

Spontane Symmetriebrechung

Arthur Huber

Department Physik
Universität Hamburg

- Symmetrien
- Motivation
- Spontane Symmetriebrechung
- Coleman-Theorem
- Beispiele zur spontanen Symmetriebrechung
- Goldstone Modell
- Higgs Mechanismus am Beispiel einer lokalen $U(1)$ -Symmetrie (Higgs Mechanismus im Standardmodell siehe Vorlesung)

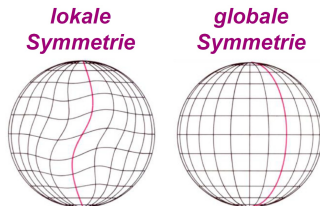
Wir betrachten Symmetrieoperationen, die die Lagrangedichte unverändert lassen, d.h. $\mathcal{L} = \mathcal{L}'$

Zunächst muss man zwei grundlegende Arten von Symmetrien unterscheiden:

- Diskrete Symmetrien: Die Symmetrieoperation vermittelt zwischen diskreten Zuständen. Bsp.: Ladungskonjugation, Parität, Zeitumkehr
- Kontinuierliche Symmetrien: Es existiert ein Kontinuum von symmetrischen Zuständen, die durch eine Symmetrieoperation mit einem kontinuierlichen Parameter verbunden sind. Bsp.: Drehungen, Globale Phasentransformation, usw.

Ausserdem werden wir unterscheiden, ob eine globale oder eine lokale Symmetrie vorliegt.

Ersteres wird zum Goldstone-Theorem führen, zweiteres zum Higgs-Mechanismus.



Aus der Natur sind, abgesehen von zahlreichen exakten Symmetrien, auch explizit gebrochene Symmetrien bekannt.

So sind zum Beispiel die

- Ladungskonjugation (C)
- die Paritätssymmetrie (P)
- ihre Kombination (CP)

gebrochen.

In der schwachen Wechselwirkung verletzen Massenterme für die Eichbosonen und die Fermionen, wenn sie einfach per Hand eingefügt werden, die Eichinvarianz.

Der Mechanismus der spontanen Symmetriebrechung ist sehr hilfreich bei verschiedenen Problemen.

Eine mögliche Lösung dieses Problems bietet der Higgs-Mechanismus, welcher auf dem Prinzip der spontanen Symmetriebrechung beruht und am Ende diskutiert wird.

Definition (spontane Symmetriebrechung)

Sei $\mathcal{L}$ invariant unter U^α , $\forall \alpha$ (U^α Symmetrietransformation und α ein diskreter Index.)

Eine Symmetrie U^α heißt spontan gebrochen, falls U^α den Grundzustand nicht invariant lässt

$$:\Leftrightarrow \langle \Omega | U_{ij}^\alpha \phi_j | \Omega \rangle = U_{ij}^\alpha \langle \phi_j \rangle_\Omega \neq 0$$

- In einem quantenmechanischen System bedeutet das, dass der Vakuum Erwartungswert des Grundzustands weniger Symmetrien aufweist als die Bewegungsgleichungen des Systems.
- Es handelt sich also um Symmetrien, die im Grundzustand des Systems nicht direkt auftreten.

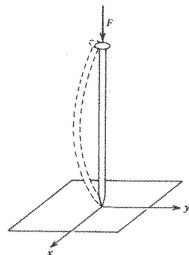
einfaches Beispiel

Ein dünner Stab mit einer kreisförmigen Grundfläche auf einer Ebene. Entlang der Länge üben wir eine Kraft aus.

- Übersteigt die Kraft ($\cong$ Potential) einen kritischen Wert, so wird sich der Stab in eine Richtung biegen, die zufällig bestimmt ist.
- Der neue Grundzustand des Systems ist unsymmetrisch, da eine Ebene ausgezeichnet ist.
- Alle anderen Grundzustände wären gleichberechtigt (Entartung), diese Grundzustände sind durch Rotationssymmetrie verknüpft.

