec{D} \qquad \oint \vec{H} \, d\vec{s} = I_{frei} + \partial_t \iint \vec{D} d\vec{A} \qquad (7.22)$$

In Materialien, in denen die Polarisation  $\vec{P}$  linear von  $\vec{E}$  und die Magnetisierung  $\vec{M}$  linear von  $\vec{B}$  abhängt, können  $\vec{D}$ ,  $\vec{H}$  wiederum durch  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  ausgedrückt werden.

$$\vec{D} = \epsilon_0 \,\epsilon_r \,\vec{E} \qquad \qquad \vec{H} = \frac{1}{\mu_0 \,\mu_r} \,\vec{B} \tag{7.23}$$

Dies gilt auch für obige Maxwell-Gleichungen, solange das Material zudem homogen ist, so dass  $\mu_r$  und  $\epsilon_r$  nicht explizit vom Ort abhängen.

## 7.4 Skalares Potential und Vektorpotential
## 7.4.1 Maxwell-Gleichungen und Potentiale

Die Maxwell-Gleichungen stellen ein System gekoppelter Differentialgleichungen dar. Nimmt man die Ladungsdichte  $\rho$  und Stromdichte  $\vec{j}$  als gegeben an, so werden die sechs Komponenten von  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  durch die 8 Gleichungen

$$\nabla \vec{E} = \frac{\varrho}{\epsilon_0} \qquad \nabla \vec{B} = 0$$
  
$$\nabla \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B} \qquad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \partial_t \vec{E}$$

bestimmt. Die  $\vec{E}$ - und  $\vec{B}$ -Felder sind also nicht unabängig. Es gibt nicht nur eine elektrische Wechselwirkung und eine magnetische Wechselwirkung, sondern nur eine kombinierte, elektromagnetische Wechselwirkung.

Man sollte also zunächst versuchen, dieses überbestimmte System auf weniger Komponenten zu reduzieren. In einem ersten Schritt wird die Anzahl der Gleichungen von 8 auf 4 reduziert und die Anzahl der Feldkomponenten von 6 auf 4. Dies geschieht durch die Einführung der Potentiale.

Ansatzpunkt ist, dass die beiden homogenen Gleichungen  $\nabla \vec{B} = 0$ und  $\nabla \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}$  nicht von Ladungen und Strömen abhängen. Man konstruiert daher Potentiale so, dass diese homogenen Gleichungen automatisch erfüllt sind.

Jedes Vektorfeld ist durch die Angabe von Rotation und Gradient vollständig bestimmt. Wegen  $\nabla \vec{B} = 0$  kann man daher das Magnetfeld vollständig auf die Rotation eines Vektorpotentials  $\vec{A}$  zurückführen,

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \tag{7.24}$$

Damit ist die eine homogene Gleichung automatisch erfüllt, denn für jedes Feld $\vec{A}$  gilt

$$\nabla \vec{B} = \nabla (\nabla \times \vec{A}) = 0$$

Setzt man dies in die zweite homogene Gleichung ein,

$$\nabla \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B} = -\partial_t (\nabla \times \vec{A})$$

und vertauscht die Zeit- und Ortsableitungen, so folgt

$$\nabla \times (\vec{E} + \partial_t \vec{A}) = 0$$

Für den Ausdruck in der Klammer verschwindet die Rotation; er kann daher komplett durch eine Divergenz beschrieben werden,

 $\vec{E} + \partial_t \vec{A} = -\nabla \varphi$ 

oder

$$\vec{E} = -\nabla \,\varphi - \partial_t \vec{A} \tag{7.25}$$

Im Fall der Elektrostatik ( $\partial_t \vec{A} = 0$ ) ist dies das bereits diskutierte Potential in Gleichung 2.11. Durch die beiden Potentialgleichungen Vektor-Potential  $\vec{A}$ 

Skalares Potential  $\varphi$ 

7.24 und 7.25 sind die beiden homogenen Maxwell-Gleichungen automatisch erfüllt.

Nun kann man  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  in den beiden inhomogenen Maxwell-Gleichungen durch die Potentiale ersetzen. Die Gleichung  $\nabla \vec{E} = \rho/\epsilon_0$ ergibt

$$\nabla^2 \varphi + \partial_t (\nabla \vec{A}) = -\frac{\varrho}{\epsilon_0}$$
(7.26)

Mit

$$\nabla \times \vec{B} = \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla (\nabla \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

folgt für die letzte Gleichung

$$\left(\nabla^2 \vec{A} - \epsilon_0 \mu_0 \,\partial_t^2 \vec{A}\right) - \nabla \left(\nabla \vec{A} + \epsilon_0 \mu_0 \,\partial_t \varphi\right) = -\mu_0 \,\vec{j} \tag{7.27}$$

Diese Gleichungen in 7.26 und 7.27 enthalten die gleiche Information wie die Maxwell-Gleichungen. Es sind aber nur noch 4 Feld-Komponenten ( $\varphi, \vec{A}$ ) aus 4 Gleichungen zu bestimmen.

#### 7.4.2 Eichtransformationen

Die messbaren Felder  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  müssen bei gegebenem  $\rho, \vec{j}$  eindeutig bestimmt sein. Dies gilt aber nicht für die Potentiale, denn diese sind nicht direkt messbar. Insbesondere kann man die Potentiale so "eichtransformieren", dass sich  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  nicht ändern. Diese Eigenschaft einer unmessbaren Größe ist die Grundlage der theoretischen Ableitung der Maxwell-Gleichungen.

Eine Eichtransformation ändert die Potentiale,

$$\vec{A} \Leftrightarrow \vec{A}' \qquad \varphi' \Leftrightarrow \varphi$$

ohne dass sich die zugehörigen Messgrößen  $\vec{E},\,\vec{B}$ ändern,

$$\vec{E} = \vec{E}'$$
  $\vec{B} = \vec{B}'$ 

Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla \lambda$$
  $\varphi' = \varphi - \partial_t \lambda$ 

Hierbei ist  $\lambda$  eine beliebige skalare Funktion  $\lambda(\vec{r}, t)$ . Wichtig ist, dass  $\vec{A}$  und  $\varphi$  simultan mit dem gleichen  $\lambda$  transformiert werden. Einsetzen zeigt, dass die Messgrößen tatsächlich unverändert bleiben<sup>14</sup>.

Es gibt unendlich viele mögliche Eichungen. Die Wahl der praktischsten Eichung hängt von dem konkreten Problem ab.

$$\vec{B}' = \nabla \times \vec{A}' = \nabla \times \vec{A} + \underbrace{\nabla \times (\nabla \lambda)}_{=0} = \vec{B}$$
$$\vec{E}' = -\nabla \varphi' - \partial_t \vec{A}' = -\nabla \varphi + \nabla \partial_t \lambda - \partial_t \vec{A} - \partial_t \nabla \lambda = -\nabla \varphi - \partial_t \vec{A} = \vec{E}$$

**Coulomb-Eichung** Die Messgröße  $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$  legt nur die Rotation, aber nicht die Divergenz von  $\vec{A}$  fest. In der Coulomb-Eichung wählt man<sup>15</sup>

 $\nabla \vec{A} = 0$ 

Gleichung 7.26 ergibt dann die Poisson-Gleichung,

 $\nabla^2 \varphi = -\frac{\varrho}{\epsilon_0}$ 

Die andere Potentialgleichung Gleichung 7.27 wird aber nur im magnetostatischen Fall  $(\partial_t \vec{A} = 0)$  einfach.

Lorentz-Eichung Hierfür wählt man

$$\nabla \tilde{A} = -\epsilon_0 \mu_0 \,\partial_t \varphi \tag{7.28}$$

Damit erhält man aus Gleichung 7.26

$$\left(\nabla^2 - \epsilon_0 \mu_0 \,\partial_t^2\right) \,\varphi = -\frac{\varrho}{\epsilon_0} \tag{7.29}$$

und aus Gleichung 7.27

$$\left(\nabla^2 - \epsilon_0 \mu_0 \,\partial_t^2\right) \,\vec{A} = -\mu_0 \,\vec{j} \tag{7.30}$$

Bei gegebenem  $\rho$ ,  $\vec{j}$  sind dies 4 unabhängige, entkoppelte Wellengleichungen für die 4 Komponenten von  $\vec{A}$ ,  $\varphi$ . Es ist viel einfacher, erst diese Gleichungen zu lösen und daraus  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  zu bestimmen als direkt die Maxwell-Gleichungen zu benutzen.

In der Klammer steht der sogenannte D'Alembert-Operator

$$\Box = \nabla^2 - \epsilon_0 \mu_0 \,\partial_t^2 \tag{7.31}$$

der allgemein die Ausbreitung von Wellen beschreibt. Die Wellengeschwindigkeit ist hier die Lichtgeschwindigkeit

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \tag{7.32}$$

Im D'Alembert-Operator stehen Ort- und Zeitableitungen gleichberechtigt, wie erforderlich für die spezielle Relativitätstheorie.

## 7.4.3 Bedeutung der Potentiale

Es ist eine interessante Frage, ob die Felder  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  oder die Potentiale  $\varphi, \vec{A}$  die fundamentalen Größen im Elektromagnetismus sind.

• Messgrößen sind die Felder  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ .

$$\nabla \vec{A} = \nabla \vec{A}' - \nabla^2 \lambda = 0$$

#### Wellengleichungen der Potentiale

Lichtgeschwindigkeit c

 $<sup>^{15}</sup>$ Konkret wählt man die beliebige Funktion  $\lambda$ so, dass  $\nabla^2\lambda=\nabla\vec{A'},$  denn damit folgt

- Die Felder  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  beinhalten unnötig viele Feldkomponenten, die Potentiale nicht.
- Die Potentiale bilden einen Vierervektor  $A^{\mu} = (\varphi, \vec{A})$ , mit dem der Elektromagnetismus relativistisch invariant formuliert werden kann.
- In den Grundgleichungen der Quantenmechanik geladener Teilchen erscheinen direkt die Potentiale  $\varphi, \vec{A}$ .
- Photonen als Quanten des elektromagnetischen Feldes sind Anregungen der Potentiale  $\varphi, \vec{A}$ .
- Postuliert man eine Eichfreiheit der Potentiale, so lassen sich daraus die Maxwellgleichungen einschließlich Erhaltung der elektrischen Ladung ableiten. Das Ergebnis stimmt mit allen Experimenten überein.

# 8 Elektromagnetische Wellen

# 8.1 Ableitung

Zunächst soll gezeigt werden, dass aus den vier differentiellen Maxwell-Gleichungen 7.8, 7.9, 7.10, 7.11 direkt die Existenz und die Eigenschaften von Wellen folgen. Wir beschränken uns dabei zunächst auf den Fall im Vakuum, d.h. mit  $\rho = 0$ ,  $\vec{j} = 0$ , also

**a**. 
$$\nabla \vec{E} = 0$$
 **b**.  $\nabla \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}$  (8.1)

**c**. 
$$\nabla \vec{B} = 0$$
 **d**.  $\nabla \times \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \partial_t \vec{E}$  (8.2)

Leitet man d. nach der Zeit ab und verwendet b., so folgt

$$\partial_t^2 \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \nabla \times (\partial_t \vec{B}) = -\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \nabla \times (\nabla \times \vec{E})$$
$$= -\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \left( \nabla (\underbrace{\nabla \vec{E}}_{=0}) - \nabla^2 \vec{E} \right)$$

Wegen **a.** erhält man also die Wellengleichung

$$\partial_t^2 \vec{E} - c^2 \nabla^2 \vec{E} = 0$$
(8.3)

Die Konstante c hat die Dimension einer Geschwindigkeit,

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \tag{8.4}$$

Wir werden diese Konstante später als Lichtgeschwindigkeit im Vakuum identifizieren. Diese Gleichung wurde implizit bereits bei der Definition  $\epsilon_0$  und  $\mu_0$  benutzt, siehe Abschnitt 2.2. Der Zahlenwert ist exakt

$$c = 299\,792\,458\frac{m}{s} \tag{8.5}$$

da das Meter genau mit Hilfe dieser Zahl definiert wurde. So gesehen ist c keine Naturkonstante (siehe Plank'sches Einheitensystem).

Eine ganz ähnliche Ableitung wie oben für die Wellengleichung von  $\vec{E}$  kann man verwenden, um eine Wellengleichung auch für  $\vec{B}$  abzuleiten,

$$\partial_t^2 \vec{B} - c^2 \nabla^2 \vec{B} = 0 \tag{8.6}$$

Die Form dieser Gleichung ist genau wie bei  $\vec{E}$  und auch die Konstante c ist die gleiche.

Wie bei der allgemeinen Wellengleichung C.8 gezeigt, ist eine Lösung (hier für  $\vec{E}$ , aber genau so für  $\vec{B}$ )

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 \cdot f(\omega t - \vec{k}\vec{r})$$
(8.7)

für alle Funktionen f, falls  $c = \frac{\omega}{k}$ .

Wellengleichung für E

Lichtgeschwindigkeit  $c \approx 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s} = 30 \frac{\text{cm}}{\text{ns}}$ 

# 8.2 Spektrum der elektromagnetischen Wellen



Abb. 8.1 Das Spektrum elektromagnetischer Wellen mit Detailansichten im optischen Bereich ( $\lambda = 400$  bis 700 nm) und im Radiobereich ( $\nu = 50$  MHz bis 1 GHz). Mikrowellen (Radarwellen) liegen im Bereich  $\lambda \approx 1$  cm und Röntgenstrahlen im Bereich 1 nm. Viel höhere Frequenzen (und Energien) als gezeigt findet man an Teilchenbeschleunigern und in der kosmischen Strahlung.

 $Quelle: {\tt https://en.wikipedia.org/wiki/Electromagnetic\_spectrum}$ 

# 8.3 Polarisation

Im Prinzip könnten in einem konkreten Fall die Lösungen der Wellengleichungen für das  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  Feld beliebig unterschiedlich sein,

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 \cdot f_E(\omega_E t - \vec{k}_E \vec{r})$$
(8.8)

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{B}_0 \cdot f_B(\omega_B t - \vec{k}_B \vec{r}) \tag{8.9}$$

Die Maxwellgleichungen verbieten das aber, denn sie koppeln  $\vec{E}$ und  $\vec{B}$ . Im Vakuum findet man aus  $\nabla \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}$  (Gl. **b.** in 8.2) wegen  $\partial_t \vec{B} = \omega_B \vec{B}_0 f'_B$  sowie  $\partial_x E_y = -k_x E_{0y} f'_E$  und daher  $\nabla \times \vec{E} = -(\vec{k} \times \vec{E}_0) f'_E$ , dass

$$-(\vec{k}\times\vec{E}_0)f'_E = -\omega_B\vec{B}_0f'_B$$

Dies kann für alle  $\vec{r}$  und t nur erfüllt sein, wenn

$$f_E = f_B, \quad \omega_E = \omega_B, \quad k_E = k_B$$

$$\vec{k} \times \vec{E} = \omega \, \vec{B} \tag{8.10}$$

Wegen den Maxwellgleichungen Gl. a. und c. folgt auch

$$\nabla \vec{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{k}\vec{E} = 0}$$
 (8.11)

$$\nabla \vec{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left[ \vec{k} \vec{B} = 0 \right] \tag{8.12}$$





**Abb. 8.2** Die Polarisation und Phasenlage bei elektromagnetischen Wellen im Vakuum.

Zusammenfassend heißt das für freie EM-Wellen im Vakuum:

- $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  haben die gleiche Form, die gleiche Frequenz, die gleiche Ausbreitungsrichtung und die gleiche Wellenlänge.
- $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  sind in Phase.
- $\vec{B}$  steht senkrecht auf  $\vec{E}$  und beide stehen senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung  $\vec{k}$ . Elektromagnetische Wellen sind also transversal polarisiert.
- Die Amplituden von  $E_0$  und  $B_0$  sind zueinander proportional.

