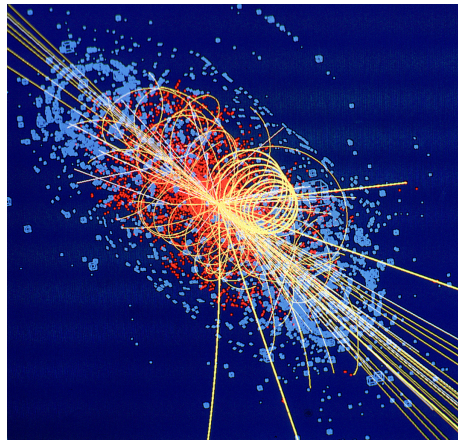


Teilchenphysik für Fortgeschrittene

Notizen zur Vorlesung im Wintersemester 2010-11

Peter Schleper

Institut für Experimentalphysik, Universität Hamburg
peter.schleper@physik.uni-hamburg.de
<http://www.desy.de/~schleper/lehre/>



4. März 2011

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	6
2	Relativistische Quantenmechanik	11
2.1	Eichtheorie	11
2.2	Einheiten	13
2.3	Relativistische Kinematik	14
2.4	Schrödinger-Gleichung	17
2.5	Klein-Gordon-Gleichung	17
2.6	Dirac Gleichung	18
2.7	Lagrange-Formalismus	19
2.7.1	Für klassische Teilchen	19
2.7.2	Für die Klein-Gordon Gleichung	20
2.7.3	Für die Dirac- Gleichung	20
2.8	Globale Symmetrien und Noether- Theorem	22
3	Eigenschaften der Dirac-Gleichung	24
3.1	Lösungen der Dirac Gleichung	24
3.2	Spin und Helizität	25
3.3	Chiralität	26
3.4	C,P,T	27
3.5	Dimensionen der Felder und Bilinearformen	28
4	Quanten-Elektrodynamik	31
4.1	Lokale Eichinvarianz	31
4.2	Vektorfelder	33
4.2.1	Masse und kinetische Energie	33
4.2.2	Spin und Polarisaton	34
4.3	Maxwell- Gleichungen	36
4.4	Feynman- Diagramme	38
4.4.1	Helizitätsamplituden	38
4.4.2	Störungsrechnung	40
4.4.3	Propagator für Fermionen	42
4.4.4	Propagator für das Photon	43
4.4.5	Propagator für Spin-0 und Spin-1 Teilchen	44
4.4.6	Matrizelement	44
4.4.7	Feynman-Regeln	46
4.5	Wirkungsquerschnitt und Matrizelemente	49
4.5.1	Fermi's Goldene Regel I	49
4.5.2	Zustandsdichte	50
4.5.3	Teilchenfluss der einlaufenden Teilchen	50

4.5.4	Matrixelement	51
4.5.5	Fermi's Goldene Regel II	52
4.5.6	Integration des Phasenraums	52
4.5.7	Wirkungsquerschnitt im CMS	54
4.6	Prozesse der QED	55
4.6.1	Berechnung des Prozesses $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$	55
4.6.2	Crossing	57
4.6.3	Übersicht der elementaren QED-Prozesse	61
4.6.4	Erzeugung von Hadronen	62
4.6.5	Drell-Yan Prozess	65
5	Starke Wechselwirkung	67
5.1	Quarks und Gluonen	67
5.2	Nicht-Abelsche Eichtheorie	70
5.2.1	Übersicht zu Eichtheorien	70
5.2.2	Lagrange-Dichte der QCD	71
5.2.3	Ableitung	74
5.3	QCD in der e^+e^- Vernichtung	77
5.4	Streuprozesse mit Hadronen	80
5.4.1	Tief-inelastische Streuung	81
5.5	Faktorisierung	82
5.6	Messung der Parton-Dichteverteilungen	84
5.7	Perturbative QCD in der Quark und Gluon Streuung	86
6	Schwache Wechselwirkung	89
6.1	Historie der Schwachen Wechselwirkung	89
6.2	Paritätsverletzung und V-A Theorie	90
6.3	P und C: Parität und Ladungskonjugation	91
6.4	Fermi-Konstante und W-Propagator	92
6.5	Schwache Wechselwirkung von Hadronen	93
6.6	SU(2) Symmetrie	95
6.7	Zerfälle als Test von Erhaltungssätzen	97
6.7.1	Zerfälle durch Starke WW	97
6.7.2	Zerfälle durch Elektromagnetische WW	98
6.7.3	Schwache Zerfälle: Muon	99
6.7.4	Schwache Zerfälle: Pion	101
6.8	Mischung von Quarks und Leptonen	104
7	Elektro-schwache Wechselwirkung	106
7.1	Eichtheorie der elektro-schwachen Wechselwirkung	106
7.1.1	Massen der Fermionen	106