Die essentiellen Punkte in diesem Beispiel sind die folgenden

- 1 Ein Parameter übersteigt einen kritischen Wert.
- 2 Die ursprünglich symmetrische Konfiguration wird instabil.
- 3 Der neue Grundzustand ist entartet.



Die Nicht-Invarianz des Grundzustands als eine Symmetribruch-Bedingung kann in dem Coleman-Theorem zusammengefasst werden

Theorem (Coleman-Theorem)

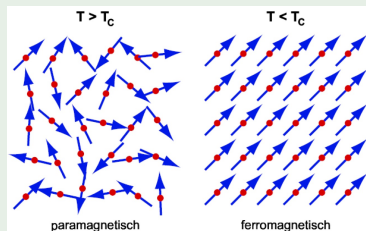
Gegeben sei ein quantenmechanisches System mit einer Lagrangedichte $\mathcal{L}$ und einem Zustand minimaler Energie, dem Vakuumzustand.

Wirkt eine definierte Symmetrietransformation U auf die Lagrangedichte $\mathcal{L}$ oder auf den Vakuumzustand, treten folgende Fälle auf:

- ① *Vakuumzustand und $\mathcal{L}$ sind invariant $\Rightarrow$ exakte Symmetrie*
- ② *Vakuumzustand ist nicht invariant und ...*
 - *$\mathcal{L}$ ist nicht invariant $\Rightarrow$ explizite Symmetriebrechung*
 - *$\mathcal{L}$ ist invariant $\Rightarrow$ spontane Symmetriebrechung*

Beispiel (Spontane Symmetriebrechung beim Ferromagneten)

- Ein Ferromagnet stellt ein System dar, in dem keine Richtung ausgezeichnet ist und die Rotationssymmetrie aufweist.
- Die Spins der Atome sind statistisch angeordnet und zeigen in verschiedene Richtungen.
- Unterhalb der Curie-Temperatur T_C ordnen sich die Spins parallel oder antiparallel an, so entsteht eine spontane Magnetisierung und es bildet sich eine Vorzugsrichtung aus.



Beispiel (Spontane Symmetriebrechung beim Ferromagneten)

In der Landau-Theorie fuer Phasenübergänge hat die Freie Energie des Ferromagneten folgende Form

$$F = F_0 + am^2 + bm^4$$

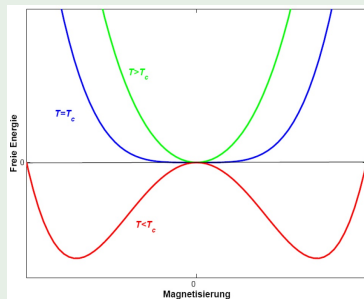
mit der Magnetisierung m und $a, b \in \mathbb{R}$.

- Das Minimum der Freien Energie ist gegeben durch $m_0 = 0$.
- In einen Parameterbereich, in dem a negativ und b positiv ist, erhält man die beiden Möglichkeiten $m_0 = \pm \sqrt{-a/2b}$.

Spontane Symmetriebrechung beim Ferromagneten

Beispiel (Spontane Symmetriebrechung beim Ferromagneten)

- Der Grundzustand befindet sich im Minimum der Freien Energie F , doch in diesem Parameterbereich gibt es zwei mögliche Grundzustände und das System muss sich für einen entscheiden.
- Damit ist die ursprüngliche Symmetrie spontan gebrochen.



- Die ursprüngliche Rotationssymmetrie (3-dim.) des Ferromagneten wurde gebrochen zu einer Drehsymmetrie (2-dim.) um die Magnetisierungsrichtung.

Beispiel (gebrochene Symmetrie)

Ein einfaches Beispiel ist das eines Skalarfeldes ϕ mit einem Potential, typischerweise dem Ginzburg-Landau-Potential aus der Theorie der Supraleitung mit $\lambda > 0$ (Beschränkung der Energie nach unten).