# 8.4 Energie und Poynting-Vektor

Schon vorher wurde gezeigt, dass die Energiedichte w von E und B Feldern im Vakuum gegeben ist durch

$$w = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

Mit  $E_0 = cB_0$  folgt

$$w = \epsilon_0 E^2 = \frac{1}{\mu_0} B^2$$
 (8.14)

Die Intensität einer Welle ist die Energie, die pro<br/> Zeiteinheit durch eine zu $\vec{k}$ senkrecht stehende Einheitsfläche tritt. Bei Lichtgeschwindigkeit ist dies

$$I = w \cdot c = c \cdot \epsilon_0 \cdot E^2$$
(8.15)

Damit lässt sich der Poynting-Vektor  $\vec{S}$  definieren, der Richtung und Betrag des Energieflusses der EM-Welle beschreibt,

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \tag{8.16}$$

Der Betrag entspricht gerade der Intensität,

$$|\vec{S}| = c \cdot \epsilon_0 \cdot E^2 = I \tag{8.17}$$

Für eine harmonische Welle  $\vec{E} = \vec{E}_0 \cdot \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r})$  gilt

$$S = c \cdot \epsilon_0 \cdot E_0^2 \cdot \cos^2(\omega t - \vec{k}\vec{r})$$

so dass der Mittelwert über eine Periodendauer T gegeben ist durch

$$\langle I \rangle = \frac{1}{2} I_0 = \frac{1}{2} c \cdot \epsilon_0 \cdot E_0^2$$
(8.18)

## 8.5 Impuls und Druck

Der mit einer EM-Welle verbundene Impulsübertrag und Druck lässt sich am einfachsten verstehen, wenn man wie in der Quantentheorie annimmt, dass die Energie in einer EM-Welle quantisiert ist in einzelne masselose Teilchen, den Photonen (oder Gamma-Quanten  $\gamma$ ). Experimentell findet man, dass eine EM-Welle der Frequenz  $\nu$  aus Photonen der Energie

$$E_{\gamma} = h \cdot \nu = \hbar \cdot \omega \tag{8.19}$$

besteht. Hier ist  $\hbar$ das Planck'schen Wirkungsquantum

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 6,62606957 \cdot 10^{-34} \text{J} \cdot \text{s}$$
(8.20)

$$= 4,135667516 \cdot 10^{-15} \text{eV} \cdot \text{s}$$
 (8.21)

Einheit der Intensität:  $[I] = \frac{\text{Energie}}{\text{Zeit-Fläche}}$ 

Der Poynting-Vektor  $\vec{S}$ zeigt in Richtung der Ausbreitungsrichtung  $\vec{k}$ . Die Energiedichte der EM-Welle ist dann gegeben durch die Anzahldichte  $n_{\gamma}$  der Photonen,

$$w = n_{\gamma} \cdot E_{\gamma} \tag{8.22}$$

Für die masselosen Photonen gilt nach der speziellen Relativitätstheorie als Beziehung zwischen Energie und Impuls

$$E_{\gamma}^{2} = P_{\gamma}^{2} \cdot c^{2} + m_{\gamma}^{2} \cdot c^{4} = P_{\gamma}^{2} c^{2}$$
(8.23)

Damit folgt

$$P_{\gamma} = \frac{E_{\gamma}}{c} = \hbar k \tag{8.24}$$

Der Impuls  $P_V$ , den  $n_{\gamma}$  Photonen pro Volumen V tragen, ist

$$\frac{P_V}{V} = n_\gamma P_\gamma = n_\gamma \cdot \frac{E_\gamma}{c} = \frac{w}{c}$$

oder, wegen Gl. 8.15,

$$\frac{\vec{P}_V}{V} = \frac{\vec{S}}{c^2} = \epsilon_0 \, \vec{E} \times \vec{B}$$
(8.25)

Wenn die EM-Welle auf eine Fläche A trifft und dort komplett absorbiert wird, so ist die Kraft auf diese Fläche gegeben durch den Impulsverlust der  $n_{\gamma}$  Photonen, die sich mit Geschwindigkeit cnähern,

$$F = A \cdot \frac{S}{c^2} \cdot c$$

Damit ist der Strahlungsdruck F/A auf die Fläche

$$\frac{F}{A} = \frac{S}{c} = \epsilon_0 E^2 \tag{8.26}$$

Wenn die EM-Welle von der Oberfläche reflektiert wird, so ist der Impulsübertrag und damit der Strahlungsdruck doppelt so groß.

# 8.6 Erzeugung elektromagnetischer Wellen

#### 8.6.1 Hertz'scher Dipol

In einem Metall können Leitungselektronen relativ zu den Kernen der Atome in Schwingung versetzt werden. De facto entsteht dadurch je Atom ein schwingender Dipol,

$$\vec{P}(t) = q \,\vec{d}(t) = q \,\vec{d}_0 \,\sin\omega t \tag{8.27}$$

**Abb. 8.3** Dipol durch Elektron und Kern.

Betrachtet man einen Metallstab, durch den Wechselstrom fließt, so ist das Dipolmoment insgesamt gegeben durch die Summe der Dipolmomente aller Atome.

$$\vec{P} = \int \rho \cdot \vec{d} \cdot dV \tag{8.28}$$

Daraus folgt

$$\dot{\vec{P}} = \int \rho \cdot \dot{\vec{d}} \, dV_2 = \int \rho \cdot \vec{v} \, dV_2 = \int \vec{j}(\vec{r}_2, t) \, dV_2 \tag{8.29}$$

mit der Stromdichte  $\vec{j}(\vec{r}_2, t)$  im Draht.

In der Magnetostatik ergab sich das Vektorpotential  $A(\vec{r}_1)$  einer konstanten Stromverteilung (Gl. 4.23) zu

$$\vec{A}(\vec{r}_1, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{j(\vec{r}_2, t)}{r_{12}} dV_2$$
(8.30)

wobei der Abstand  $\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$  ist. Bei einer schnellen Änderung des Stroms muss berücksichtigt werden, dass die Ausbreitung des Feldes nur mit Lichtgeschwindigkeit erfolgen kann, d.h. man muss die Laufzeit des Signals von der Antenne ( $\vec{r}_2$ ) nach  $\vec{r}_1$  berücksichtigen. Dafür ersetzt man  $t \rightarrow t - \frac{r_{12}}{c}$ , so dass

$$\vec{A}(\vec{r}_1, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}_2, t - \frac{r_{12}}{c})}{r_{12}} dV_2$$
(8.31)

Wenn  $r_{12}$  sehr viel größer ist als die Länge des Stabs, dann ist  $r_{12} \approx r$  etwa gleich für alle Bereiche des Stabs. Damit kann man r vor das Integral ziehen und erhält

$$\vec{A}(\vec{r}_1, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \int \vec{j}(\vec{r}_2, t - \frac{r}{c}) \, dV_2 \tag{8.32}$$

$$\vec{A}(\vec{r}_1, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \dot{\vec{P}}(t - \frac{r}{c}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \dot{\vec{P}}_R$$
(8.33)

mit der Abkürzung

$$\vec{P}_R = \vec{P} \left( t - \frac{r}{c} \right)$$

für das retardierte Dipolmoment. Die Änderung des Dipolmoments erzeugt also das Potential.

**Das Magnetfeld** ergibt sich aus  $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ . Benutzt man  $\partial_x \dot{P}_y = -\frac{x}{rc} \ddot{P}_y$  sowie  $\partial_x \frac{1}{r} = \frac{x}{r^3}$ , so folgt

$$\vec{B}(\vec{r}_1, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \underbrace{\frac{\dot{\vec{P}}_R \times \vec{r}}{r^3}}_{Nahfeld} + \underbrace{\frac{\ddot{\vec{P}}_R \times \vec{r}}{r^2c}}_{Fernfeld} \right)$$
(8.34)

Das Nahfeld entsteht durch die Geschwindigkeit der Ladungen, d.h. durch den Strom im Metallstab. Das Fernfeld entsteht dagegen durch die Beschleunigung der Ladungen, es entspricht der elektromagnetischen Welle.



**Retardiertes** Vektorpo-

tential

Abb.8.4Magnetfeld um eine Antenne.

- Die Richtung von  $\vec{B}$  ist senkrecht zu  $\vec{P}$  und senkrecht zur Ausbreitungsrichtung  $\vec{r}$ .
- $\tilde{B}$  ist kreisförmig um den Dipol und wechselt die Richtung jeweils nach Abstand  $\lambda/2$  und Zeit T/2.

**Das elektrische Feld** folgt aus  $\vec{E} = -\nabla \Phi - \partial_t \vec{A}$ . Analog zum Potential  $\vec{A}$  ergibt sich aus dem elektrostatischen Feld eines Dipols

$$\Phi(\vec{r}_1, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} \cdot \left(\vec{P}_R + \frac{r}{c} \dot{\vec{P}}_R\right)}{r^3}$$
(8.35)

In der Lorentz-Eichung Gl. 7.28 ( $\partial_t \Phi = -c^2 \nabla \vec{A}$ ) findet man

$$\vec{E}(\vec{r}_1, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \underbrace{\frac{\vec{P}_R^* + 3(\vec{P}_R^* \cdot \vec{e}_r) \cdot \vec{e}_r}{r^3}}_{Nahfeld} + \underbrace{\frac{(\ddot{\vec{P}}_R \times \vec{r}) \times \vec{r}}{r^3 c^2}}_{Fernfeld} \right)$$
(8.36)

 $\operatorname{mit}$ 

$$\vec{P}_R^* = \vec{P}_R + \frac{r}{c}\dot{\vec{P}_R}$$

- Das Fernfeld steht damit senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung  $\vec{r}$ .
- Das  $\vec{E}$  Feld löst sich vom Dipol jeweils nach T/2.
- Die Feldlinien schließen sich.
- Umkehrung von  $\vec{E}$  jeweils nach Abstand  $\lambda/2$  und Zeit T/2.

In großer Entfernung vom Dipol, also bei  $r \gg \lambda$  und auch  $r \gg$  Länge der Antenne, überwiegen die Terme, die von der "Beschleunigung"  $\ddot{\vec{P}}$  abhängen,

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{(\vec{\vec{P}}_R \times \vec{r}) \times \vec{r}}{r^3}$$
(8.37)

$$\vec{B} = \frac{1}{c}\vec{e}_r \times \vec{E} \tag{8.38}$$

(siehe auch Gl. 8.10). Dieses Fernfeld des Dipols erfüllt alle vorher bereits für freie Wellen abgeleiteten Eigenschaften:  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  sind in Phase und stehen senkrecht zur Ausbreitungsrichtung  $\vec{e}_r = \vec{r}/r$ . Es ist aber keine ebene Welle, denn die Felder fallen wie  $E, B \sim 1/r$ .

Der Hertz'sche Dipol hat (im Fernfeld) eine bestimmte Abstrahlungscharakteristik,

$$\Rightarrow |\vec{E}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\ddot{P}_R \sin\Theta}{r}$$
(8.39)

Die  $\vec{E}, \vec{B}$  Felder sind also am größten senkrecht zur Dipol-Richtung, während entlang der Dipol-Richtung die Felder verschwinden. Dies gilt auch für die Strahlungsintensität (Gl. 8.18),

$$\langle I \rangle \sim E_0^2 \sim \sin^2 \Theta \tag{8.40}$$

#### Retardiertes skalares Potential



Abb. 8.5 Elektrisches Feld um eine Antenne.



Abb. 8.6 Elektrisches Fernfeld um eine Antenne.



Abb. 8.7 Polardiagramm des Poynting-Vektors eines Dipols.

Dipol-Formel

Die Leistung, die der Hertz'sche Dipol insgesamt abstrahlt, folgt aus dem Poynting-Vektor  $\vec{S}$  durch Integration über eine geschlossene Oberfläche um den Dipol. Wählt man z.B. eine Kugeloberfläche, so folgt für die zeitlich gemittelte Leistung  $\langle P_{em} \rangle$ 

$$\langle P_{em} \rangle = \iint \langle I \rangle r^2 \sin \Theta \, d\Theta \, d\varphi = \frac{1}{12\pi\epsilon_0 c^3} \ddot{P}_R^2$$
 (8.41)

Für eine harmonische Anregung des Dipols  $\vec{P}_R = \vec{P}_0 \sin(\omega(t - \frac{r}{c}))$ folgt  $\ddot{\vec{P}}_R = \omega^2 \vec{P}_R$ , so dass die gesamte mittlere von der Dipolantenne abgestrahlte Leistung gegeben ist durch

$$\langle P_{em} \rangle = \frac{1}{12\pi\epsilon_0 c^3} \,\omega^4 \, P_0^2 \tag{8.42}$$

Antennen strahlen also viel stärker ab bei großen Frequenzen. Aus Gründen der Energieerhaltung muss demnach ein Dipol auch hohe Frequenzen gut absorbieren können.

Die Moleküle der Luft werden durch das Licht der Sonne zu Dipolschwingungen angeregt. Aus dem Frequenzspektrum der Sonne wird demnach vor allem blaues Licht (hohe Frequenzen) absorbiert und in alle Richtungen wieder abgestrahlt. Daher wirkt der Himmel bei hohem Sonnenstand blau. Rechtwinklig zur Sonne ist das Licht außerdem entsprechend der Dipolstrahlung polarisiert.

Bei Sonnenaufgang und Sonnenuntergang hingegen erscheint der Himmel nahe der Sonne rötlich, denn durch die dann zu durchquerenden Luftschichten wird das blaue Licht herausgefiltert und in alle Richtungen zerstreut.

Die Abstrahlung einer EM-Welle von einem Stab kann man veranschaulichen, indem man in einem LC-Schwinggkreis erst die Spule durch einen langen Draht ersetzt und dann die Platten des Kondensators auseinanderzieht.



Abb. 8.8 Übergang vom Schwingkreis zur Stabantenne

## 8.6.2 Strahlung einer beschleunigten Ladung

Für eine schwingende Ladung (Gl. 8.27) ist

$$\ddot{\vec{P}}(t) = q\,\vec{\vec{d}} = -\omega^2 q\,\vec{d}_0\,\sin(\omega t) = -\omega^2\,\vec{P}_0\,\sin(\omega t) \tag{8.43}$$

so dass aus der Zeitabhängigkeit der abgestrahlten Leistung

$$P_{em}(t) = \frac{2}{12\pi\epsilon_0 c^3} \,\omega^4 \,P_0^2 \,\sin^2 \omega t \tag{8.44}$$

folgt (mit der Beschleunigung  $a = \ddot{d}$ )

$$P_{em}(t) = \frac{2}{3} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{a^2}{c^3}$$
(8.45)

Auch allgemein gilt damit, dass eine beschleunigte Ladung Energie abstrahlt.

Interessant ist der Übergang vom radialsymmetrischen Coulomb-Feld einer Punktladung. Wird die Ladung beschleunigt, so ändert sich das  $\vec{E}$  Feld zeitlich und örtlich. Dies erzeugt nach den Maxwell-Gleichungen ein  $\vec{B}$ -Feld, das wiederum die bewegte Ladung beeinflusst. Die zur Beschleunigung benötigte Energie wandelt sich also in  $E_{kin} + E_{EM-Welle}$  um. Die Richtung der abgestrahlten Leistung hängt dabei von der jeweiligen Geschwindigkeit ab.

$$v \ll c$$
 senkrecht zu  $\vec{v}$  (8.46)  
 $v$  nahe  $c$  Vorwärtsrichtung (8.47)



Synchrotronstrahlung

Abb. 8.9 Strahlung einer beschleunigten Ladung.

# 9 Optik

# 9.1 Huygens'sches Prinzip

In der Optik geht es um das Verhalten elektromagnetischer Wellen in konkreten geometrischen Umgebungen wie Medien (Gase, Glas, ...), Grenzflächen (Spiegel, Linsen) und Begrenzungen (Spalte, Gitter). Die Effekte sind dabei keineswegs auf den Bereich der mit dem Auge erfassbaren optischen Wellenlängen (siehe Abbildung 8.1) beschränkt, sondern beziehen sich auf alle Wellenlängen, solange Quanteneffekte vernachlässigt werden können.

Natürlich ist es aufwendig, konkrete Probleme jedesmal mit den Maxwell-Gleichungen zu behandeln. Man bedient sich daher einfacherer Konstruktionsprinzipien, die man aus gundlegenden Prinzipien oder den Maxwell-Gleichungen ableiten kann.

Experimentell findet man z.B. bei Wasser, Schall und EM-Wellen, dass eine ebene Welle, wenn sie auf einen schmalen Spalt trifft, hinter diesem Spalt als Kugelwelle (Elementarwelle) weiterläuft. Dies gilt, solange die Breite der Spaltöffnung kleiner ist als die Wellenlänge (siehe Abschnitt zum Einzelspalt),

$$d \lesssim \lambda$$
 (9.1)

Bei dem gleichen Experiment aber mit z.B. acht Spalten sieht man die Überlagerung der acht Kugelwellen. Nach dem Superpositionsprinzip kann man die Amplituden  $\vec{A}(\vec{r},t)$  der acht Kugelwellen einfach addieren. In einigem Abstand ( $\gg \lambda$  und  $\gg$  Spaltabstand) beobachtet man, dass sich diese Elementarwellen zu einer fast ebenen Welle überlagern. Im Limes einer großen Dichte der Ursprungsorte der Kugelwellen ergibt sich tatsächlich eine perfekt ebene Welle.

Wir werden daher ganz allgemein davon ausgehen, dass man optische Effekte aus der Überlagerung von Elementarwellen gleicher Frequenz, Amplitude und Phase konstruieren kann und daraus insbesondere Wellenfronten und damit auch die Richtung der weiterlaufenden Welle konstruieren kann.

Dieses Konstruktionsprinzip ist von großer Bedeutung, wenn die einlaufenden Wellen ebene Wellen sind (**Fraunhofer-Optik**). Es kann aber zum Beispiel auch auf einlaufende Kugelwellen angewandt werden (**Fresnel-Optik**).

Das Huygens'sche Prinzip lässt sich wie angedeutet aus dem Superpositionsprinzip (Linearität der Maxwell-Gleichungen) sowie der Kausalität zwischen Erregerwelle und auslaufender Welle herleiten.

Mathematischer ausgedrückt entspricht eine punktförmige Quelle einer Dirac'schen Delta-Funktion, die ausgehende Kugelwelle der entsprechenden Lösung der Differentialgleichung (Wellengleichung), und die Überlagerung der Kugelwellen dem Greens-Verfahren zur



Abb. 9.1 Kugelwelle hinter einem schmalen Spalt (Wasser).



Abb. 9.2 Acht Kugelwellen hinter acht schmalen Spalten (Wasser).



#### Abb. 9.3

Uberlagerung zu einer ebenen Welle nach Huygens. Lösung von Differentialgleichungen, bei dem über die verschiedenen Dirac-Funktionen integriert wird.