7.1.2	$\mathbf{SU(2)_L}$ und schwacher Isospin	107
7.1.3	$\mathbf{U(1)_Y}$ und Hyperladung	110
7.1.4	$\mathbf{SU(2)_L} \times \mathbf{U(1)_Y}$	111
7.1.5	Wechselwirkung von W Bosonen mit Fermionen	113
7.1.6	Mischung von Photon und $\mathbf{Z^0}$	114
7.1.7	Elektromagnetismus	114
7.1.8	Wechselwirkungen des $\mathbf{Z^0}$ mit Fermionen	115
7.1.9	Spontane Symmetrie-Brechung	117
7.1.10	Der Higgs- Mechanismus im Standard-Modell	117
7.1.11	Fermion-Higgs Kopplung und Fermion-Massen	123
8	Lagrange-Dichte des Standard-Modells	125
A	Anhang	126
A.1	Normierung der Dirac-Spinoren	126
A.2	Teilchen und Antiteilchen in der Dirac-Gleichung	127
A.3	Mandelstam - Variablen	128
A.4	Luminosität	129
A.5	Phasenraum	131
A.6	Nicht-Abelsche Eichtheorie	132
A.7	Die kovariante Ableitung für Nicht-Abel'sche Eichtheorien	137
A.8	Ergänzungen zum Propagator	138
A.9	Yukawa Potential und Reichweite der Kräfte	139
A.10	Drehimpuls und Rotation	141
B	Nützliche Formeln	145

Literatur

Empfehlungen zur Teilchenphysik

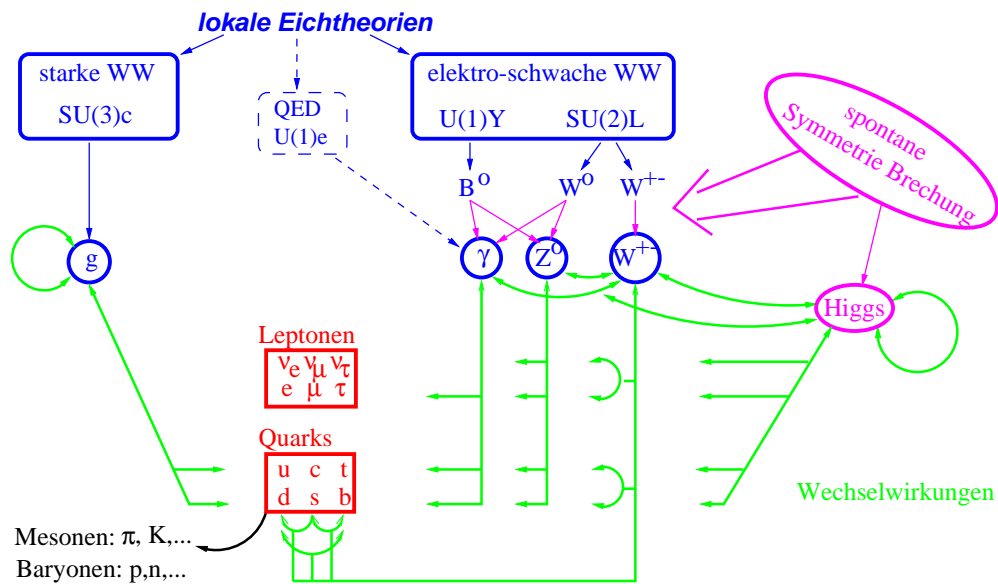
- **E. Lohrmann: Hochenergiephysik**
(Teubner, Neuauflage 2005)
experimentell, gut, ausführlich, aktuell
- **Ch. Berger: Elementarteilchen**
(Springer 2001)
experimentell, gut, ausführlich, aktuell
- **Martin, Shaw: Elementary Particle Physics**
(Wiley)
englisch, relativ einfache experimentelle Einführung, aktuell, knapp
- **D. Griffith: Introduction to Elementary Particle Physics**
englisch, theoretische Ergänzung, sehr beliebt da vieles explizit gerechnet wird.
- **Halzen, Martin: Quarks and Leptons**
(Wiley)
englisch, theoretische Ergänzung, kurz und gut