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \underbrace{\left(\frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{1}{2}\lambda\phi^4\right)}_{V(\phi)}$$

Diese Lagrangedichte ist invariant unter der (globalen) Transformation

$$P: \phi \rightarrow -\phi$$

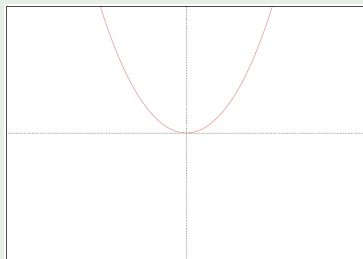
Der Grundzustand $\langle \phi_0 \rangle$ ist der Zustand der die Energie minimiert.

$$E = \int d^3x \left[\frac{1}{2}(\partial_0 \phi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_i \phi)^2 + V(\phi) \right]$$

Beispiel (gebrochene Symmetrie)

1. Fall $\mu^2 > 0$

Hier ist der Grundzustand $\langle \phi_0 \rangle = 0$ und bleibt es auch unter der Symmetrieoperation P. Die Symmetrie ist erhalten.



Beispiel (gebrochene Symmetrie)

2. Fall $\mu^2 < 0$

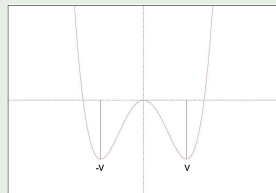
Das Minimum ergibt sich aus den Bedingungen $\partial_x E = 0$ und $\partial_x^2 V > 0$, man erhält zwei entartete Grundzustände

$$\langle \phi_0 \rangle = \pm \sqrt{-\mu^2/\lambda} =: \pm v$$

Welcher der Zustände als Grundzustand gewählt wird, hat keine Auswirkung auf die Physik (Entartung).

- Das System ist aber nicht mehr invariant, denn

$$\langle P\phi_0 \rangle = -\langle \phi_0 \rangle \neq \langle \phi_0 \rangle$$



Beispiel (gebrochene Symmetrie)

Nun wird ein verschobenes Feld $\phi' := \phi - v$ definiert und die Lagrangedichte durch dieses Feld, d.h. durch die Abweichung ausgedrückt

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi' + v)(\partial^\mu \phi' + v) - V(\phi' + v) = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi')(\partial^\mu \phi') - |\mu|^2 \phi'^2 + \lambda \phi'^3 v - \\ &\quad \frac{\lambda}{4} \phi'^4 + \text{konst.} = \frac{1}{2}[(\partial_\mu \phi')(\partial^\mu \phi') - 2|\mu|^2 \phi'^2] + \text{konst.} + O(\phi^3)\end{aligned}$$

- Tayler entwicklung bis hin zur zweiten Ordnung ergibt sich die Lagrangedichte eines massiven Skalarfeldes mit Masse $m^2 = 2|\mu|^2 > 0$
- Die Masse kann demnach man als eine Art Rückstellkraft des Potentials interpretieren.
- Bei völlig analogem Vorgehen im Falle von kontinuierlichen globalen Symmetrien werden allerdings nicht alle Felder massiv, sondern es treten auch masselose Felder auf: die **Goldstone-Felder**!

Am Beispiel der globalen U(1)-Symmetrie soll das nun untersucht werden.

Betrachten wir hierfür die folgende Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_2)^2 - \frac{1}{2}\mu^2(\phi_1^2 + \phi_2^2) - \frac{1}{4}\lambda(\phi_1^2 + \phi_2^2)^2$$

mit zwei reellen Skalarfeldern ϕ_1 und ϕ_2

Zunächst kann die Lagrangedichte in folgende (äquivalente) Form gebracht werden

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi^*) - \mu^2 \phi \phi^* - \lambda(\phi \phi^*)^2$$

mit zwei unabhängigen komplexen Skalarfeldern

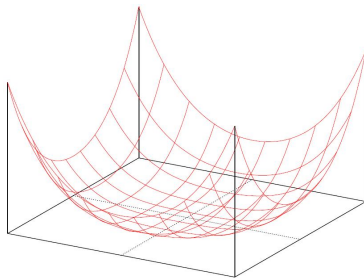
$$\phi = (\phi_1 + i\phi_2) \text{ und } \phi^* = (\phi_1 - i\phi_2)$$

Die Symmetrietransformation $\phi \rightarrow \exp(i\alpha)\phi$ wird nun untersucht.