# 9.2 Reflexion und stehende Wellen

Trifft eine ebene Wellenfront AD unter dem Winkel  $\alpha$  auf eine reflektierende Grenzschicht (Spiegel), so entsteht zunächst vom Punkt A ausgehend eine Elementarwelle um A herum. Nach der Zeit  $\tau$ trifft die Wellenfront in B auf die Oberfläche. In dieser Zeit ist die Elementarwelle um A unter anderem im Punkt E angelangt, denn die Abstände DB und AE sind gleich. Damit ist BE die reflektierte Wellenfront. Daraus ergibt sich

• Einfallswinkel = Ausfallswinkel

Dies lässt sich auch einfach als elastischer Stoß von Photonen interpretieren. Die Komponente des Photon-Impulses parallel zur Oberfläche bleibt erhalten, die Komponente senkrecht dazu ändert ihr Vorzeichen.

Eine wichtige Anwendung sind gebogene Spiegel. Möchte man z.B. eine einfallende ebene Welle in einem Brennpunkt fokussieren, so muss man die Form einer Parabel (oder eines Paraboloids) wählen,  $y = ax^2$ . Der Brennpunkt liegt dann im Abstand  $f = \frac{1}{4a}$ vom Fußpunkt der Parabel. Da kleine Winkelbereiche von Kreisen (oder Kugeln) eine erste Näherung an eine Parabel darstellen, kann man mit aufgeschnittenen Röhren bereits Licht fokussieren und zur Energiegewinnung nutzen oder Kugelspiegel verwenden für einfache Teleskope.

#### Stehende Welle

Bei Reflexion um 180<sup>°</sup> Grad beobachtet man im Experiment, dass sich stehende Wellen ausbilden, d.h. es gibt feste Orte im Raum, bei denen die Amplitude der Welle immer Null ist und andere, bei denen die Amplitude immer maximal ist. Die Summe aus einlaufender ( $\vec{k}$  in x-Richtung) und reflektierter Welle ist ( $E_{10}$  und  $E_{20}$ sind reel)

$$\vec{E}(x,t) = \vec{E}_{10} e^{i(\omega t - kx + \varphi_1)} + \vec{E}_{20} e^{i(\omega t + kx + \varphi_2)}$$
(9.2)

Steht ein perfekt reflektierender Spiegel bei x = 0 und ist aus Metall, so muss dort  $\vec{E}(0,t) = 0$  sein für alle t, d.h.<sup>16</sup>  $\vec{E}_{10}e^{i\varphi_1} = -\vec{E}_{20}e^{i\varphi_2}$ , so dass

$$\vec{E}(x,t) = \vec{E}_{10} e^{i(\omega t + \varphi_1)} \left( e^{-ikx} - e^{+ikx} \right) = -2i \, \vec{E}_{10} e^{i(\omega t + \varphi_1)} \, \sin(kx) \, (9.3)$$

Für die daraus folgende Intensität

$$I \sim \left(Re(\vec{E}(x,t))\right)^2 = 4E_{10}^2 \sin^2(\omega t + \varphi_1) \sin^2(kx)$$
(9.4)



Abb. 9.4 Reflexion nach Huygens.



**Abb. 9.5** Foto eines Radioteleskops (Wikipedia).

Reflexion am festen Ende

<sup>&</sup>lt;sup>16</sup>Bei einer Reflexion am offenen Ende müsste  $\vec{E}(0,t)$  maximal sein. Beispiel wäre eine Seilwelle, bei der das Seil an einem Ende nicht festgehalten wird und dort weit ausschlägt.



Abb. 9.6

Stehende EM-Welle vor einer Metallplatte. Wegen  $\nabla \vec{E} = -\partial_t \vec{B}$  hat  $\vec{B}$  keinen Wellenknoten sondern einen Wellenbauch bei x = 0.



Abb. 9.7 Lichtbrechung nach Huygens (mit  $\alpha_1 = \alpha$ ,  $\alpha_2 = \beta$ , sonst wie im Text).

folgt im zeitlichen Mittel

$$\langle I \rangle \sim 2E_{10}^2 \sin^2(kx) \tag{9.5}$$

Die Intensitätsminima (bei  $kx = 0, \pi, 2\pi, ...$ ) wiederholen sich im Abstand  $\Delta x = \lambda/2$ . Dies ist eine gute Methode, um die Wellenlänge einer Welle direkt zu messen.

Stehende Wellen treten nicht nur bei Reflexion auf, sondern immer dann, wenn Wellen gleicher Frequenz und Wellenlänge in entgegengesetzte Richtung laufen.

# 9.3 Brechung und Totalreflexion

Tritt ein Lichtstrahl aus Luft oder Vakuum in ein Glas ein, so beobachtet man eine Ablenkung des Lichtstrahls und damit der Wellenfronten gleicher Phase. Genauer betrachtet wird der Strahl

- teilweise gebrochen
- teilweise reflektiert
- teilweise absorbiert

Die Brechung im Glas muss im Rahmen der Huygens'schen Prinzips bedeuten, dass die Phasengeschwindigkeit in Glas kleiner ist als in der Luft oder im Vakuum<sup>17</sup>.

Die Strecken  $\overline{DB}$  und  $\overline{AC}$  legt das Licht in gleichen Zeiten  $\tau$ zurück,  $c_1\tau = \overline{DB}$ ,  $c_2\tau = \overline{AC}$ . Misst man Einfallswinkel  $\alpha_1$  und Ausfallswinkel  $\alpha_2$  der Lichtstrahlen relativ zur Senkrechten auf die Grenzfläche, so findet man

$$\bar{AB} = \frac{c_1 \tau}{\sin \alpha} = \frac{c_2 \tau}{\sin \beta} \tag{9.6}$$

$$\frac{\sin\alpha}{c_1} = \frac{\sin\alpha_2}{c_2} \tag{9.7}$$

Empirisch definiert man einen (reellen) Brechungsindex

$$n_i = \frac{c}{c_i} \tag{9.8}$$

Snellius'sches chungsgesetz Bre-

so dass

und schreibt das Brechungsgesetz in der Form

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2 \tag{9.9}$$

Man kann die Richtung des Lichtstrahls auch umdrehen. Offensichtlich hat diese Gleichung aber keine interpretierbare Lösung, wenn  $\sin \alpha_i > 1$  herauskommen müsste. Dies wird passieren, wenn der Lichtstrahl vom optisch dichteren Medium i ( $n_i$  groß) in das

optisch dünnere Medium j ( $n_j$  klein) eintritt, also  $n_i > n_j$ , und der Einfallswinkel  $\alpha_i$  größer wird als

$$\frac{n_i}{n_j} \cdot \sin \alpha_i > 1 \tag{9.10}$$

Diese Totalreflexion wird technisch in Lichtleitern ausgenutzt, um Lichtverluste zu vermeiden.

# 9.4 Polarisation durch Brechung

Da für eine freie EM-Welle die Beziehung  $E_0 = cB_0$  gilt, folgt für Ladungsträger mit Geschwindigkeit  $v \ll c$  nahe der Oberfläche eines Materials

$$\underbrace{qE}_{\text{Kraft durch E}} \gg \underbrace{qvB}_{e} = \frac{q}{c} \underbrace{E}_{e}$$
(9.11)

Da außerdem die Elektronen sehr viel leichter und beweglicher sind als die Kerne, reicht es zumindest im optischen Wellenlängenbereich, die Wirkung des *E*-Feldes auf Elektronen zu betrachten. Das  $\vec{E}$ -Feld einer EM-Welle wird also Elektronen zu Schwingungen in Richtung  $\vec{E}$  anregen. Diese Dipole strahlen dann eine  $\vec{E}$ -Welle entsprechend der Dipol-Charakteristik ab. Daraus folgt

- Die Komponente des *É*-Feldes parallel zur Oberfläche wird Dipole anregen, die sowohl in das Medium hinein (Brechung) als auch wieder zurück strahlen können (Reflexion).
- Die andere Vektor-Komponente des  $\tilde{E}$ -Feldes wird Dipole anregen, die je nach Winkel  $\alpha_1$  kaum noch Energie in die Richtung der reflektierten Welle abstrahlen kann.

Damit wird also diese Komponente der Polarisation des  $\dot{E}$ -Feldes kleiner sein, das reflektierte Licht ist zumindest teilweise polarisiert<sup>18</sup>. Insbesondere wenn der Winkel zwischen gebrochenem Strahl und reflektiertem Strahl die Bedingung

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 90^0 \quad \Rightarrow \quad \tan \alpha_1 = \frac{n_2}{n_1} \tag{9.12}$$

erfüllt, ist der reflektierte Strahl vollständig polarisiert. Durch zwei in rechtem Winkel zueinander angeordnete Spiegel kann man also Licht vollständig auslöschen, wenn beide Spiegel im Brewster-Winkel angeordnet sind.



Abb. 9.8 Polarisation durch Brechung.

**Brewster-Winkel** 

<sup>&</sup>lt;sup>17</sup>Tatsächlich kann man dies mit genauen Messungen auch direkt feststellen.

 $<sup>^{18}\</sup>mathrm{Auch}$  die Polarisation des Sonnenlichts beruht auf diesem Effekt.

Dispersion

# 9.5 Dispersion

Experimentell kann man recht leicht mit einem dreieckigen Glaskörper beobachten, dass das Licht normaler Lampen oder der Sonne in verschiedene Farben getrennt werden kann. Dies bedeutet, dass der Brechungsindex und damit die Lichtgeschwindigkeit von der Frequenz oder Wellenlänge des Lichts abhängen muss.

$$n = n(\lambda)$$
 und  $n = n(\omega)$  (9.13)

Für das in das Prisma einfallende und austretende Licht gilt

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2 \qquad \qquad n_2 \sin \beta_2 = n_1 \sin \beta_1 \qquad (9.14)$$

Außerdem ist  $\alpha_2 + \beta_2 = \gamma$  und der gesamte Winkel der Ablenkung ist  $\delta = \alpha_1 + \beta_1 + \gamma$ . Man kann daher das Prisma so drehen, dass die Ablenkung  $\delta$  minimal wird und erhält in diesem Fall

$$\sin\frac{\delta_{min}}{2} = \frac{n_2}{n_1} \cdot \sin\left(\frac{n_2}{n_1}\right) \tag{9.15}$$

Damit kann man also leicht den Brechungsindex messen, ohne die Winkel im Prisma kennen zu müssen.

Beispielsweise erhält man für Quarzglas

$\frac{\lambda}{\text{nm}}$	Farbe	n
480	blau	1,464
650	rot	$1,\!456$

Man findet damit experimentell:

- Weißes Licht ist eine Überlagerung aus allen Frequenzen im Bereich der Empfindlichkeit der Sehnerven,
- Die Intensität  $I(\omega)$  einer Lichtquelle ist bestimmt durch ihre Temperatur (Strahlung eines "schwarzen Körpers") sowie durch die chemischen Elemente (Spektrallinien). Beide Bestandteile können genauer erst im Rahmen der Quantenmechanik erklärt werden.



Abb. 9.9 Messung der Dispersion durch ein Prisma.



Abb. 9.10 Brechungsindex n als Funktion der Wellenlänge im Vaku-

um.



### Spectrum of Solar Radiation (Earth)

Abb. 9.11 Intensität des Sonnenlichts mit und ohne Absorbtion in der Atmosphäre (Wikipedia).



Abb. 9.12 Empfindlichkeit der Rezeptoren im Auge (Wikipedia).

Wenn eine EM-Welle auf eine Grenzschicht trifft, wird die Anregungsfrequenz  $\omega$  auch im Material vorliegen, die Phasengeschwindigkeit c und damit k werden sich ändern,

$$\omega_1 = \omega_2 \qquad \Rightarrow \qquad c_1 \, k_1 = c_2 \, k_2 \tag{9.16}$$

Relativ zum Vakuum folgt also

$$k = n(\omega) \cdot k_{Vak} = n(\omega) \cdot \frac{\omega}{c}$$
(9.17)

Damit ist die Welle im Material

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - n(\omega)\frac{\omega}{c}x)}$$
(9.18)

Um Absorption beschreiben zu können, führen wir einen komplexen Brechungsindex ein,

$$n(\omega) = n_{Re}(\omega) + i \cdot n_{Im}(\omega) \tag{9.19}$$

Damit ist

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - n_{Re} \frac{\omega}{c} x)} \cdot e^{n_{Im} \frac{\omega}{c} x}$$
(9.20)

Die Intensität der Welle ist also gedämpft mit der exponentiellen Eindringtiefe  $\alpha(\omega)$ ,

$$I(\omega) = I_0 e^{-\alpha(\omega)x} \qquad \alpha(\omega) = -2 \cdot n_{Im}(\omega) \cdot \frac{\omega}{c} \qquad (9.21)$$

Dies ist der Grund, warum manche Stoffe durchsichtig erscheinen  $(\alpha \text{ klein})$  oder eben nicht.

#### Wellen in Materie

In den Maxwell-Gleichungen für Materie (Gl. 7.3) sind die Dipole bereits in Form der relativen Dielektrizitätskonstante  $\epsilon_r$  kodiert. Für diese Gleichungen findet man die Wellengleichung

$$\partial_t^2 \vec{E} - \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_r \,\mu_0 \mu_r} \,\nabla^2 \vec{E} = 0 \tag{9.22}$$

so dass

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \,\epsilon_r \,\mu_0 \,\mu_r}} \tag{9.23}$$

In nicht ferromagnetischen Stoffen ist  $\mu_r \approx 1$ , so dass der Brechungsindex durch

$$\boxed{n \approx \sqrt{\epsilon_r}} \tag{9.24}$$

bestimmt ist. Damit muss auch  $\epsilon_r$  komplex sein. Dies kann man mit Hilfe des Oszillator-Modells verstehen.

#### **Oszillator-Modell**

Aufgrund einer äußeren primären EM-Welle der Kreisfrequenz  $\omega$ folgen die Elektronen des Materials in einer dünnen Schicht (Dicke  $\ll \lambda$ ) einer erzwungenen harmonischen Schwingung mit Eigenfrequenz  $\omega_0$  und Dämpfung  $\tau$ , (hier für  $\vec{E} = (0, E_y, 0)$ )

$$\ddot{y} + \frac{1}{\tau} \dot{y} + \omega_0^2 y = \frac{q}{m_e} E_0 e^{i\omega t}$$
(9.25)

mit der Lösung für die Auslenkung y(t) der Elektronen um ihre Ruhelage

$$y(t) = \frac{q}{m_e} \cdot \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega/\tau} \cdot E_0 e^{i\omega t}$$
(9.26)

$$= \frac{q}{m_e} \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega/\tau}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2} \cdot E_0 e^{i\omega t}$$
(9.27)

$$= \frac{q}{m_e} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2} \cdot E_0 e^{i(\omega t + \varphi)}$$
(9.28)

mit

$$\tan\varphi = -\frac{\omega/\tau}{\omega_0^2 - \omega^2} \tag{9.29}$$

Die Dipolmomente  $q \cdot y(t)$  sind also um  $\varphi$  phasenverschoben gegenüber der Primärwelle. Die angeregten Dipole strahlen gemäß den Gleichungen des Hertz'schen Dipols eine sekundäre EM-Welle ab. Diese ist, am Ort der Dipole, in Phase<sup>19</sup> mit der Auslenkung y(t). Damit ist auch die gesamte Sekundärwelle phasenverschoben um  $\varphi$ gegenüber der Primärwelle.

Sowohl die Primärwelle als auch die Sekundärwelle bewegen sich mit Vakuumlichtgeschwindigkeit durch das Medium. Die beiden Feldstärken addieren sich aber, so dass die gesamte Feldstärke eine Phasenverschiebung hat, die zwischen Null und  $\varphi$  liegt. Diese Phasenverschiebung zwischen Primärwelle und Sekundärwelle ist der Grund, warum die Maxima der gesamten EM-Welle für  $\omega < \omega_0$ scheinbar langsamer vorankommen, die Phasengeschwindigkeit des Lichts im Medium also gegenüber dem Vakuum verändert ist.

Integriert man alle (retardierten) elektrischen Felder, die von den Dipolen (Dichte der Dipole N) in der Schicht  $\Delta x$  erzeugt werden, so erhält man

$$E_D(x) = -i\omega \frac{\Delta x}{c} \frac{q^2 N}{2\epsilon_0 m \left((\omega_0^2 - \omega^2) + i\omega/\tau\right)}$$
(9.30)

Den Zusammenhang mit dem Brechungsindex im Medium erhält man, indem man eine ebene Welle betrachtet, die sich mit Geschwindigkeit c' = c/n durch die Schicht  $\Delta x$  bewegt. Wie in Gl. 9.17 gilt  $\omega = \omega'$  und k' = nk. Die Phase dieser Welle ist dann

$$\omega \left(t - \frac{\Delta x}{c'}\right) = \omega t - k' \Delta x$$
  
=  $\omega t - k \Delta x - (k' \Delta x - k \Delta x)$   
=  $\omega t - k \Delta x - k \Delta x (n-1)$  (9.31)

Handelt es sich um ein optisch dünnes Medium, d.h. für den letzten Ausdruck gilt

$$k\,\Delta x\,(n-1) = 2\pi\,\frac{\Delta x}{\lambda}\,(n-1) \ll 2\pi \tag{9.32}$$

so folgt für die ebene Welle approximativ

$$E(x) = E_0 e^{i(\omega t - k'\Delta x)} \approx E_0 e^{i(\omega t - k\Delta x)} \cdot (1 - i k \Delta x (n - 1)) \quad (9.33)$$

Der erste Faktor entspricht gerade der ungestörten Welle, der 2. Ausdruck dem Beitrag der Dipolmomente aus Gl. 9.30. Damit ist also

$$n(\omega) = 1 + \frac{q^2 N}{2\epsilon_0 m} \cdot \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega/\tau}$$
(9.34)

<sup>&</sup>lt;sup>19</sup>Das 2-fache Kreuzprodukt in Gl. 8.38 ergibt ein Vorzeichen, das vom Faktor  $-\omega^2$  durch die zweifache Ableitung kompensiert wird.

oder

$$n(\omega) = 1 + \frac{q^2 N}{2\epsilon_0 m} \cdot \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega/\tau}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2}$$
(9.35)

Das Oszillatormodell beschreibt daher

- einen komplexen Brechungsindex, der von der Dipoldichte N abhängt und Absorption beschreibt,
- eine Ausbreitungsgeschwindigkeit, die vom Unterschied zwischen Anregungsfrequenz und Resonanz-Eigenfrequenzen des Materials abhängt,
- die optischen Eigenschaften eines Materials, die aus der Summe der Effekte durch verschiedene Eigenschwingungen folgen.