Sonstige

- **G. Musiol, et.al.: Kern und Elementarteilchenphysik**
(Verlag Harry Deutsch)
sehr ausführlich, nicht sehr aktuell G (Oldenbourg Verlag)
- **Frauenfelder, Henley: Teilchen und Kernphysik**
Standard-Werk, etwas veraltet
- **A. Das, T. Ferbel: Kern und Teilchenphysik**
(Spektrum Lehrbuch)
relativ einfache Einführung, nicht aktuell

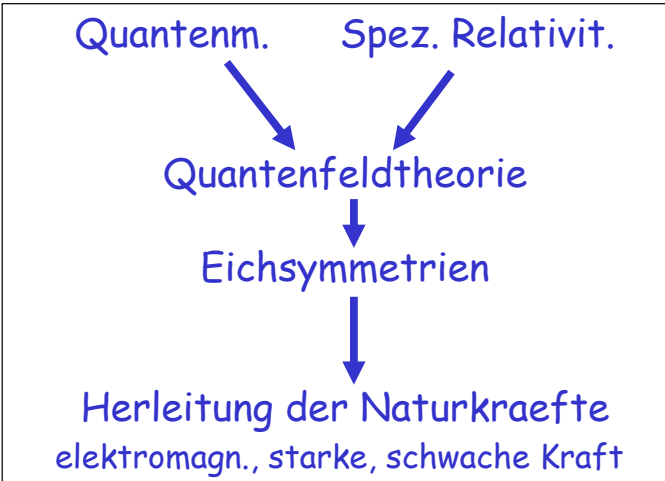
1 Einleitung

Das Standard Modell



- 19 Teilchen
- 26 freie Naturkonstanten
- Ist das ALLES ? Dunkle Materie und dunkle Energie ?
Physik jenseits des Standard-Modells
- Bauprinzip ? Vereinfachungen ? Vereinheitlichungen ?
Neue Symmetrien: Supersymmetrie, Grand Unified Theories

Eich-Theorie



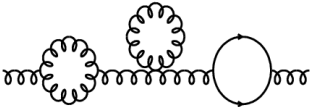
Quantentheorie:
Teilchen folgen Wellengleichungen
Nur Betrag der Wellen ist beobachtbar:
Phase der Welle ist beliebig:

$$\star \rightarrow \star e^{i\phi}$$

laesst Experiment unveraendert
Symmetrie der Natur:

- Erhaltung der Elektr. Ladung
- γ, Z, W, g haben Spin 1
- Form der Kraefte
- Alle Teilchen in kompletten Generationen
- Vorhersage Charm, Top, Neutrinos
- Es muss ein Higgs Teilchen geben
- Higgs wechselwirkt mit Masse
- Quantenkorreturen
- Selbstwechselwirkung von Z, W, g, H

Theorem: Nur Eichtheorien liefern physikalisch sinnvolle Resultate

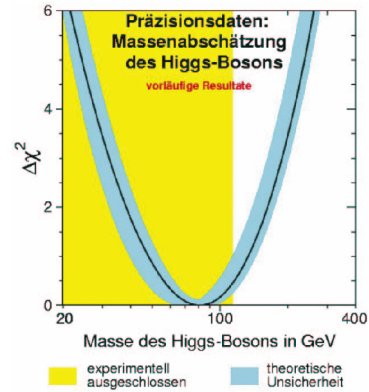
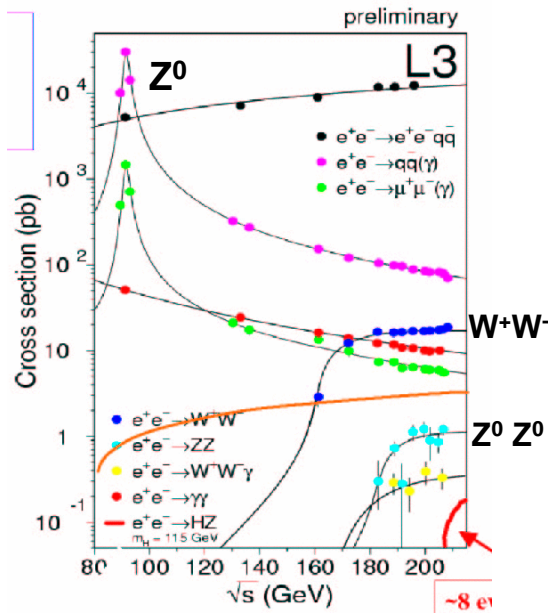