1. Fall $\lambda > 0$ und $\mu^2 > 0$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi^*) - \mu^2 \phi \phi^* - \lambda(\phi \phi^*)^2$$

- Offensichtlich ist $\mathcal{L}$ invariant unter einer globalen Symmetrietransformation $U = \exp(i\alpha)$.
- Durch Ableiten nach den Feldern ϕ und ϕ^* ergibt sich das Minimum des Potentials und damit den Grundzustand des Systems, den Vakuumzustand $\phi_0 = 0$.
- Dieser ist ebenfalls invariant unter der oben angegebenen Symmetrietransformation.
- Die Symmetrie ist also exakt.

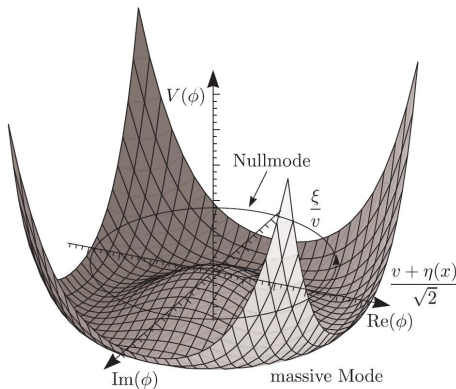


Goldstone Modell

1. Fall $\lambda > 0$ und $\mu^2 < 0$

Wie man der Abbildung entnehmen kann besitzt das Potential $V(\phi)$ ein Kreis von Minima in der ϕ_1, ϕ_2 Ebene mit dem Radius v , sodass gilt

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 = v^2 \text{ mit } v = -\mu^2/\lambda$$



Nun wird $\mathcal{L}$ um das Vakuumfeld $\phi_0 = \sqrt{1/2}v$ parameterisiert mit reellen Feldern η und ξ .

$$\phi(x) = \sqrt{1/2}[v + \eta(x) + i\xi(x)]$$

Damit erhält man die neue Lagrangedichte

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{2}(\partial_\mu \eta)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \xi)^2 + \frac{\mu^4}{4\lambda^2} - \mu^2 \eta^2 - \mu \lambda \eta \xi^2 - \frac{\lambda^2}{2} \eta^2 \xi^2 - \mu \lambda \eta^3 - \frac{\lambda^2}{4} \eta^4 - \frac{\lambda^2}{4} \xi^4$$

- In dieser Form sieht man einen Massenterm mit dem erwarteten, physikalisch sinnvollen Vorzeichen.
- Anstelle des ursprünglichen Felder treten zwei Felder η und ξ auf. Beide Felder haben einen kinetischen Term und einige Wechselwirkungs- und Selbstwechselwirkungsterme.
- Der konstante Term hat keinerlei physikalische Bedeutung und kann weggelassen werden.
- Das Feld η hat die Masse μ und entspricht dem ursprünglichen Feld. Das Feld ξ ist masselos, taucht hier neu auf und wird Goldstone-Boson genannt.

Theorem (Goldstone Theorem)

Wird eine **kontinuierliche** und **globale** Symmetrie spontan gebrochen, so tritt in der effektiven Theorie ein masseloses pseudoskalar Teilchen auf.