**Abb. 9.13** Brechungsindex als Funktion der Frequenz für ein Material mit drei verschiedenen Eigenfrequenzen (Atwood).

Damit ergibt sich je nach Material und Frequenz folgendes Bild der Überlagerung von Primär und Sekundärwelle:

- Bereiche, in denen die Steigung positiv ist,  $\partial n/\partial \omega > 0$ , werden historisch als Bereiche normaler Dispersion bezeichnet.
- Bereiche nahe der Resonanzen, in denen die Steigung negativ ist,  $\partial n/\partial \omega < 0$ , werden ebenso als Bereiche anomaler Dispersion bezeichnet.
- In weiten Bereichen (vor allem der normalen Dispersion) ist die Phasengeschwindigkeit c' kleiner als die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum.

$$n > 1 \quad \Rightarrow \quad c' < c_{Vak}$$

• Nahe der Resonanzen kann n < 1 werden, die Phasengeschwindigkeit größer als die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum.

$$n < 1 \quad \Rightarrow \quad c' > c_{Vak}$$

• Für  $\omega \approx \omega_0$  ist der Imaginärteil von *n* sehr groß, die Welle wird sehr stark absorbiert. In diesen Bereichen ändert sich *c'* sehr schnell als Funktion der Frequenz.

# 9.6 Phasen- und Gruppengeschwindigkeit

Dass Geschwindigkeiten größer als die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum werden können, ist interessant durch die Implikationen für die spezielle Relativitätstheorie, die ja annimmt, dass sich Signale nicht schneller ausbreiten können als mit  $c_{Vak}$ .

Die Phasengeschwindigkeit einer perfekten harmonischen Welle ist aber kein Maß für die Ausbreitung eines Signals. Ein Signal muss zunächst einmal angeschaltet werden, ist also nicht periodisch und daher immer eine Summe von Frequenzen (nach Fourier-Zerlegung). Für die Ausbreitung von Signalen ist in vielen Fällen die Gruppengeschwindigkeit  $c_g$  ein besseres Maß.

$$c_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{c}{n + \omega \frac{\partial n}{\partial \omega}}$$
(9.36)

Der letzte Term folgt aus  $n = c \cdot k/\omega$  und der Bildung von  $\partial n/\partial \omega$ . Diese Gruppengeschwindigkeit ist in vielen Fällen interpretierbar als die Geschwindigkeit einer Einhüllenden einer modulierten Welle. Z.B. ergibt sich bei der Addition zweier Wellen mit leicht unterschiedlicher Frequenzen  $\omega_{1,2} = \omega_0 \pm \Delta \omega$  und Wellenzahlen  $k_{1,2} = k_0 \pm \Delta k$ ,

$$e^{i(\omega_{1}t-k_{1}x)} + e^{i(\omega_{2}t-k_{2}x)} = e^{i(\omega_{0}t-k_{0}x)} \cdot \left(e^{i(\Delta\omega t-\Delta kx)} + e^{-i(\Delta\omega t-\Delta kx)}\right)$$
$$= e^{i(\omega_{0}t-k_{0}x)} \cdot \cos(\Delta\omega t - \Delta kx)$$
(9.37)

dass die Gruppengeschwindigkeit

$$c_g = \frac{\partial w}{\partial k} \approx \frac{\Delta \omega}{\Delta k} \tag{9.38}$$

die Geschwindigkeit der Einhüllenden der Welle darstellt, die die Welle der Phasengeschwindigkeit  $c' = \frac{\omega_0}{k_0}$  in der Amplitude moduliert.

Diese Interpretation der Gruppengeschwindigkeit ist aber nicht allgemein gültig, denn  $c_g$  kann ebenfalls größer als  $c_{Vak}$  werden und sogar negative Werte sind möglich. Da dies immer verbunden ist mit der Nähe zu einer Resonanz und daher entsprechend starker Absorption und gleichzeitigem Auseinanderlaufen benachbarter Frequenzen durch die starke Dispersion, erfolgt auch hier kein Signaltransport mit Geschwindigkeiten >  $c_{Vak}$ .

Ebenso gilt, dass Photonen sich nur mit maximal Vakuumlichtgeschwindigkeit bewegen. Schwebung



Abb. 9.14 Bild einer Schwebung.

# 9.7 Linsen und Abbildungen

Ganz allgemein dienen Linsen, Spiegel, etc., zur Abbildung von Objekten.

Im Folgenden beschränken wir uns auf ebene Wellen (Fraunhofer-Optik) und nehmen an, dass die Wellenfronten viel breiter sind als die Wellenlänge und dass Beugung an den Rändern der optischen Geräte vernachlässigt werden kann.

Weiter beschränken wir uns auf "Paraxiale Strahlen", bei denen die Winkel  $\alpha$  zwischen Wellenvektoren und optischer Achse der Instrumente klein sind und auch die räumlichen Abstände r zur optischen Achse klein sind. Dann kann man jeweils sin $\alpha \approx \alpha$  und tan $\alpha \approx \alpha$  nähern. Diese lineare Näherung erlaubt es, Abbildungen als lineare Gleichungssysteme (Matrizen) zu schreiben. Dann kann ein Lichtstrahl an jeder Ebene senkrecht zur optischen Achse beschrieben werden durch den Winkel  $\alpha$  und den Abstand r zur Strahlachse. In der sogenannten Matrizenoptik ist dann der "Vektor" des Lichtstrahls

$$\text{Lichtstrahl} = \begin{pmatrix} \alpha \\ r \end{pmatrix} \tag{9.39}$$

Eine optische Abbildung ist

$$\begin{pmatrix} \alpha' \\ r' \end{pmatrix} = \mathcal{M} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ r \end{pmatrix}$$
(9.40)

Für einen Strahl, der sich ohne optische Elemente über einen Abstand d ausbreitet, gilt z.B.

$$\begin{pmatrix} \alpha' \\ r' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}}_{\mathcal{M}_d} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ r+d \cdot \alpha \end{pmatrix}$$
(9.41)

Die Matrix  $\mathcal{M}$  kann aber auch Brechung oder eine Linse charakterisieren.

#### Linse

An einer Halbkugel mit Radius  $R_1$  gilt für die Abbildung das Brechungsgesetz in linearer Näherung

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \alpha_2 \quad \Rightarrow \quad n_1 \alpha_1 \approx n_2 \alpha_2$$

Für einen parallel zur optischen Achse einfallenden Strahl läuft der Strahl durch den Brennpunkt

$$\frac{h}{f_1} \approx \alpha_1 - \alpha_2 \approx \alpha_1 \left(1 - \frac{n_1}{n_2}\right)$$

Für die Brennweite  $f_1$  folgt

$$f_1 = \frac{n_2}{n_2 - n_1} R_1 \tag{9.42}$$



Abb. 9.15 Abbildung an einer Halbkugel.

In diesem Fall ist in der "Ebene" der brechenden Fläche h = r = r', so dass

$$\begin{pmatrix} \alpha' \\ r' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} n_1/n_2 & -1/f_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathcal{M}_K} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ r \end{pmatrix}$$
(9.43)

Kombiniert man zwei Halbkugeln zu einer idealisiert dünnen Linse, so muss man nacheinander die beiden entsprechenden linearen Abbildungen ausführen, d.h. die Matrizen in der richtigen Reihenfolge multiplizieren:

$$\begin{pmatrix} \alpha' \\ r' \end{pmatrix} = \mathcal{M}_{K+} \cdot \mathcal{M}_{K-} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ r \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} n_1/n_2 & -1/f_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_2/n_1 & -1/f_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ r \end{pmatrix} \quad (9.44)$$

$$\begin{pmatrix} \alpha' \\ r' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1/f \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathcal{M}_L} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ r \end{pmatrix}$$
(9.45)

 $\operatorname{mit}$ 

$$f = \frac{1}{n_2/n_1 - 1} \cdot \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \tag{9.46}$$

Mit dieser Methodik der Matrizenoptik folgt auch aus

$$\begin{pmatrix} \alpha' \\ 0 \end{pmatrix} = \mathcal{M}_{d=b} \cdot \mathcal{M}_L \cdot \mathcal{M}_{d=g} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$
(9.47)

die bekannte Abbildungsgleichung einer Linse mit Gegenstandsweitegund Bildweiteb

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}$$
(9.48)

Für eine Anordnung von zwei Linsen im Abstand d ist demnach

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_{L2} \cdot \mathcal{M}_d \cdot \mathcal{M}_{L1} \tag{9.49}$$

Damit kann man auch komplexe Systeme durch lineare Gleichungen behandeln. Dieses Verfahren findet auch in Beschleunigern Verwendung, bei denen magnetische Linsen elektrisch geladene Teilchen fokussieren.

### Fehler von Abbildungen

Bei Abbildungen von optischen Geräten entstehen verschiedene Fehler relativ zu dem oben beschriebenen Verhalten.

- Chromatische Fehler enstehen vor allem durch Lichtbrechung, denn Brechungsindizes sind Funktionen der Frequenz, n(ω). Dadurch ist auch die Brennweite abhängig von der Farbe des Lichts und weißes parallel einfallendes Licht wird durch eine Linse kontinuierlich entlang der optischen Achse fokussiert. Man kann die Abbildungsfehler durch Kombination mehrerer Linsen hintereinander reduzieren.
- Achsenferne Strahlen und solche mit großem Einfallswinkel werden aufgrund der linearen Näherungen nicht korrekt abgebildet, es entstehen Verzerrungen des Bildes. Dies gilt für Spiegel und Linsen, die nicht der perfekten Form (Parabolspiegel und Rotationsellipsoid) folgen, sondern z.B. spährische (kugelförmige) Oberflächen haben. Entwickelt man die perfekte Form in einer Taylor-Reihe, so ist die lineare Näherung nur der erste Term. Höhere Terme können benutzt werden, um Abbildungsfehler zu analysieren.
- Insbesondere das menschliche Auge weist andere Fehler auf wie z.B. Astigmatismus. Dieser entsteht durch eine stärkere Wölbung der Augenlinse in einer Richtung, so dass einfallendes paralleles Licht nicht in einem Punkt sondern auf eine Linie abgebildet wird.

Weitere Fehler entstehen durch die Begrenzung der Optik (siehe Beugung).

# 9.8 Kohärenz

Die Überlagerung (Interferenz) von EM-Wellen führt zu zahlreichen wichtigen Effekten in der Natur und Technik. Interferenz ist und war auch zentral zum Verständnis des Welle-Teilchen-Dualismus in der Quantenmechanik.

Bei der Überlagerung zweier Wellen gilt immer (für relle  $\dot{E}$ )

$$\vec{E}_{ges} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$
(9.50)
$$I_{ges} = c \epsilon_0 \vec{E}_{ges}^2 = c \epsilon_0 (\vec{E}_1 + \vec{E}_2)^2 = c \epsilon_0 (\vec{E}_1^2 + \vec{E}_2^2 + 2\vec{E}_1\vec{E}_2)$$

$$= I_1 + I_2 + \underbrace{2 c \epsilon_0 \vec{E}_1 \vec{E}_2}_{\text{Interferenzterm}}$$
(9.51)

Nun misst man in der Optik zumeist Intensitäten  $\langle I \rangle$ , die an festen Orten über große Zeiten ( $\gg T$ ) gemittelt sind. Bei gleicher Wellenlänge und Frequenz ist diese Mittelung für den Ausdruck

$$\vec{E}_1\vec{E}_2\sim\cos(\omega t-kx)\cos(\omega t-kx+\varphi)$$

nur dann ungleich Null, wenn der Phasenunterschied  $\varphi$ zeitlich konstant ist. Man unterscheidet daher zwischen

• inkohärenter Überlagerung,  $I_{ges} = I_1 + I_2$ 

• kohärenter Überlagerung,  $I_{qes} = I_1 + I_2 + \text{Interferenzterm}$ 

In fast allen Lichtquellen tragen viele Atome gleichzeitig unabhängig voneinander zur Strahlung bei. Zwei solche Lichtquellen sind daher nicht kohärent, ihre Intensitäten addieren sich einfach. Es gibt zwei Möglichkeiten, trotzdem Interferenz zu beobachten.

• Man kann den Lichstrahl durch einen Spalt laufen lassen, um eine möglichst punktförmige Quelle zu erzeugen. Dann teilt man den Lichtstrahl, lässt ihn unterschiedliche Wege laufen und überlagert ihn dann wieder mit sich selber. Der Unterschied zwischen den beiden Laufzeiten,

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{c'} = \frac{n \,\Delta x}{c} \tag{9.52}$$

muss dann allerdings kleiner sein als die Kohärenzzeit der Lichtquelle. Je nach Dauer der Emmission findet man für die Kohärenzzeit  $\tau$  und die entsprechende Kohärenzlänge  $c\tau$ 

- freies Atom:  $\tau \approx 10^{-8}s = c\tau \approx 3m$ ,
- heißer Körper:  $\tau \approx 10^{-10}s$  =  $c\tau \approx 0,03$ m.
- In einem Laser findet induzierte Emmission statt, d.h. Licht der Frequenz  $\nu$  regt andere Atome zur Abstrahlung von Licht gleicher Frequenz  $\nu$  mit gleicher Phasenlage an. Die Kohärenzlänge kann dann viele km betragen.

Im Folgenden werden wir immer von hinreichend kohärenten Lichtquellen ausgehen.

## 9.9 Interferenz

### 9.9.1 Interferenz an planparallelen Platten



Abb. 9.17 Interferenz an ebenen Platten im Abstand d.

Bei einer ebenen Welle sind die Strahlen 1 und 2 gleichphasig. Mit

$$\frac{l_1}{x} = \sin \alpha$$
  $\frac{x}{l_2} = \sin \beta$   $\frac{x/2}{d} = \tan \beta$ 

#### Abb. 9.16

Überlagerung zweier inkohärenter Quellen.



**Abb. 9.18** Interferenz an planparallelen Platten.



Abb. 9.19 Das Michelson-Morley Experiment.

und dem Brechungsgesetz  $n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta$  folgt für den Zeitunterschied nach Beugung und Reflexion

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{l_2}{c_2} - \frac{l_1}{c_1} = \frac{1}{c} \left( n_2 l_2 - n_1 l_1 \right)$$
(9.53)

Der optische Gangunterschied ist dann

$$c \cdot \Delta t = x \cdot \left(\frac{n_2}{\sin\beta} - n_1 \sin\alpha\right) = 2n_2 d \cos\beta \qquad (9.54)$$

$$= 2d\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \alpha}$$
(9.55)

Da sich ausserdem ein Phasensprung bei Reflexion am optisch dichteren Medium ergibt, folgt für die Phasendifferenz

$$\Delta \varphi = 2\pi \, \frac{c \cdot \Delta t}{\lambda} - \pi \tag{9.56}$$

Damit erhält man

- Maximum der Intensität bei  $\Delta \varphi = m \cdot 2\pi$ , m = 0, 1, 2, ...
- Minimum der Intensität bei  $\Delta \varphi = m + \frac{1}{2} \cdot 2\pi$ , m = 0, 1, 2, ...

### 9.9.2 Michelson-Morley Experiment

Hierbei wird ein Strahl an einem halbdurchlässigen Spiegel aufgespalten und an zwei Spiegeln reflektiert. Am halbdurchlässigen Spiegel entsteht deshalb ein Interferenzbild, das wegen der "Zylindergeometrie" wieder Kreise ergibt. Es handelt sich also auch wieder um Interferenz an planparallelen Platten. Wegen der kleinen Winkel zur Strahlachse ist dies ein sehr empfindliches Instrument zur Messung von Längenunterschieden. Bei exakt gleichen optischen Weglängen sind die innersten Ringe farbig, denn die Maxima und Minima treten bei unterschiedlichen  $\lambda$  an verschiedenen Stellen auf.

Historisch wurde mit diesem Experiment der Äther als Medium der EM-Wellen ausgeschlossen, denn bei verschiedenen Orientierungen der Weglängen zum Geschwindigkeitsvektor der Erde durch den Äther sollte die Lichtgeschwindigkeit unterschiedlich sein und damit die Ringe wandern. Dies wurde aber nicht beobachtet.

Heute werden Michelson-Morley Interferometer verwendet, um nach der Wirkung von Gravitationswellen auf die Weglängen im Interferometer zu suchen (Effekt der allgemeinen Relativitätstheorie). Da die Effekte klein sind, benötigt man kilometerlange Arme des Interferometers und hofft dadurch empfindlich auf Längenänderungen von ca  $10^{-18}$  m zu werden.



**Abb. 9.20** Aufbau des Original Michelson-Morley Experiments von 1887 mit einer massiven Granitplatte in einem Quecksilberbad (Wikipedia).