Das Standard-Modell mit Higgs

LEP: $e^+e^- \rightarrow \dots$

Praezisionstest der Teilchenphysik

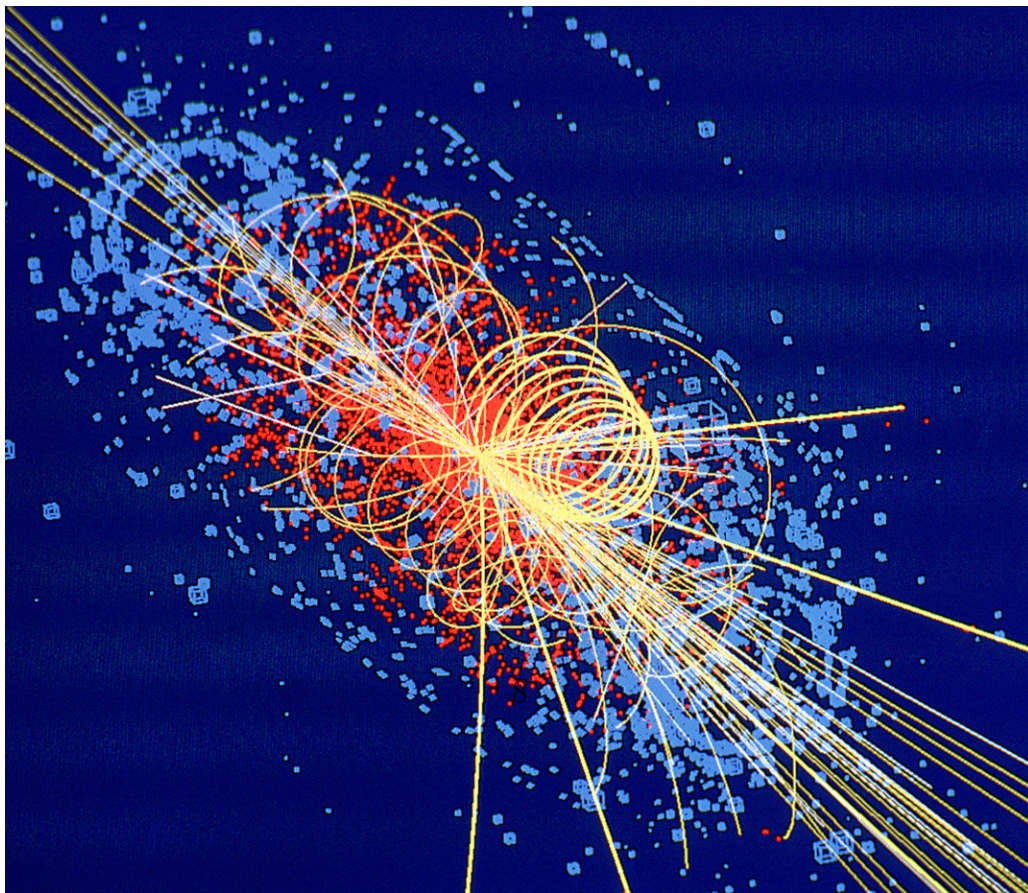
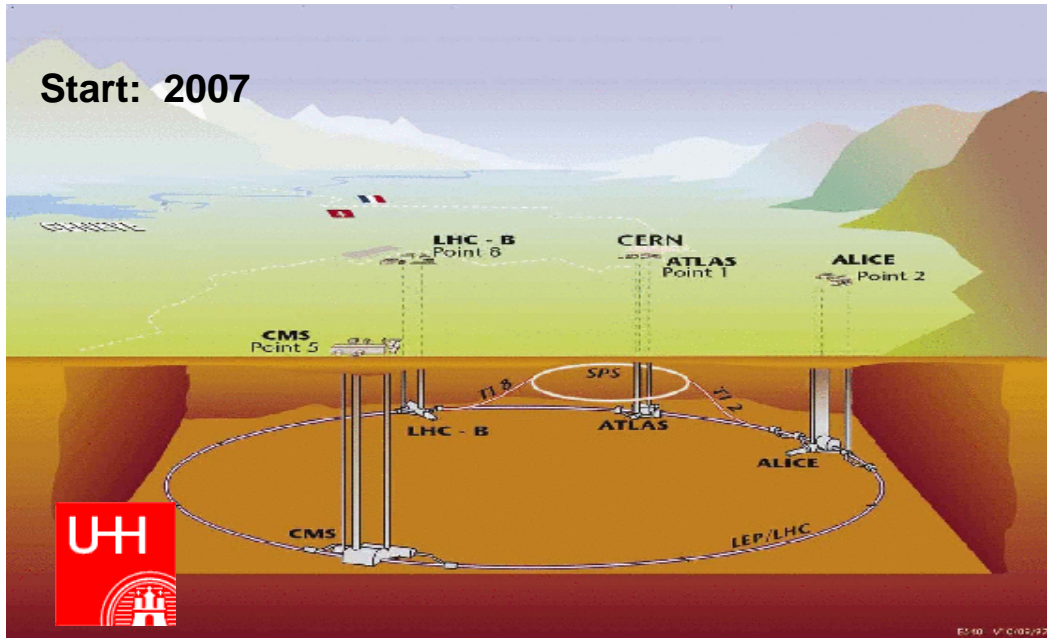
Alle Experimente stimmen mit dem
 Standard Modell ueberein !!
 ...falls das Higgs existiert und
 $M_H < 160 \text{ GeV}$