Das zugehörige Teilchen heißt (Nambu-)Goldstone-Boson

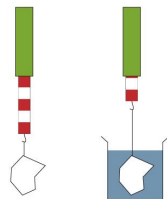
Higgs Mechanismus (lokale kontinuierliche Symmetrie)

- Eine der wichtigsten Eigenschaften, die Elementarteilchen besitzen, ist Masse.
- Die Frage ist jedoch, wie Teilchen zu ihrer Masse kommen. Diese Frage hat Prof. Higgs beantwortet. Er führte dazu ein Feld ein, das sogenannte Higgs-Feld, das im ganzen Raum herrscht.
- Teilchen, die sich in diesem Feld aufhalten, erhalten Masse. Die WW des Higgs-Feldes wird durch das sogenannte Higgs-Boson vermittelt.
- Durch seine Kopplung an alle Teilchen verschafft das Higgs-Boson ihnen Masse.

Das Gewicht

eines Körpers nimmt im Wasser durch die noch oben gerichtete Auftriebskraft ab.

- Was wir an Gewicht messen, hängt also von der Umgebung an.
- Ähnlich wie beim Higgs-Mechanismus hängt die gemessene Masse der Teilchen von ihrer Umgebung (dem Higgs-Feld) ab.



- Bisher wurden globale Symmetrien betrachtet, während jetzt die Effekte in Theorien mit lokaler Eichinvarianz und spontaner Symmetriebrechung betrachtet werden.
- Diese Kombination führt zu einer Ausnahme im Goldstone-Theorem, so dass die Goldstone-Teilchen wieder absorbiert werden können.

Theorem (Higgs Mechanismus)

Wird eine Eichsymmetrie spontan gebrochen, so tritt das zugehörige (Nambu-)Goldstone-Boson physikalisch nicht in Erscheinung.

Das Eichfeld wird massiv und absorbiert den entsprechenden Freiheitsgrad.

Beispiel (Higgs Mechanismus am Beispiel lokaler U(1) Symmetrie)

Die Effekte in Theorien mit **lokaler** Eichinvarianz und spontaner Symmetriebrechung werden anhand eines Beispiels von einer lokaler U(1) Symmetrie diskutiert.

Zunächst müssen wir unsere Lagrangedichte invariant unter lokaler Eichinvarianz

$$\phi \rightarrow \exp(iq\alpha(x))\phi \quad q \cong \text{Ladung}$$

machen, dazu ersetzen wir ∂_μ durch die kovariante Ableitung (sorgt für die Kopplung zwischen dem geladenem Higgs Teilchen und dem Em. Feld)

$$D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu$$

wobei die Felder sich wie folgt transformieren

$$A_\mu \rightarrow A_\mu - \partial_\mu \alpha(x)$$

Beispiel (Higgs Mechanismus am Beispiel lokaler U(1) Symmetrie)

Unsere Lagrangedichte liest sich nun wie folgt

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}((\partial_\mu + iqA^\mu)\phi)^*((\partial^\mu + iqA^\mu)\phi) - \mu^2\phi\phi^* - \lambda(\phi\phi^*)^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

Für $\mu^2 > 0$ ist dies die Theorie für ein skalares Teilchen mit Masse μ und einem selbstww. Potential $V(\phi)$

Um Massen mit Hilfe der spontanen Symmetriebrechung zu generieren betrachten wir hier wieder den Fall $\mu^2 < 0$.

Auswertung von $\mathcal{L}$ um $\phi = \sqrt{1/2}(v + \eta(x) + i\xi(x))$ das sich in der Nähe des Vakuum Erwartungswerts (Grundzustand) v befindet mit reellen Feldern η und ξ .