# 9.10 Beugung

Bisher sind wir von der Idealisierung ebener Wellen mit einer unendlich ausgedehnten Wellenfront ausgegangen. Dies ist natürlich so nicht realisierbar. Ganz im Gegenteil stellt man fest, dass jede geometrische Begrenzung einer Welle zu Interferenzmustern führt. Beispiele für solche Begrenzungen sind

- störende Gegenstände in einem Lichtstrahl
- Blenden zur Eingrenzung eines Lichtstrahls oder zur Abschirmung von störenden Lichtquellen
- der Rand von Linsen oder von Spiegeln
- Spalte und Gitter

Insbesondere bei Kameras, Mikroskopen oder Teleskopen sind solche Begrenzungen unvermeidbar und verhindern, dass eine unendlich gute Auflösung sehr kleiner oder sehr entfernter Objekte erreicht werden kann. Andererseits kann man durch Spalte und Gitter sehr aufschlussreiche und präzise Experimente realisieren.

Bei der Erklärung dieser Phänomene beschränken wir uns wieder auf Fraunhofer-Beugung, bei der sowohl die (kohärente) Lichtquelle als auch das Messinstrument (Auge, Bildschirm) so weit vom beugenden Objekt entfernt sind, dass man von ebenen Wellenfronten ausgehen kann. Wir werden sehen, dass diese Abstände insbesondere viel größer als die Ausdehnung der beugenden Elemente und auch als die Wellenlänge sein müssen. Insbesondere reicht es, die Winkelabhängigkeit der ausgehenden ebenen Wellen zu analysieren, denn durch Linsen lassen sich daraus scharfe Abbildungen machen. Außerdem nehmen wir monochromatisches Licht an, denn entspechend der Fourier-Analyse kann jede Beugungserscheinung mehrerer Frequenzen aus der Supersposition der Beugungserscheinung der Fourier-Komponenten konstruiert werden.



Abb. 9.21 Beugungsbild an einer scharfen Kante.



Abb. 9.22 Intensität bei der Beugung an einer scharfen Kante.

## 9.10.1 Doppelspalt mit kleiner Spaltbreite

Betrachtet man einen Doppelspalt, bei dem die Breite der Spalte sehr klein ist im Vergleich zur Wellenlänge (siehe Einzelspalt unten) und insbesondere sehr viel kleiner als der Spaltabstand d, so gehen nach dem Huygens'schen Prinzip Kugelwellen von den Spaltöffnungen aus, die bei einem Winkel  $\theta$  einen Wegunterschied

$$r_2 - r_1 = d\,\sin\theta\tag{9.57}$$

und damit eine Phasendifferenz

$$\phi = k \cdot (r_2 - r_1) = 2\pi \frac{d}{\lambda} \sin \theta$$
(9.58)

aufweisen. Konstruktive Interferenz ist zu erwarten, wenn der Gangunterschied gerade ein Vielfaches der Wellenlänge ist, also bei

$$r_2 - r_1 = m \cdot \lambda$$
 für  $m = \dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots$  (9.59)

Die Intensitätsverteilung erhält man aus der Interferenz der beiden Kugelwellen,

$$E = E_1 + E_2 = E_0 \frac{1}{r_1} e^{i(\omega t - kr_1)} + E_0 \frac{1}{r_2} e^{i(\omega t - kr_2)}$$
(9.60)

Für große Entfernungen (Fraunhofer-Beugung) ist

$$r_{1,2} \gg d, \qquad r_1 \approx r_2 \approx r$$

$$\tag{9.61}$$

und damit<sup>20</sup>

20

$$E \approx E_0 \frac{1}{r} e^{i\omega t} \left( e^{-ikr_1} + e^{-ikr_2} \right)$$
(9.62)

$$= E_0 \frac{1}{r} e^{i(\omega t - kr_2)} \left(1 + e^{ik(r_2 - r_1)}\right) = E_2 \left(1 + e^{i\phi}\right) \quad (9.63)$$

$$= 2E_2\cos\frac{\phi}{2} \cdot e^{i\phi/2} \tag{9.64}$$

Da die Intensität  $I = c \cdot \epsilon_0 \cdot E^2$  im zeitlichen Mittel betrachtet werden muss und der Faktor  $e^{i\phi/2}$  nur eine Phasenverschiebung darstellt, ist

$$\langle I \rangle \approx I_{max} \cos^2 \frac{\phi}{2}$$
 (9.65)

Diese Intensitätsverteilung hat für m = 0, 1, 2, ...

- Maxima bei  $\phi = 2\pi \cdot m \implies r_2 r_1 = \lambda \cdot m$ also bei  $\sin \theta = m \frac{\lambda}{d}$
- Minima bei  $\phi = 2\pi \cdot (m + \frac{1}{2}) \implies r_2 r_1 = \frac{1}{2}\lambda, \frac{3}{2}\lambda,$

Entscheidend für die Größe der Beugungsfigur ist also das Verhältnis von Wellenlänge  $\lambda$  zur geometrischen Ausdehnung d des beugenden "Objekts". Beispielsweise ist für  $\lambda = 500$ nm, d = 0,01mm das erste Nebenmaximum (m = 1) bei  $\theta = 2,9^0$ .

$$1 + e^{i\phi} = e^{i\phi/2} \cdot (e^{-i\phi/2} + e^{i\phi/2}) = e^{i\phi/2} \cdot 2\cos\frac{\phi}{2}$$







Abb. 9.24

Beugungsfigur an einem Doppelspalt mit sehr kleiner Breite der Spalte. Beugung ~  $\frac{\lambda}{d}$ 

## 9.10.2 Einzelspalt

Bei einem einzelnen Spalt mit Spaltbreite a ist die maximale Phasendifferenz

$$\beta = k \cdot a \cdot \sin \theta = 2\pi \frac{a}{\lambda} \cdot \sin \theta \tag{9.66}$$

Zu berechnen ist das Beugungsintegral

$$E_s(\theta) = \int_{Spalt} E_{in} \frac{1}{r} e^{i(\omega t - kr)} dx \qquad (9.67)$$

bei dem alle Kugelwellen entlang des Spalts aufsummiert werden. In Fraunhofer-Näherung,  $r_0 \gg a$ , und mit  $r = r_0 + x \cdot \sin \theta$  folgt

$$E_{s}(\theta) \approx \underbrace{E_{in} \frac{1}{r_{0}} e^{i(\omega t - kr_{0})}}_{E_{0}} \int_{0}^{a} e^{-ik \cdot x \cdot \sin \theta} dx$$
$$= E_{0} \frac{a}{-i\beta} \left( e^{-i\beta} - 1 \right) = E_{0} \frac{a}{-i\beta} e^{-i\beta/2} (-2i \sin \beta/2)$$
$$= E_{0} a e^{-i\beta/2} \cdot \frac{\sin(\beta/2)}{\beta/2}$$
(9.68)

Die Intensitätsverteilung

$$\left\langle I \right\rangle \approx I_{max} \left( \frac{\sin \beta/2}{\beta/2} \right)^2 \tag{9.69}$$

hat demnach

- ein breites Maximum bei $\beta=0,$ d.h. $\theta=0,$
- Minima bei  $\beta = 2\pi \cdot m$  (mit m = 1, 2, 3, ...), also



**Abb. 9.27** Beugungsbild eines einzelnen Spalts mit verschiedenen Breiten.



**Abb. 9.25** Beugung an einem einzelnen Spalt.



Abb. 9.26

Beugungsbild eines einzelnen Spalts.



(c) Red = calculated intensity Purple = "envelope" of intensity function



#### Abb. 9.28

Beugung an einem Einzelspalt der Breite a (oben), Doppelspalt mit Abstand d = 4a und Breite a = 0 (mitte), Doppelspalt mit Abstand d = 4a (unten) und Photo.

## 9.10.3 Doppelspalt allgemein

Für einen Doppelspalt muss man die Feldstärken (nicht die Intensitäten) der beiden Spalten addieren. Die Rechnung folgt dem Schema für den Doppelspalt mit schmaler Breite. Mit

$$\phi = 2\pi \frac{d}{\lambda} \cdot \sin \theta \qquad \beta = 2\pi \frac{a}{\lambda} \cdot \sin \theta \qquad (9.71)$$

 $\operatorname{ist}$ 

$$E = E_{s1} + E_{s2} = E_{s2} \left( 1 + e^{i\phi} \right) = 2E_{s2} \cos \frac{\phi}{2} e^{i\phi/2}$$
(9.72)

Mit der Einzelspalt-Feldstärke aus Gl. 9.68 folgt für den Doppelspalt

$$E \approx 2E_0 a \cos \frac{\phi}{2} \frac{\sin(\beta/2)}{\beta/2} e^{i(\frac{\phi}{2} - \frac{\beta}{2})}$$
(9.73)

und die Intensität

$$I \approx I_{max} \cos^2 \frac{\phi}{2} \left( \frac{\sin(\beta/2)}{\beta/2} \right)^2$$
(9.74)

Es gibt also Interferenz innerhalb der Spalten und zwischen den Spalten, und insbesondere ist

$$I \neq I_{s1} + I_{s2} \approx 2I_{s2} \tag{9.75}$$

#### 9.10.4 Gitter

Bei der Addition der Feldstärken aller Spalten eines feinen Gitters gilt

$$E = \sum_{i=j}^{N} E_{si} = E_{s1} \left( 1 + e^{i\phi} + e^{i2\phi} + e^{i3\phi} + \dots \right)$$
(9.76)

Die geometrische Reihe ergibt

$$E = E_{s1} \sum_{n=0}^{N-1} (e^{i\phi})^n = E_{s1} \frac{e^{iN\phi} - 1}{e^{i\phi} - 1} = E_{s1} \frac{e^{iN\phi/2}}{e^{i\phi/2}} \frac{\sin(N\phi/2)}{\sin(\phi/2)}$$

so dass mit der Einzelspaltamplitude

$$E = E_0 \frac{\sin(N\phi/2)}{\sin(\phi/2)} \frac{\sin(\beta/2)}{\beta/2}$$
(9.77)

die Intensität folgt:

$$\langle I \rangle = I_{max} \left( \frac{\sin(N\phi/2)}{\sin(\phi/2)} \right)^2 \left( \frac{\sin(\beta/2)}{\beta/2} \right)^2$$
(9.78)

Damit werden bei hoher Spaltanzahl N die Maxima immer schmaler und schärfer, so dass sehr genaue Messungen von  $\lambda$  möglich werden.



Abb. 9.29 Beugung an Gittern mit verschiedener Anzahl von Spalten.

# 9.10.5 Kreisförmige Öffnungen

Die Linse eines Fernrohrs oder eines Mikroskops bildet eine kreisförmige Blende, für deren Beugungsbild das 2-dimensionale Beugungsintegral

$$E = \iint_{\text{Öffnung}} E_{in} \frac{1}{r} e^{i(\omega t - kr)} \, dx \, dy \tag{9.79}$$

gelöst werden muss. Man findet, dass das 1. Minimum bei

$$\theta_{min} = 1,22 \,\frac{\lambda}{D} \tag{9.80}$$

liegt.

Eine Lochblende und eine Kreisscheibe erzeugen dabei ein ganz ähnliches Beugungsbild.



**Abb. 9.31** Beugung an einer kreisförmigen Lochblende (links) und an einer kreisförmigen Scheibe (rechts).

Das Auflösungsvermögen eines Fernrohrs wird nach Abbe so definiert, dass das Maximum des Beugungsrings eines Sterns nicht näher als im Minimum der Beugungsfigur eines anderen Sterns liegen darf.



Abb. 9.30 Beugung an einer Blende.



**Abb. 9.32** Auflösungsvermögen von zwei Sternen durch Beugung.

# 9.11 Dopplereffekte

## 9.11.1 Linearer nichtrelativistischer Dopplereffekt in Medien

Für Wasserwellen oder Schallwellen ergibt sich eine Veränderung der messbaren Frequenz, wenn Sender oder Empfänger sich relativ zum Medium (Wasser, Luft) bewegen. Die resultierende Intensität kann ebenfalls nach dem Huygens'schen Prinzip berechnet werden, wir beschränken uns aber auf die Änderung der Frequenz. Dazu betrachten wir ausschließlich die Zeitpunkte maximaler Amplitude am Sender und Empfänger.

In einem System, in dem das Medium ruht, bewege sich Sender Sund Empfänger E mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten  $v_S$ ,  $v_E$ entlang einer Richtung,

$$x_S(t) = x_{S0} + v_S \cdot t \qquad x_E(t) = x_{E0} + v_E \cdot t$$

Emittiert der Sender zwei aufeinanderfolgende Maxima zu den Zeiten  $t_a, t_b$ , mit Periodendauer  $T_S = t_b - t_a$ , so geschieht dies an unterschiedlichen Orten,

$$x_a = x_{S0} + v_S t_a \qquad x_b = x_{S0} + v_S t_b$$

Die Maxima der Wellen bewegen sich mit Geschwindigkeit c,

$$x_{wa}(t) = x_a + c \cdot (t - t_a)$$
  $x_{wb}(t) = x_b + c \cdot (t - t_b)$ 

Abb. 9.33 Dopplereffekt: D

Dopplereffekt: Der Sendet sendet Maxima ab bei  $(t_a, x_a)$ und  $(t_b, x_b)$ .

x



Abb. 9.34 Dopplereffekt in Wasser (Wikipedia).

Sie erreichen den Empfänger zu den Zeiten  $t_c, t_d$ , wenn

$$x_{wa}(t_c) = x_E(t_c) \qquad x_{wb}(t_d) = x_E(t_d)$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
x_{S0} + v_S t_a + c \cdot (t_c - t_a) &= x_{E0} + v_E \cdot t_c \\
\Rightarrow & (c - v_E) \cdot t_c &= (c - v_S) \cdot t_a + x_{E0} - x_{S0} \\
x_{S0} + v_S t_b + c \cdot (t_d - t_b) &= x_{E0} + v_E \cdot t_d \\
\Rightarrow & (c - v_E) \cdot t_d &= (c - v_S) \cdot t_b + x_{E0} - x_{S0} \quad (9.81)
\end{aligned}$$

Die Differenz beider Gleichungen ist

$$(c - v_E) \cdot T_E = (c - v_S) \cdot T_S$$
(9.82)

Hier ist  $T_S = t_b - t_a$  die Periodendauer des Senders und  $T_E = t_d - t_c$  die am Empfänger gemessene Periodendauer. Für die Frequenzen  $\nu = 1/T$  folgt

$$\nu_E = \frac{c - v_E}{c - v_S} \cdot \nu_S \tag{9.83}$$

Alle Geschwindigkeiten sind hier (wie hoffentlich immer in 1-dim. physikalischen Gleichungen) entlang der gleichen Richtung definiert, d.h. gegebenenfalls mit Vorzeichen zu versehen. Insbesondere zeigt c vom Sender zum Empfänger. Bewegen sich Sender und Empfänger in die gleiche Richtung, sind auch die gemessenen Frequenzen gleich. Die Frequenzverschiebung wird maximal, wenn sich Sender und Empfänger in entgegengesetzte Richtungen bewegen.

Bei einer Schallgeschwindigkeit von ca. 330 m/s ändert sich für eine Sirene bei  $v_S = 100$  km/h die von einem Fußgänger ( $v_E = 0$ ) empfundene Frequenz also um etwa 9%.

# 9.11.2 Transversaler nichtrelativistischer Dopplereffekt in Medien

Der oben beschriebene lineare Dopplereffekt beruht offenbar darauf, dass Sender und Empfänger ihren Abstand ändern, so dass aufeinanderfolgende Maxima der Welle unterschiedliche Wegstrecken zurücklegen müssen. Der Gangunterschied wird dann als Frequenzverschiebung fehlinterpretiert.

Bewegt sich beispielsweise der Sender in einer Kreisbahn um den Empfänger, so dass  $\vec{v}_E$  und Abstand senkrecht aufeinander stehen, so ergibt sich auch kein Dopplereffekt. Ist  $\alpha$  der Winkel zwischen  $\vec{v}_S$  des Senders und der Richtung  $\vec{r}_E(t_c) - \vec{r}_S(t_a)$ , (und analog  $\beta$  für den Empfänger), so ist die Verallgemeinerung der Dopplerformel

$$\nu_E = \frac{c - v_E \, \cos \beta}{c - v_S \, \cos \alpha} \cdot \nu_S \tag{9.84}$$

Speziell ist damit der "transversale Dopplereffekt", d.h.

$$\alpha = 90^0 = \beta \tag{9.85}$$

bei (nichtrelativistischen) Wellen in Medien gleich Null.

## 9.11.3 Longitudinaler relativistischer Dopplereffekt

Laut spezieller Relativitätstheorie sind alle Inertialsysteme gleichberechtigt und ununterscheidbar. Man darf daher bei EM-Wellen im Vakuum auch nicht anhand des Dopplereffektes unterscheiden können, ob sich Sender oder Empfänger bewegen, d.h es gibt kein System eines Mediums.

Andererseits muss man den Dopplereffekt für EM-Wellen in jedem System ausrechnen dürfen, d.h. im System des Senders oder dem des Empfängers oder selbst in dem eines beliebigen fiktiven Systems.