Sonst: Widerspruch
 Alternativen ????

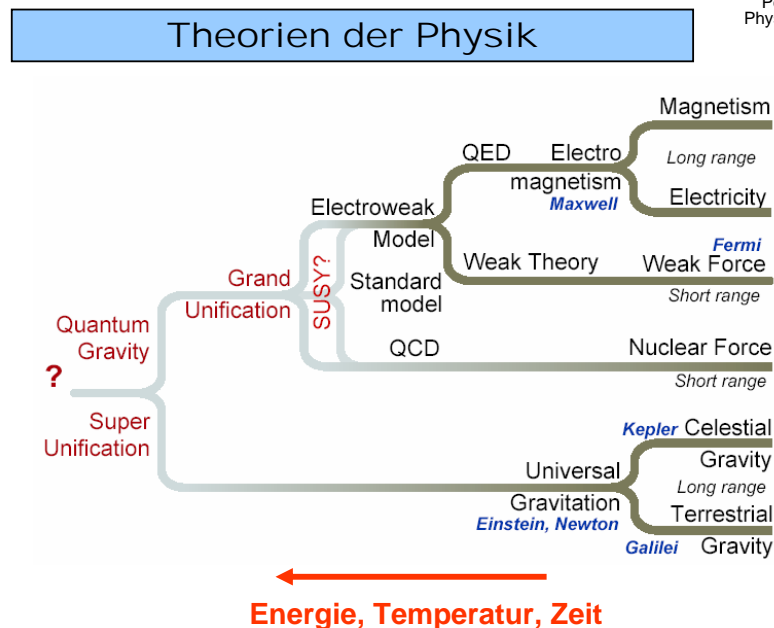
LHC: der Large Hadron Collider

CERN: Europaeisches Zentrum fuer Teilchenphysik in Genf
Proton-Proton Kollisionen bei 14000 GeV
Faktor 1000 mehr Kollisionen als bisher



Forderungen an eine fundamentale Theorie der Naturgesetze

	<u>SM</u>
Wenige Grundannahmen Kausalität, Realität, Quantentheorie, Raum-Zeit	✓
Konsistente Beschreibung aller Naturphänomene durch wenige Naturkonstanten, Teilchen und ihre WW 27 freie Parameter, $e, \mu, \tau, \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau, u, d, s, c, t, b, W^\pm, Z, \gamma, h, g$, dunkle Materie	nein
Vorhersagekraft ν_τ, t, W, Z	✓
gültig in allen Prozessen $ep \rightarrow e\mu X + p_t^?$? unklar	?
gültig bei allen Energien: Extrapolierbarkeit $\Lambda \gtrsim 1TeV \Rightarrow M_{\text{Higgs}} \rightarrow \infty$ Hierarchieproblem $\Lambda \geq 10^{19}GeV \Rightarrow$ Quanten-Gravitation	nein
Erklärung warum die Natur so ist, wie sie ist	nein
⇒ Das Standard Modell ist nicht die <i>TOE</i> (Theory of Everything)	