Dies führt auf

$$\mathcal{L}' = [\frac{1}{2}(\partial_\mu\eta)^2 - \mu^2\eta^2] + [\frac{1}{2}(\partial_\mu\xi)^2] + \frac{1}{2}q^2v^2A_\mu A^\mu + qvA_\mu\partial^\mu\xi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + WW.$$

Beispiel (Higgs Mechanismus am Beispiel lokaler U(1) Symmetrie)

Es ist sinnvoll alle Terme mit A_μ und ξ zusammen zu fassen

$$\frac{1}{2}(\partial_\mu \xi)^2 + \frac{1}{2}q^2 v^2 A_\mu A^\mu + qv A_\mu \partial^\mu \xi = \frac{1}{2}q^2 v^2 (A_\mu + 1/qv(\partial_\mu \xi))(A^\mu + 1/qv(\partial^\mu \xi))$$

Nun können wir die Eichinvarianz nutzen in dem wir das Eichfeld folgendermassen wählen $\alpha = -\frac{1}{qv}\xi$

Damit erhält man

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \left(\frac{1}{qv} \xi \right)$$

und

$$\phi \rightarrow \exp \left(-\frac{iq}{qv} \xi \right) \phi \approx \frac{1}{\sqrt{2}} (v + \eta(x))$$

Damit erhält man wiederum durch einsetzen von A'_μ und ϕ' in $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L}' = \left[\frac{1}{2}(\partial_\mu \eta)^2 - \mu^2 \eta^2 \right] + \frac{1}{2}q^2 v^2 A'_\mu A'^\mu + qv A'_\mu \partial^\mu \xi - \frac{1}{4}F'_{\mu\nu} F'^{\mu\nu} + \dots$$

Beispiel (Higgs Mechanismus am Beispiel lokaler U(1) Symmetrie)

Was wurde damit gewonnen?

$$\mathcal{L}' = [\tfrac{1}{2}(\partial_\mu \eta)^2 - \mu^2 \eta^2] + \tfrac{1}{2}q^2 v^2 A'_\mu A'^\mu + qv A'_\mu \partial^\mu \xi - \tfrac{1}{4}F'_{\mu\nu} F'^{\mu\nu} + \dots$$

- Das masselose ξ -Feld und der Term $A_\mu \partial^\mu \xi$ sind durch die Eichtransformation verschwunden
- Ein wichtiges Resultat ist das die Lagrangedichte ein elektromagnetisches Feld mit Masse $M=qv$ beschreibt
- Die Masse des Feldes ist durch den Vakuumserwartungswert des Higgs-Feldes bestimmt und darüber hinaus bleibt das massive η -Feld erhalten

Beispiel (Higgs Mechanismus am Beispiel lokaler U(1) Symmetrie)

Was hat uns diese Diskussion gebracht?

- Diese Diskussion besitzt nur Modellcharakter da es offensichtlich kein geladenes Higgs-Feld mit einem von Null verschiedenen Vakuum-Erwartungswert gibt.
- Grundidee kann auf komplexere Systeme abgewandelt werden
- Der oben vorgestellte Higgs-Mechanismus liefert, angewandt auf die elektroschwache Theorie, die Massen der W- und Z-Bosonen.
- Da die Ladungssymmetrie exakt ist, koppelt das Higgs-Boson nicht an das Photon und somit bleibt dieses masselos.

Interessant ist die Betrachtung des Higgs-Mechanismus insbesondere im Modell der elektroschwachen Wechselwirkung von Glashow-Weinberg-Salam (siehe Vorlesung) mit der Eichgruppe $SU(2) \times U(1)$.

Hierbei ist die Untergruppe $U(1)$ ungebrochen während drei Generatoren der $SU(2)$ verletzt sind.

Auf diese Weise entstehen

- 1 ein massives Skalarfeld, das Higgsboson
- 2 ein masseloses Skalarfeld, das Photon des Elektromagnetismus
- 3 drei massive Vektorbosonen $W^\pm$ und Z^0 .

Das Higgs-Boson ist bisher nicht beobachtet worden

Prinzip der spontanen Symmetriebrechung:

spontane

Symmetriebrechung globaler Symmetrie:

↪ *masselose (Nambu–) Goldstone – Bosonen*



spontane

Symmetriebrechung einer lokalen Symmetrie:

↪ *massive Eichfelder*



Vielen Dank für eure Aufmerksamkeit!