Wir benutzen daher o.B.d.A. das System des Empfängers, d.h. wir setzen  $v_E = 0$ . Wählen wir den Nullpunkt des Koordinatensystems so, dass die Ursprünge der Systeme von S und E zusammenfallen, so gilt laut Lorentztransformation für die Zeiten  $t'_a, t'_b$  und Orte  $x'_a, x'_b$ , alle gemessen im System des Senders,

$$ct_a = \gamma ct'_a + \gamma \beta x'_a \qquad ct_b = \gamma ct'_b + \gamma \beta x'_b \qquad (9.86)$$

Da im System des Senders  $x'_a = x'_b$  ist, folgt

$$t_b - t_a = \gamma \cdot (t'_b - t'_a) \qquad \Rightarrow \qquad T_S = \gamma T'_S \tag{9.87}$$

Die vom Sender (in seinem System erzeugte) Periodendauer  $T'_{S} = t'_{b} - t'_{a}$  ist also de facto durch die Zeitdilatation verändert im System des Empfängers. Die Ausbreitung der Welle und die Messung der Periodendauer  $T_{E}$  sind unverändert gegenüber der Rechnung im nichtrelativistischen Fall, denn es müssen keine weiteren Lorentz-transformationen zwischen System mehr berücksichtigt werden. Damit ist nach Gl. 9.82 im System des Empfängers mit  $v_{E} = 0$ 

$$c \cdot T_E = (c - v_S) \cdot T_S = (c - v_S) \cdot \gamma T'_S = \frac{c - v_S}{\sqrt{1 - v_E^2/c^2}} T'_S \qquad (9.88)$$

oder einfacher mit  $\beta_S = v_S/c$ ,

$$T_E = \sqrt{\frac{1 - \beta_S}{1 + \beta_S}} \cdot T'_S \tag{9.89}$$

Die Frequenzverschiebung aufgrund der Kombination von Zeitdilatation und Abstandsänderung ist daher

$$\nu_E = \sqrt{\frac{1+\beta_S}{1-\beta_S}} \cdot \nu'_S \tag{9.90}$$

Diese Formel hängt tatsächlich nicht mehr von absoluten Geschwindigkeiten gegenüber einem absoluten Raum (oder Medium) ab, sondern nur noch von der Relativgeschwindigkeit von Sender und Empfänger.

In der Astrophysik spielt die Dopplerverschiebung eine große Rolle, da die Verschiebungen bekannter Spektrallinien benutzt werden können, um die Geschwindigkeiten von Sternen oder Galaxien relativ zu uns zu bestimmen (siehe Expansion des Universums, dunkle Materie, dunkle Energie).

## 9.11.4 Transversaler relativistischer Dopplereffekt

Wie beschrieben ist der transversale Dopplereffekt im nichtrelativistischen Fall gleich Null.

Relativistisch ist aber die Zeitdilatation zu berücksichtigen, da in sie nicht die Orientierung der Geschwindigkeiten eingeht, sondern der Betrag der Geschwindigkeit. Damit ist beim transversalen Dopplereffekt die Verschiebung der Periodendauer gegeben durch

$$T_E = \gamma T'_S = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \cdot T'_S \tag{9.91}$$

und die Frequenzänderung

$$\nu_E = \sqrt{1 - \beta^2} \cdot \nu'_S \tag{9.92}$$

Durch die Abhängigkeit von  $\beta^2$  ist der Effekt viel kleiner als beim normalen Dopplereffekt.



Abb. 9.35

Rotverschiebung eines entfernten Galaxienhaufens (Wikipedia).
# A Mathematische Formeln

Vektorfeld  $\vec{E}(\vec{r})$ , skalares Feld  $f(\vec{r})$ 

Kartesische Koordinaten $x, y, z$			
Ortsvektor	$\vec{r} = (x, y, z) = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z = r \vec{e}_r$		
Linienelement:	$d\vec{s} = dx  \vec{e}_x + dy  \vec{e}_y + dz  \vec{e}_z$		
Volumenelement	dV = dx  dy  dz		
Nabla, $\nabla = \vec{\nabla} = \frac{d}{d\vec{r}}$	$\nabla = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix}, \qquad \partial_x = \frac{\partial}{\partial x} = \partial_1$		
Gradient (Steigung)	$\nabla f = \begin{pmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \\ \partial_z f \end{pmatrix} \qquad (\nabla f)_i = \partial_i f$		
Divergenz (Quellstärke)	$\nabla \vec{E} = \partial_x E_x + \partial_y E_y + \partial_z E_z = \sum_i \partial_i E_i$		
Rotation (Wirbelstärke)	$\nabla \times \vec{E} = \begin{pmatrix} \partial_y E_z - \partial_z E_y \\ \partial_z E_x - \partial_x E_z \\ \partial_x E_y - \partial_y E_x \end{pmatrix}$		
Laplace $\Delta$	$\nabla^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2 = \Delta$		
	$\nabla^2 f = \partial_x^2 f + \partial_y^2 f + \partial_z^2 f = \Delta f$		

Kugelkoordinaten: Betragr,Polarwinkel $\theta,$ Azimuthwinkel $\varphi$ 

Koordinaten	$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$ t	$\tan\theta = \sqrt{x^2 + y^2}/z,$	$\tan \varphi = y/x$
Ortsvektor	$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \varphi \\ r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \theta \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi \end{pmatrix}$	
Einheitsvektoren	$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi\\ \cos\theta \end{pmatrix}$	$\vec{e}_{\theta} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \cos\varphi \\ \cos\theta & \sin\varphi \\ -\sin\theta \end{pmatrix}$	$\vec{e}_{\varphi} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ +\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$
Linienelement:	$d\vec{s} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + r s$	$\sin  heta  d arphi ec e_{arphi}$	, , , , , , , , , , , , , , , , , , ,
Volumenelement	$dV$ = $r^2 \sin \theta  dr  d\theta  d\varphi$		
Gradient	$\nabla f = \vec{e}_r \partial_r f + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \partial_\theta f +$	$\vec{e}_{\varphi} \frac{1}{r\sin\theta} \partial_{\varphi} f$	
Divergenz	$\nabla \vec{E} = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 E_r) + \frac{1}{r \sin r}$	$\overline{\mathbf{n}\theta}(\partial_{\varphi}E_{\varphi}+\partial_{\theta}(\sin\theta E_{\theta}$	))
Laplace	$\Delta f = \frac{1}{r} \partial_r^2 (rf) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}$	$\frac{1}{2}\left(\sin\theta\partial_{\theta}(\sin\theta\partial_{\theta}f)+\partial_{\theta}f\right)$	$\partial_{\varphi}^2 f) \big)$

<b>Zylinderkoordinaten:</b> Abstand zur Achse $R$ , Azimuth $\varphi$ , Höhe $z$			
Koordinaten	$R^2 = x^2 + y^2 \qquad \tan \varphi = y/x \qquad z$		
Ortsvektor	$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cos \varphi \\ R \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}$		
Einheitsvektoren	$\vec{e}_R = \begin{pmatrix} \cos\varphi\\ \sin\varphi\\ 0 \end{pmatrix},  \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi\\ +\cos\varphi\\ 0 \end{pmatrix},  \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 1 \end{pmatrix}$		
Linienelement:	$d\vec{s} = dR  \vec{e}_R + R  d\varphi  \vec{e}_\varphi + dz  \vec{e}_z$		
Volumenelement	$dV = R  dR  d\varphi  dz$		
Gradient	$\nabla f = \vec{e}_R \partial_R f + \vec{e}_\varphi \frac{1}{R} \partial_\varphi f + \vec{e}_z \partial_z f$		
Divergenz	$\nabla \vec{E} = \frac{1}{R} \partial_R (RE_R) + \frac{1}{R} \partial_\varphi E_\varphi + \partial_z E_z$		
Laplace	$\Delta f = \frac{1}{R} \partial_R (R \partial_R f) + \frac{1}{R^2} \partial_{\varphi}^2 f + \partial_z^2 f$		

#### Ableitungs-Identitäten

$$\nabla \vec{r} = 3, \quad \nabla r = \vec{e}_r, \quad \nabla \times \vec{r} = 0$$
  

$$\nabla (\nabla f) = \nabla^2 f \qquad \nabla \times (\nabla f) = 0 \qquad \nabla (\nabla \times \vec{E}) = 0$$
  

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla (\nabla \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E}$$
  

$$\nabla \times (f\vec{E}) = f(\nabla \times \vec{E}) + (\nabla f) \times \vec{E}$$

#### Integralsätze:

Gradientensatz

Gauß'scher Integralsatz

$$\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} (\nabla f) \, d\vec{s} = f(\vec{b}) - f(\vec{a})$$
$$\iiint_{V} (\nabla \vec{E}) \, dV = \oiint_{A} \vec{E} \, d\vec{A}$$
geschlossene Fläche  $\vec{A}$  um Volumen V  
Orientierung  $(d\vec{A})$  nach außen

 ${\it Stokes'scher\ Integralsatz}$ 

 $\iint_{A} (\nabla \times \vec{E}) \, d\vec{A} = \oint_{S} \vec{E} \, d\vec{s}$ geschlossene Linie S um Rand der Fläche  $\vec{A}$ Orientierung  $(d\vec{A}, d\vec{s})$  nach rechter Hand Regel

$$\begin{array}{l} \hline \mathbf{Komplexe \ Zahlen:} \ z}{i=\sqrt{-1}, \quad i^2=-1, \quad 1/i=-i}\\ e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi, \quad e^{i\pi/2}=i\\ z=a+ib=|z|e^{i\varphi}=|z|\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right) \quad (a,b,\varphi \ \mathrm{reell})\\ Re(z)=a=|z|\cos\varphi, \quad Im(z)=b=|z|\sin\varphi\\ z^*=a-ib, \quad |z|^2=zz^*\\ |z|^2=zz^*=(Re(z))^2+(Im(z))^2=a^2+b^2, \quad \tan\varphi=Im(z)\ /\ Re(z)\\ \cos\varphi=\frac{1}{2}(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}) \quad \sin\varphi=\frac{-i}{2}(e^{i\varphi}-e^{-i\varphi})\\ 1+e^{i\varphi}=e^{i\varphi/2}\cdot 2\cos\frac{\varphi}{2} \end{array}$$

110

# B Formeln zum Elektromagnetismus

<u>Konstanten</u>	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{N}{A^2}$	$= 1,2566 \cdot 10^{-6} \frac{N}{A^2}$
	$\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2} = \frac{10^7}{4\pi c^2} \frac{A^2}{N}$	$= 8,854187817\cdot 10^{-12} \frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{Nm}^2}$
	$c = 299792458\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$	$\approx 3\cdot 10^8 \tfrac{\rm m}{\rm s} = 30 \tfrac{\rm cm}{\rm ns}$
Elementarladung	$e=1,602176565\cdot 10^{-19}~{\rm C}$	$e = q_p = -q_e$
Massen	Elektron: $m_e = 511$ KeV	Proton: $m_p = 938$ MeV

Strom u. Ladun	$\underline{\mathbf{g}} \qquad I = \partial_t q$	
Strom- u. Ladungs	sdichte $I = \iint \vec{j} d\vec{A}$	$q = \iiint \varrho \ d\vec{r}$
Ladungserhaltung	$ abla \vec{j} = -\partial_t  \varrho$	$\oint \vec{j} \ d\vec{A} = -\partial_t \ q$
Maxwell-Gleich	ungen	
Gauß für $\vec{E}$	$\nabla \vec{E} = \frac{\varrho}{\epsilon_0}$	$\oint \vec{E}  d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0}$
Gauß für $\vec{B}$	$\nabla \vec{B} = 0$	$\iint \vec{B} \ d\vec{A} = 0$
Faraday-Henry	$\nabla \times \vec{E} = -\partial_t  \vec{B}$	$\oint \vec{E}  d\vec{s} = -\partial_t \iint \vec{B} d\vec{A}$
Ampere-Maxwell	$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{j} + \epsilon_0 \; \partial_t \vec{E})$	$\oint \vec{B} d\vec{s} = \mu_0 (I + \epsilon_0 \partial_t \iint \vec{E} d\vec{A})$
Lorentz-Kraft	$\vec{F} = q  \left( \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right)$	
Energiedichte	$w = \frac{1}{2}ED + \frac{1}{2}BH$	
Dielektrikum	$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$	
Magnetismus	$\vec{B} = \mu_0 \left( \vec{H} + \vec{M} \right) = \mu_0 \mu_r \vec{H}$	
Potentiale_	$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$	$\vec{E} = -\nabla \varphi - \partial_t \vec{A}$
Eichtransform.	$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla \lambda$	$\varphi' = -\varphi - \partial_t \lambda$
Superposition	$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i$	$\vec{B} = \sum_i \vec{B}_i$
	$\varphi = \sum_i \varphi_i$	$\vec{A} = \sum_i \vec{A}_i$

#### Elektrostatik

LICHUIOSUAUII		
Potentielle Energie	$W_p = -\int_1^2 \vec{F} \ d\vec{s}$	$\varphi = \frac{W_p}{q'}$
Potential $\varphi$	$\vec{E} = -\nabla \varphi$	$\varphi = -\int \vec{E}  d\vec{s}$
Spannung $U$	$U = \varphi(\vec{r}_2) - \varphi(\vec{r}_1)$	5
Punktquelle $q$	$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \; \frac{q}{r^2} \; \vec{e}_r$	$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$
Dipol-Feld $\pm q$	$\vec{p} = q  \vec{d}  (-q \rightarrow +q)$	$\varphi \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos\theta}{r^2}$
Dipol-Energie	$E_{pot} = -\vec{p}\vec{E}$	$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}$
Plattenkondensator	$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$	U = E d
	C = q/U	$C = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{d}$
	$W = \frac{1}{2}CU^2$	
Poisson-Gleichung	$\Delta \varphi = -\varrho  /  \epsilon_0$	
Elektrische Leitun	g	
Stromdichte	$\vec{j} = \varrho \vec{v} = \varrho \mu \vec{E} = \sigma_{el} \vec{E}$	
Ohm'sches Gesetz	$R = U/I = \frac{1}{\sigma_{el}} \frac{L}{A}$	
Stromkreise	Masche: $U_{emk} = \sum_{a} U_{a}$	Knoten: $\sum_{a} I_a = 0$
Widerstände	Reihe: $R_{ges} = R_1 + R_2$	Parallel: $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$
Magnetostatik		
Biot-Savart	$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{d\vec{L} \times \vec{r}}{r^3}$	
B-Feld eines Leiters	$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \vec{e}_{\varphi}$	
Kreisbahn	$P_T = q B R$	
Spule	$B = \mu_0 n I$	
Kraft auf Leiter	$\vec{F} = I \int d\vec{l} \times \vec{B}$	
Kraft zwischen Leiter	$\operatorname{cn}  \frac{F}{L} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi R}$	
magnetischer Dipol	$\vec{m} = I \vec{A}$	$\vec{B} = \frac{\mu_0 \vec{m}}{2\pi r^3}$ auf der Achse
Dipol-Energie	$E_{pot}$ = $-\vec{m}  \vec{B}$	$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$
Hall Effekt	$U_H = v  b  B$	
Vektor-Potential	$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{j}}{r} dV$	

### Induktion

induzierte Spannung	$U_{ind} = -\partial_t \iint \vec{B}  \vec{A}$	
Selbstinduktion	$U_{ind} = -L \ \partial_t I$	
Spule	$L = \mu_o  \mu_r  n^2  V$	
<u>Schaltkreise</u> Einschaltvorgänge	$\tau \; \partial_t I + I = I_\infty$	$I(t) = I_{\infty} (1 - e^{-t/\tau})$
Zeitkonstanten	au = RC	$\tau = L / R$
Wechselspannung	$U = U_0 e^{i\omega t}$	$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega}$
Leistung	P = UI	$\bar{P} = \frac{\int_0^T U \cdot I  dt}{T} = \frac{U_0 I_0}{2} \cos(\varphi_U - \varphi_I)$
komplexe Widerstände	U = Z I	
	$Z_R = R$	$Z_L = i\omega L$ $Z_C = 1/(i\omega C)$
Reihenschwingkreis	$\partial_t U = R \partial_t I + \frac{1}{C} I +$	$-L\partial_t^2 I$
	$Z = R + \frac{1}{i\omega C} + i\omega L$	$\omega_0 = 1/\sqrt{LC} \qquad R_{LC} = \sqrt{L/C}$
Parallelschwingkreis	$Z = R + Z_{LC}$	$\frac{1}{Z_{LC}} = \frac{1}{Z_C} + \frac{1}{Z_L}$
<u>Wellen</u> Wellengleichung	$\partial_t^2\vec{f}-c^2\nabla^2\vec{f}=0$	$\vec{f}(\vec{r},t) = \vec{f}_0 \cdot g(\omega t - \vec{k}\vec{r})$ für $c = \frac{\omega}{k}$
harmonische Wellen	$\vec{f} = \vec{f}_0 \cdot e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}$	$\vec{f} = \vec{f}_0 \cdot \frac{1}{r} e^{i(\omega t - kr)}$
	$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$	$k = \frac{2\pi}{\lambda}$
Intensität	$I \sim f^2$	
Superposition	$\vec{f}_{ges} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2$	$\vec{I}_{ges} \neq \vec{I}_1 + \vec{I}_2$

#### **EM-Wellen**

Wellengleichung	$\partial_t^2\vec{E}-c^2\nabla^2\vec{E}=0$	$\partial_t^2  \vec{B} - c^2  \nabla^2  \vec{B} = 0$
Lichtgeschwindigkeit	$C = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$	$C' = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r}}$
Polarisierung (freie W.)	$\vec{k} \times \vec{E} = \omega  \vec{B}$	$\vec{k}\vec{E}=0\qquad \vec{k}\vec{B}=0$
Amplitude	$E_0 = c B_0$	
Poyntingvektor	$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$	$I = \left  \vec{S} \right  = c \cdot \epsilon_o \cdot E^2$
Zeitliches Mittel	$\langle I \rangle = \frac{1}{2} c \cdot \epsilon_o \cdot E^2$	
Energie-, Impulsdichte	$w = \frac{S}{c} = \epsilon_0 E^2 = \frac{1}{\mu_0} B^2$	$P/V = \frac{S}{c^2}$
Hertz'scher Dipol	$\vec{P}_R = \vec{P}(t - \frac{r}{c})$	$\vec{A}(\vec{r}_1,t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}_2,t-\frac{r_{12}}{c})}{r_{12}} dV_2$
Dipol-Fernfeld	$\vec{E}(\vec{r}_1,t) = \frac{(\ddot{\vec{P}}_R \times \vec{r}) \times \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 c^2 r^3}$	$\vec{B}(\vec{r}_1,t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{\ddot{P}_R \times \vec{r}}{r^2 c}$
Leistung Dipol	$\langle I \rangle \sim \sin^2 \theta$	$\langle P_{em}\rangle$ = $\frac{1}{12\pi\epsilon_0c^3}\omega^4P_0^2$
Beschleunigte Ladung	$P_{em}(t) = \frac{2}{3} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{a}{c^3}$	
Optik		
Stehende Welle	$I \sim E_0^2 \cdot \sin^2(\omega t) \cdot s$	$in^2(kx)$
Brechung	$\omega_1 = \omega_2$	$k_1 \cdot c_1 = k_2 \cdot c_2$
	$n_1 \cdot \sin \alpha_1 = n_2 \cdot \sin \alpha_1$	$\alpha_2 \qquad n(\omega) = \frac{c}{c'} \approx \sqrt{\epsilon_r}$
	$n(\omega) = 1 + \frac{q^2 N}{2\epsilon_0 m} \cdot \frac{1}{(\omega)}$	$\frac{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega/\tau}{\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2}$
Totalreflexion	$\frac{n_2}{n_1}\sin\alpha_2 > 1$	
Brewster-Winkel	$\tan \alpha_1 = \frac{n_2}{n_1}$	
Geschwindigkeiten	$c = c_{Ph} = \frac{\omega}{k}$	$c_g = \frac{\partial w}{\partial k} = \frac{c}{n + \omega \frac{\partial n}{\partial \omega}}$
Kohärenz	$\Delta t < \tau$	
konstruktive Interferenz	$\Delta = n_2 x_2 - n_1 x_2 =$	$m\cdot\lambda$
Interferenz ebene Platten	$c \cdot \Delta t = 2d\sqrt{n_2^2 - n}$	$\frac{1}{1}\sin^2\alpha$
Doppelspalt (eng)	$\langle I \rangle \sim \cos^2 \frac{\phi}{2}$	$\phi = 2\pi  \frac{d}{\lambda}  \sin \theta$
Einzelspalt	$\langle I \rangle \sim \left( \frac{\sin \beta/2}{\beta/2} \right)^2$	$\beta = 2\pi  \frac{a}{\lambda}  \sin \theta$
Gitter	$\left\langle I \right\rangle \sim \left( \frac{\sin(N\phi/2)}{\sin(\phi/2)} \right)^2 \left($	$\frac{\sin(\beta/2)}{\beta/2}\Big)^2$
Kreisblende	$\Theta_{min}$ = 1, 22 $\frac{\lambda}{D}$	
Dopplereffekt (long.)	$(c-v_e)T_E = (c-v_e)$	$_{s})T_{S}$
Dopplereffekt relativistisc	h $T_S = \gamma T'_S$	

# C Wellen

### C.1 Harmonische Wellen

Wellen beschreiben den Transport von Energie und Impuls in Raum und Zeit. Dieser Transport kann durch ein Medium, aber auch im Vakuum erfolgen. Ein Materialtransport über größere Entfernung ist dabei nicht notwendig.

Das einfachste Beispiel sind Seilwellen, die in einem gespannten Seil durch die Zugspannung benachbarter Bereiche aufeinander entstehen. Lenkt man ein so gespanntes Seil an einem Ende (bei x = 0) kurzzeitig aus, so breitet sich diese Störung mit einer festen Geschwindigkeit (v) zum anderen Ende des Seils hin aus. Bei einer vollkommen periodischen Anregung der Form (siehe harmonische Schwingung)

$$f(x=0,t) = f_o \cos(\omega t)$$

beobachtet man an einer anderen Stelle  $(x_1)$  des Seils eine Auslenkung der gleichen funktionalen Form,

$$f(x_1, t) = f_o \cos(\omega t - kx_1)$$

aber um den Winkel  $\Delta \varphi = k \cdot x_1$  phasenverschoben. Eine Momentaufnahme (Photographie) zur Zeit  $t_0$  zeigt die gleiche funktionale Form als Funktion von x,

$$f(x,t_0) = f_o \cos(\omega t_0 - kx)$$

Eine solche harmonische Welle ist also

$$f(x,t) = f_o \cos(\omega t - kx) \tag{C.1}$$

Die Auslenkung des Seils kann dabei senkrecht zur Hauptrichtung des Seils und zur Ausbreitungsrichtung der Welle sein (Transversalwelle), bei einem gespannten Seil (oder einer langen Spiralfeder) kann aber auch parallel zur Ausbreitungsrichtung eine Welle angeregt werden (Longitudinalwelle). In vielen Fällen kann man daher eine Welle durch einen Vektor charakterisieren,

$$\vec{f}(\vec{r},t) = \vec{f}_o \cos(\omega t - kx) \tag{C.2}$$

oder, für beliebige Ausbreitungsrichtungen (mit  $|\vec{k}| = k$ ) und für beliebige Phasenlagen  $\varphi_0$  bei  $t = 0, \vec{r} = 0$ ,

$$\vec{f}(\vec{r},t) = \vec{f}_o \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0)$$
(C.3)

Die Größen in dieser Wellenfunktion werden bezeichnet als

 $f_0$  der Polarisationsvektor mit der Amplitude  $|f_0|$ .

Die funktionale Form einer Welle ist gleich in Raum und Zeit.



#### **Abb. C.1** Welle als Funktion des Ortes zu zwei verschiedenen Zeiten



Abb. C.2 Welle als Funktion der Zeit an zwei verschiedenen Orten

 $\omega$  die Kreisfrequenz der Welle, die mit Periodendauer T und Frequenz  $\nu$ zusammenhängt,

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T} \tag{C.4}$$

 $\vec{k}$  der Wellenvektor, der die Ausbreitungsrichtung der Welle angibt und von der Wellenlänge  $\lambda$  abhängt ( $|\vec{k}|$  = Wellenzahl),

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{C.5}$$

Damit kann man die Welle auch schreiben als

$$\vec{f}(\vec{r},t) = \vec{f}_o \cos\left(2\pi \frac{t}{T} - 2\pi \frac{\vec{r}\vec{e}_k}{\lambda} + \varphi_0\right) \tag{C.6}$$

Bei einer Schwingung (z.B. einer Feder) ist die gespeicherte Energie proportional zum Quadrat der Amplitude,  $E_{pot} \sim \frac{1}{2}Dy^2$ , und  $E_{kin} \sim \frac{1}{2}m\dot{y}^2$ . Bei einer Welle kann man analog die Intensität oder Energiedichte definieren. Sie wird bei mechanischen Wellen wieder proportional zum Quadrat der Amplitude sein,

$$I \sim f^2 \tag{C.7}$$

### C.2 Beispiele für Wellen

Voraussetzung für die Ausbreitung von Wellen ist eine Wechselwirkung räumlich benachbarter Bereiche. Ursache dafür kann ein Medium wie das Seil sein, aber es gibt auch Wellen im Vakuum.

- Schallwellen in Gasen und Flüssigkeiten entstehen durch den Stoß benachbarter Atome/Moleküle aneinander. Der Transport von Impuls ist verantwortlich für die Ausbreitungsrichtung, so dass Schallwellen in Gasen und Flüssigkeiten longitudinal polarisiert sind.
- Schallwellen in Festkörpern (und Erdbebenwellen) können sowohl longitudinal als auch transversal polarisiert sein, denn durch die Bindung zu benachbarten Atomen breiten sich Auslenkungen auch senkrecht zur Auslenkungsrichtung aus (Beispiel schwingender Stab).
- Oberflächenwellen entstehen z.B. bei Erdbeben, wenn eine Longitudinal- oder Transversalwelle an die Oberfläche gelangt und sich dort eine senkrecht (und daher transversal) polarisierte Welle parallel zur Oberfläche weiter fortpflanzt.

Wasserwellen sind eine besondere Form der Oberflächenwellen, bei der die Bewegung der einzelnen Wasserteilchen nahe der Oberfläche allerdings kompliziertere Formen annimmt.

- Elektromagnetische Wellen sind Schwingungen der  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$ Felder, die sich gegenseitig beeinflussen und so weiter fortpflanzen. EM-Wellen gibt es auch im Vakuum. Sie sind Transversalwellen (siehe aber die Diskussion beim Hertz'schen Dipol).
- Gravitationswellen werden durch die Allgemeine Relativitätstheorie vorhergesagt, sind aber noch nicht experimentell nachgewiesen worden. Sie entsprechen der Ausbreitung der Verzerrungen der Raum-Zeit durch die Gravitation und sollten sich mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten.

# C.3 Wellengleichung und Form der Lösungen

Die in Gleichung C.3 angegebenen harmonischen Wellen  $\vec{f}(\vec{r},t)$  sind Lösungen der Wellengleichung

$$\partial_t^2 \vec{f} - v^2 \,\nabla^2 \vec{f} = 0 \tag{C.8}$$

oder kur<br/>z $\Box f$ = 0. Das lässt sich besonders aufschlussreich zeigen, wenn man die Abkürzungen <br/>  $g=\cos$  und

d'Alembert Operator 
$$\Box$$

$$\varphi(\vec{r},t) = \omega t - \vec{k}\vec{r} \tag{C.9}$$

einführt,

$$\vec{f}(\vec{r},t) = \vec{f}_0 \cdot g(\varphi) \tag{C.10}$$

Nach Kettenregel ist dann wegen  $\partial_t \varphi = \omega, \; \partial_x \varphi = -k_x$ 

$$\partial_t \vec{f} = \vec{f}_0 \cdot g'(\varphi) \cdot \partial_t \varphi = \omega \vec{f}_0 \cdot g'(\varphi) \partial_t^2 \vec{f} = \omega^2 \vec{f}_0 \cdot g''(\varphi) \partial_x \vec{f} = -k_x \vec{f}_0 \cdot g'(\varphi) \partial_x^2 \vec{f} = +k_x^2 \vec{f}_0 \cdot g'(\varphi) \nabla^2 \vec{f} = k^2 \vec{f}_0 \cdot g''(\varphi)$$
(C.11)

Damit ist dann auch

$$\partial_t^2 \vec{f} - v^2 \nabla^2 \vec{f} = (\omega^2 - v^2 k^2) \, \vec{f}_0 \, g''(\varphi) = 0 \tag{C.12}$$

für alle

$$v = \frac{\omega}{k} \tag{C.13}$$

Dies gilt unabhängig von der speziellen Funktion  $g(\varphi)$ . Damit ist ausser  $g = \cos$  auch jede beliebige andere Funktion  $g(\varphi)$  oder  $\vec{f}(\varphi)$ eine Lösung dieser Wellengleichung, wenn sie mehrfach differenzierbar ist.  $\varphi$  darf allerdings die Variablen  $\vec{r}$  und t ausschließlich in der angegebenen Form  $\varphi = \omega t - \vec{k}\vec{r}$  beinhalten. Damit ist z.B. auch die komplexe Darstellung

$$\vec{f}(\vec{r},t) = \vec{f}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0)}$$
(C.14)

eine Lösung der Wellengleichung. Der Realteil hiervon ist natürlich gerade wieder die Lösung aus Gl. C.3.

## C.4 Ebene Wellen und Kugelwellen

Alle Lösungen der Form von Gl. C.10 beschreiben (für  $\vec{k} = const.$ ) ebene Wellen, bei denen die Wellenfronten gleicher Phase  $\varphi = \omega t - \vec{k}\vec{r}$ Ebenen sind, die senkrecht zur Ausbreitungsrichtung  $\vec{k}$  stehen. Dies ist offensichtlich, da z.B. der Gradient von jeder der Komponenten von  $\vec{f}$  parallel zu  $\vec{k}$  ist,

$$\nabla f_x(\vec{r},t) = -i\vec{k}f_x(\vec{r},t)$$

Punkte gleicher Phase (also z.B. das Maximum der cos-Funktion) erfüllen

$$\omega t_1 - \vec{k}\vec{r}_1 = \omega t_2 - \vec{k}\vec{r}_2$$

so dass die Geschwindigkeit v, mit der sich Punkte konstanter Phase bewegen, gegeben ist durch  $\vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$ . Damit ist  $\omega = \vec{k} \vec{v}$  und die Welle breitet sich in  $\vec{k}$  Richtung aus. Die Phasengeschwindigkeit einer Welle ist damit gegeben durch

$$v = \frac{\omega}{k} \tag{C.15}$$

Für eine transversal polarisierte Welle ist  $\vec{f}_0 \cdot \vec{k} = 0$ , für eine longitudinal polarisierte Welle ist  $\vec{f}_0 \times \vec{k} = 0$ .

Im Gegensatz dazu ist eine Kugelwelle von der Form

$$f(\vec{r},t) = f_0 \frac{e^{i(\omega t - k r + \varphi_0)}}{r}$$
(C.16)

Dies ist ebenfalls eine Lösung der Wellengleichung C.8. Sie hängt nur vom Betrag  $|\vec{r}|$  und der Wellenzahl k ab, hat also Wellenfronten, die kugelförmig um den Nullpunkt liegen. Aus Gründen der Energieerhaltung nimmt die Amplitude mit dem Radius ab, denn der Energiefluss durch eine Kugelfläche mit Radius  $r_1$  um den Nullpunkt ist proportional zu  $\pi r_1^2 \cdot I(r_1) = \pi r_1^2 \cdot f^2(r_1)$ . Damit dies auch für andere Radien gilt, muss  $f \sim 1/r$  sein.

### C.5 Linearität und Superposition

Bei einem physikalischen Pendel wird normalerweise die potentielle Energie für kleine Winkelauslenkungen  $\alpha$  um die Ruhelage in einer

Polarisation



Abb. C.4 Wellenfronten konstanter Phasen bei einer Kugelwelle.





Phasengeschwindigkeit

Abb. C.3

Taylor-Reihe entwickelt,  $E_{pot} = mgh = mgl(1 - \cos\alpha) \approx \frac{1}{2}mgl\alpha^2$ , so dass aus  $E_{kin} = \frac{1}{2}D(l\dot{\alpha})^2$  und  $\partial_t(E_{pot} + E_{kin}) = 0$  eine lineare Differenzialgleichung folgt,

$$\Rightarrow \ddot{\alpha} + \omega^2 \alpha = 0$$

Auch bei einem Federpendel ist das Hook'sche Gesetz eine lineare Näherung.

Ähnliches gilt bei der Ableitung der Wellengleichung C.8 für die meisten physikalischen Systeme. In der ersten Näherung kleiner Auslenkungen um eine Ruhelage ergibt sich immer eine lineare Wellengleichung der Form C.8. Sind daher  $\vec{f}_1(\omega_1 t - \vec{k}_1 \vec{r})$  und  $\vec{f}_2(\omega_2 t - \vec{k}_2 \vec{r})$ Lösungen der Wellengleichung, so ist auch die Summe

$$\vec{f}_{ges} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2$$

eine Lösung. Hierbei spielt es keine Rolle, in welchem Verhältnis  $\omega_1$  und  $\omega_2$  oder  $\vec{k}_1$  und  $\vec{k}_2$  zueinander stehen. Auch die funktionale Form von  $\vec{f}_1$  und  $\vec{f}_2$  kann unterschiedlich sein. Dieses Superpositionsprinzip ist die Grundlage für die Erklärung zahlreicher Phänomene wie Brechung, Beugung, Interferenz, etc. Insbesondere folgt:

- Die Wellen  $\vec{f}_1$  und  $\vec{f}_2$  durchdringen sich, ohne miteinander zu wechselwirken und sich zu stören. Man kann daher die Ausbreitung jeder Teilwelle separat analysieren und dann addieren.
- Wellen mit beliebigem funktionalen Verlauf können mit einer Fourier-Zerlegung in einzelne harmonische Wellen  $\tilde{f}(\vec{k},t)$  zerlegt werden, die sich unabhängig voneinander ausbreiten und deren Amplituden man anschließend wieder addieren kann.
- Ebene Wellen kann man als eine Summe von Kugelwellen beschreiben.
- Die Amplituden der Wellen addieren sich, aber nicht die Intensitäten. Denn (bis auf Vorfaktoren) ist

$$I_{ges} = \vec{f}_{ges}^2 = \vec{f}_1^2 + \vec{f}_2^2 + 2\vec{f}_1\vec{f}_2 = I_1^2 + I_2^2 + 2\vec{f}_1\vec{f}_2 \qquad (C.17)$$

Den letzten Ausdruck nennt man Interferenzterm. Er ist die Ursache dafür, dass sich Wellen auch gegenseitig auslöschen können.

Alle diese Effekte spielen eine große Rolle z.B. in der Optik.

#### Superpositionsprinzip



Abb. C.5 Interferenz zweier Kugelwellen.

# D Differentialgleichungen

Im Folgenden werden einfache Differentialgleichungen besprochen, wie sie in der Mechanik oder in elektrischen Schaltkreisen vorkommen. In beiden Fällen wandeln sich verschiedene Energieformen ineinander um, so dass eine Schwingung entsteht.

### D.1 Herleitung der harmonischen Schwingung

Wir betrachten ein Pendel der Masse m und der Fadenlänge l, dessen Auslenkungswinkel  $\varphi(t) = x(t)/l$  ist. Zunächst vernachlässigen wir Reibung und betrachten den Fall ohne äußere Anregungskräfte. Die kinetische Energie ist

$$E_{kin}(t) = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$
(D.1)

und die potentielle Energie

$$E_{pot}(t) = mgh(t) = mgl \cdot (1 - \cos\frac{x}{l})$$
 (D.2)

**Harmonische Näherung** Diese potentielle Energie kann nahe der Ruhelage genähert werden.<sup>21</sup> Im Fall des Pendels liefert die Taylor-Entwicklung  $\cos \frac{x}{l} \approx 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{l}\right)^2$ , so dass

$$E_{pot}(t) \approx \frac{1}{2}m \frac{g}{l} x^2 = \frac{1}{2}m \omega_0^2 x^2$$
 (D.4)

mit der Eigenfrequenz (Kreisfrequenz)  $\omega_0=\sqrt{g/l}.$  Die Gesamtenergie

$$E_{tot} = E_{kin}(t) + E_{pot}(t) \tag{D.5}$$

muss zeitlich konstant sein. Ableiten nach der Zeit liefert daher

$$\partial_t E_{tot} = 0 = \partial_t E_{kin} + \partial_t E_{pot} \tag{D.6}$$

$$= m\dot{x}\ddot{x} + m\omega_0^2 x\dot{x} = m\dot{x}\cdot\left(\ddot{x}+\omega_0^2 x\right) \qquad (D.7)$$

$$E_{pot}(x) = E_{pot}(x_0) + \partial_x E_{pot}(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2} \partial_x^2 E_{pot}(x_0) \cdot (x - x_0)^2 + \dots$$
  

$$\approx E_{pot}(x_0) + \frac{1}{2} \partial_x^2 E_{pot}(x_0) \cdot (x - x_0)^2$$
(D.3)

Aus diesem Grund sind harmonische Schwingungen von überragender Bedeutung.



Abb. D.1

Näherung des Potentials des Pendels durch ein quadratisches Potential.

<sup>&</sup>lt;sup>21</sup> Tatsächlich ist nahe der Ruhelage jedes Potential näherungsweise parabelförmig, denn in der Ruhelage  $x_0$  muss ja gerade ein Minimum der potentiellen Energie vorliegen,  $\partial_x E_{pot}(x_0) = 0$ . Eine Taylorentwicklung liefert daher

Der Ausdruck in der Klammer muss offenbar zu jeder Zeit Null sein,

$$\left| \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \right| \tag{D.8}$$

Die Näherung durch ein quadratisches Potential führt offenbar immer zu einer linearen (in x) Differentialgleichung zweiter Ordnung (zweite Ableitung) mit reellem Koeffizienten  $\omega_0$ . Bewegungsgleichung für eine harmonische Schwingung

# D.2 Lösung für eine freie harmonische Schwingung

Eine Bewegungsgleichung für x = x(t) der Form

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{D.9}$$

gilt für eine harmonische Schwingung ohne Reibung und ohne äußere Kräfte. Die allgemeine Lösung hierfür lautet

$$x(t) = x_0 \cdot \sin(\omega_0 t + \phi_0) \tag{D.10}$$

Für eine solchen Differentialgleichung 2. Ordnung braucht man 2 "Integrationskonstanten", diese sind in diesem Fall die Amplitude  $x_0$ und die Anfangsphase  $\phi_0$ . Man zeigt dies, indem man die zweifache Ableitung bildet,

$$\dot{x} = \omega_0 x_0 \cdot \cos(\omega_0 t + \phi_0) \tag{D.11}$$

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x_0 \cdot \sin(\omega_0 t + \phi_0) = -\omega_0^2 x$$
 (D.12)

und in die Bewegungsgleichung einsetzt,

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\omega_0^2 x + \omega_0^2 x = 0$$
 (D.13)

Setzt man diese Lösung in die Formeln für die kinetische und potentielle Energie ein, so erhält man

$$E_{kin}(t) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \phi_0)$$
(D.14)

$$E_{pot}(t) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \phi_0) \qquad (D.15)$$

Da  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  ist, folgt, dass die Gesamtenergie erhalten ist,

$$E_{tot} = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x_0^2$$
 (D.16)

Die beiden Konstanten  $x_0$  und  $\phi_0$  müssen aus den Anfangsbedingungen bestimmt werden.

**Bsp.:** Sei  $\phi_0 = 0$ . Dann ist zum Zeitpunkt t = 0

$$x(0) = 0, \qquad \dot{x}(0) = \omega_0 x_0, \qquad \ddot{x}(0) = 0$$
 (D.17)

$$E_{kin}(0) = \frac{1}{2}m\,\omega_0^2\,x_0^2, \qquad E_{pot}(0) = 0$$
 (D.18)



Abb. D.2 Schwingung mit Anfangsgeschwindigkeit.



Abb. D.3

Summe einer sin und cos Funktion mit unterschiedlicher Amplitude **Bsp.:** Zum Zeitpunkt t = 0 sei die Auslenkung  $x(0) = \frac{1}{2}x_0$  und die Anfangsgeschwindigkeit  $\dot{x}(0) = v_0$ . Dann ist zum Zeitpunkt t = 0

$$\phi_0 = \arcsin \frac{1}{2} = 30^0$$
 (D.19)

$$\dot{x}(0) = v_0 = \omega_0 x_0 \cos(30^\circ), \qquad x_0 = \frac{v_0}{\omega_0 \cos(30^\circ)} \quad (D.20)$$

### Alternative reelle Lösung

Anstelle der Lösung aus Gl. D.10 kann man auch eine Summe verwenden,

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega_0 t) + B \cdot \cos(\omega_0 t)$$
(D.21)

verwenden.<sup>22</sup> Diese Lösung ist völlig gleichwertig mit Gl. D.10 für

$$A = x_0 \cos(\phi_0), \qquad B = x_0 \sin(\phi_0)$$
 (D.22)

Dies ergibt sich aus den Additionstheoremen für sin und cos Funktionen.<sup>23</sup> Insbesondere für die Anfangsbedingungen ist einfach B = x(0) und  $A = v(0)/\omega_0$ .

#### Komplexe Lösung

Anstelle der Lösung aus Gl. D.10 kann man auch

$$x_c(t) = x_0 \cdot e^{i(\omega_0 t + \phi_c)}$$
(D.28)

verwenden mit reellem  $x_0, \omega_0$  und  $\phi_0$ . Die Ableitungen sind dann

$$\dot{x}_c = i\omega_0 x_c, \qquad \ddot{x}_c = -\omega_0^2 x_c \tag{D.29}$$

 $^{23}$ Man kann komplexe Schreibweisen effektiv benutzen, um Additionstheoreme wie

$$x_0 \sin(\omega_0 t + \phi_0) = A \sin \omega_0 t + B \cos \omega_0 t \tag{D.23}$$

für reelle  $x_0, A, B$  zu beweisen. Da  $\cos \omega_0 t = Re(e^{i\omega_0 t})$  und  $\sin \omega_0 t = Re(-ie^{i\omega_0 t})$  ist dies gleichbedeutend mit

$$Re(-ix_0 e^{i(\omega_0 t + \phi_0)}) = Re(-iA e^{i\omega_0 t} + B e^{i\omega_0 t})$$
(D.24)

Dies ist erfüllt für

$$-i x_0 e^{i(\omega_0 t + \phi_0)} = -i A e^{i\omega_0 t} + B e^{i\omega_0 t}$$
(D.25)

$$x_0 e^{i\omega_0 t} e^{i\phi_0} = (A+iB) e^{i\omega_0 t}$$
(D.26)

Für den Realteil bzw. Imaginärteil von  $x_0 e^{i\phi_0}$  muss also gelten

$$A = x_0 \cos \phi_0, \qquad B = x_0 \sin \phi_0 \tag{D.27}$$

 $<sup>^{22}\</sup>mathrm{Da}$  die Differentialgleichung linear in xist, ist jeder Summand einzeln bereits eine Lösung.

Für reelle  $\omega_0$  ist dies offenbar auch eine Lösung der Schwingungsgleichung. Physikalisch interpretiert werden kann der Realteil

$$x(t) = Re(x_c) = x_0 \cos(\omega_0 t + \phi_c) \quad \text{mit} \quad \phi_c = \phi_0 - \frac{\pi}{2} \quad (D.30)$$

oder der Imaginärteil

$$x(t) = Im(x_c) = x_0 \sin(\omega_0 t + \phi_c) \quad \text{mit} \quad \phi_c = \phi_0 \tag{D.31}$$

Beide Lösungen sind also äquivalent.

### Allgemeines Lösungsverfahren

Um die allgemeine Lösung für homogene lineare Differentialgleichungen mit reellen Koeffizienten zu erhalten, wählt man als Ansatz

$$x_a(t) = c \cdot e^{\lambda t} \tag{D.32}$$

Hier ist c eine willkürliche Konstante. Wegen

$$\dot{x}_a = \lambda x_a, \qquad \ddot{x}_a = \lambda^2 x_a$$
 (D.33)

folgt bei Einsetzen in die Bewegungsgleichung  $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ ,

$$\lambda^2 x_a + \omega_0^2 x_a = 0 \tag{D.34}$$

aus dem 'charakteristischen Polynom'

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_{1,2} = \pm i \,\omega_0 \tag{D.35}$$

dass es zwei Lösungen für  $\lambda$  gibt. Die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung ist dann ein Linearkombination der beiden möglichen Lösungen

$$x_c(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$
(D.36)

in diesem Fall also

$$x_c(t) = C_1 e^{i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t}$$
(D.37)

mit im allgemeinen komplexen Zahlen  $C_1, C_2$ . Der Realteil von  $x_c$  (oder der Imaginärteil) kann als Lösung interpretiert werden. Tatsächlich ist

$$Re(x_{c}) = Re(C_{1} e^{i\omega_{0}t} + C_{2} e^{-i\omega_{0}t})$$
(D.38)  
$$= Re(C_{1} + C_{2}) \cos \omega_{0}t - Im(C_{1} - C_{2}) \sin \omega_{0}t$$
(D.39)

Dies ist wieder gleichbedeutend mit Gl. D.21 für

$$A = -Im(C_1 - C_2), \qquad B = Re(C_1 + C_2)$$
 (D.40)



**Abb. D.4** Schwache Dämpfung. Die schwarze Kurve entspricht der



Abb. D.5 Aperiodischer Grenzfall.



Abb. D.6 Starke Dämpfung.

# D.3 Gedämpfte harmonische Schwingung

Für eine Schwingung mit Reibung gibt es in der Bewegungsgleichung einen weiteren geschwindigkeitsabhängigen Term,

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{D.41}$$

Als Ansatz für die Lösung wird verwendet

$$x_a(t) = C \cdot e^{\lambda t} \tag{D.42}$$

Die Ableitungen lauten

$$\dot{x}_a = \lambda x_a, \qquad \ddot{x}_a = \lambda^2 x_a \tag{D.43}$$

Einsetzen in die Bewegungsgleichung ergibt

$$(\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2)x_a = 0 \tag{D.44}$$

Da  $x_a(t)$  nicht immer Null sein wird, muss das charakteristische Polynom Null sein,

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0 \tag{D.45}$$

Für  $\gamma = 0$  folgt  $\lambda = i\omega_0$  und damit die Lösung von Gl. D.37. Allgemein ergibt sich aber

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = -\gamma \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = -\gamma \pm i\omega \qquad (D.46)$$

 $\operatorname{mit}$ 

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \tag{D.47}$$

Damit ist die allgemeine komplexe Lösung für eine gedämpfte harmonische Schwingung ohne äußere Anregung

$$x_{h,c}(t) = C_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 t}$$
(D.48)

oder

$$x_{h,c}(t) = e^{-\gamma t} \left( C_1 \cdot e^{i\omega t} + C_2 \cdot e^{-i\omega t} \right)$$
(D.49)

Wieder kann der Realteil oder der Imaginärteil von  $x_h(t)$  als physikalische Lösung interpretiert werden, also z.B.

$$x_h = Re(x_{h,c}) = e^{-\gamma t} \left(A \cdot \sin \omega t + B \cdot \cos \omega t\right)$$
(D.50)

Bei kleiner Reibung ist  $\gamma < \omega_0$  und daher  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$  eine reelle Größe. Damit beschreibt der Term  $e^{i\omega t}$  eine Schwingung und  $x_h(t)$  eine gedämpfte Schwingung, deren Amplitude  $x_0 e^{-\gamma t}$  exponentiell abnimmt.

Im Gegensatz dazu liegt für große Reibung  $\gamma > \omega_0$  keine Schwingung mehr vor, sondern  $x_h(t)$  ist eine rein exponentiell abfallende Funktion. Der Fall  $\gamma = \omega_0$  wird aperiodischer Grenzfall genannt.

## D.4 Gedämpfter harmonischer Oszillator mit äußerer Anregung

Wird ein harmonischer Oszillator von außen periodisch angeregt, so gilt

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = a \cdot \cos \omega t \tag{D.51}$$

Hier ist *a* (reell) die maximale Beschleunigung durch die äußere Kraft und es wurde angenommen, dass die Anregung zur Zeit t = 0 maximal ist. Die Anregungsfrequenz  $\omega_a$  soll beliebig sein, in der Regel also weder die Eigenfrequenz  $\omega_0$  der freien ungedämpften Schwingung, noch die Frequenz  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$  der freien gedämpften Schwingung.

Da die Gleichung homogen ist und reelle Koefizienten hat, ist es wieder einfacher, die komplexe Erweiterung dieser Gleichung

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = a \cdot e^{i\omega_a t} \tag{D.52}$$

zu lösen und anschließend wieder den Realteil als physikalische Lösung zu interpretieren.

Die allgemeine Lösung dieser Schwingungsgleichung ist die Summe aus der allgemeinen Lösung  $x_h$  des freien Oszillators und einer speziellen Lösung für die äußere Anregung (also den inhomogenen Teil der Differentialgleichung),

$$x(t) = x_{h,c}(t) + x_{inh}(t)$$
 (D.53)

 $\operatorname{mit}$ 

$$x_{h,c}(t) = C_h \cdot e^{\lambda t}, \qquad x_{inh}(t) = x_{0,c} \cdot e^{i\omega_a t}$$
(D.54)

Damit ist

$$\dot{x} = \lambda \cdot x_{h,c} + i \cdot \omega_a \cdot x_{inh} \tag{D.55}$$

$$\ddot{x} = \lambda^2 \cdot x_{h,c} - \omega_a^2 \cdot x_{inh} \tag{D.56}$$

Einsetzen in die Schwingungsgleichung ergibt

$$\underbrace{\left(\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2\right)x_{h,c}(t)}_{-0} + \left(-\omega_a^2 + 2i\gamma\omega_a + \omega_0^2\right)x_{inh}(t) = a \cdot e^{i\omega_a t} (D.57)$$

Da die Frequenz von  $x_{h,c}$  die Eigenfrequenz  $\omega$  ist und diese unabhängig von der Anregungsfrequenz  $\omega_a$  ist, folgt, dass der erste Summand links gleich Null sein muss und unabhängig davon der Rest ebenfalls Null sein muss.

Der erste Summand links ist Null, wenn  $\lambda$  die Gl. D.46 erfüllt. Der  $x_{h,c}(t)$  Anteil der Lösung fällt exponentiell mit der Zeit, d.h. nach einer Zeit  $t \gg 1/\gamma$  bleibt nur der  $x_a(t)$  Anteil. Dann ist auch die Abhängigkeit von den Anfangbedingungen verschwunden.

Damit der Rest für alle Zeiten Null ist, muss gelten

$$\left(-\omega_a^2 + 2i\gamma\omega_a + \omega_0^2\right) \cdot x_{0,c} = a \tag{D.58}$$

#### Einschwingvorgang

125

Daraus folgt

$$x_{0,c} = \frac{a}{\omega_0^2 - \omega_a^2 + 2i\gamma\omega_a} = a \cdot \frac{\omega_0^2 - \omega_a^2 - 2i\gamma\omega_a}{(\omega_0^2 - \omega_a^2)^2 + (2\gamma\omega_a)^2}$$
(D.59)

und

$$x_{c}(t) = x_{h,c}(t) + |x_{0,c}| \cdot e^{i(\omega_{a}t + \phi_{inh})}$$
(D.60)

 $\begin{array}{c} 3\\ 2\\ 1\\ 0\\ -1\\ -2\\ -3 \end{array}$ 

 $\operatorname{mit}$ 

$$|x_{0,c}| = \frac{a}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_a^2)^2 + 4\gamma^2 \,\omega_a^2}} \tag{D.61}$$

$$\tan \phi_{inh} = \frac{Im(x_{0,c})}{Re(x_{0,c})} = -\frac{2\gamma\omega_a}{\omega_0^2 - \omega_a^2} \tag{D.62}$$

Nach dem Einschwingvorgang ist die Amplitude  $|x_{0,c}|$  proportional zur Anregung *a* und wird maximal, wenn die Anregungsfrequenz  $\omega_a$ nahe der Eigenfrequenz  $\omega_0$  der freien Schwingung liegt. Die Dämpfung  $\gamma$  beschränkt in diesem Bereich die maximale Amplitude.



Schwingung periodischer