2 Relativistische Quantenmechanik

2.1 Eichtheorie

- Klassische Mechanik: Lagrange- Funktion $L(q, p)$ ist Funktion der Koordinaten und Impulse
⇒ aus Euler-Lagrange-Gleichungen folgen Bewegungsgleichungen.
- Quanten-Mechanik: ersetze Koordinaten und Impulse durch Operatoren
- klassische Feldtheorie: Lagrange-Funktion wird zur Lagrange-Dichte $\mathcal{L}(A)$, also Funktion der Felder $A(x)$
- Quantenfeld-Theorie (QFT): ersetze Felder durch Operatoren

Quantenelektrodynamik (QED)

- Maxwell 1864: klassischer Elektromagnetismus
⇒ Vorhersage freier Felder
- QM: quantisierte Teilchen: e, p
- Feynman u.a.: quantisierte Felder: γ
Theoretisch: Eichtheorie basierend auf der Gruppe $U(1)$,
Experimentell: hervorragend bestätigt.

Schwache und Starke Wechselwirkung (QCD)

- Theoretisch: Verallgemeinerung der QED, lokale Eichtheorien basierend auf den Eichgruppen $SU(2)$ und $SU(3)$
Experimentell: hervorragend bestätigt.

Weitere Wechselwirkungen ?

- QED = Prototyp für alle Wechselwirkungen !?
lokale Eichtheorien als fundamentales Konstruktionsprinzip

Eichtheorie

Für Symmetrie-Operationen, die die Form der physikalischen Gesetze unverändert lassen, folgen:

⇒ Einschränkungen für die Form der physikalischen Gesetze

⇒ Erhaltungssätze für Ladungen, Ströme

⇒ Dynamik (Kräfte), d.h. Existenz der Feldquanten, Form der WW

Benutze Symmetrien als Konstruktionsprinzip für Naturgesetze:

- äußere Symmetrien:
Raum-Zeit Translation, Rotation, Invarianz unter Lorentz-Transformationen
⇒ Gesetze enthalten nur Lorentz-invariante Größen
⇒ Gesetze sind vertäglich mit spezieller Relativitätstheorie
- innere Symmetrien:
 1. Eichtransformationen der Potentiale der E-Dynamik
 2. Phasen-Invarianz der Quantenmechanik
- lokale Symmetrien:
lokale Eichtheorien ⇒ Naturkräfte
spontane Symmetrie-Brechung ⇒: Higgs-Mechanismus, Erklärung für Masse aller Teilchen !?

2.2 Einheiten

Wir sind interessiert an relativistischer Quantenmechanik. Daher verwenden wir als natürliches Einheitensystem eine Schreibweise, bei der

$$c = 1, \quad \hbar = 1$$

gestzt wird, so dass alle Faktoren c und \hbar vermieden werden können. Damit haben Zeit und Länge die gleiche Dimension (m). Ebenso haben Energie, Impuls und Masse die Dimension einer Energie (GeV). Außerdem schreibt sich die Unschärferelation z.B. als

$$\Delta t \cdot \Delta E \geq 1.$$

Dies macht viele Formeln viel übersichtlicher. Für die Berechnung experimenteller Ergebnisse muß von diesem natürlichen Einheitensystem in SI Einheiten (m, kg, s) umgerechnet werden. Dies ist immer möglich durch einfache Dimensionsbetrachtungen:

$$c \approx 30 \frac{cm}{ns}$$

$$\hbar \approx 6,5822 \cdot 10^{-22} MeV s$$

$$\hbar c \approx 197 MeV fm$$

Größe	Natürliche Einheit	Umrechnung	SI-Einheit	Bemerkung
Energie E	MeV (GeV, TeV)		MeV (GeV, TeV)	z.B. LHC: $E_{CMS} = 14 TeV$
Impuls p	MeV	$\cdot \frac{1}{c}$	$\frac{MeV}{c}$	
Masse M	MeV	$\cdot \frac{1}{c^2}$	$\frac{MeV}{c^2}$	$E = mc^2!$
Zeit t	MeV^{-1}	$\cdot \hbar$	s	$\Delta E \cdot \Delta t \gtrsim \hbar$ $1 MeV^{-1} = 6,5 \cdot 10^{-22} s$
Länge	MeV^{-1}	$\cdot \hbar c$	m	$1 MeV^{-1} = 200 fm$ $1 GeV^{-1} = 0,2 fm$
Geschwind. β	1	$\cdot c$	$\frac{m}{s}$	$\beta = \frac{v}{c} \leq 1$
Drehimpuls \vec{L}	1	$\cdot \hbar$	Js	

2.3 Relativistische Kinematik

Die spezielle Relativitätstheorie basiert auf der Forderung, dass alle Inertialsysteme S gleichberechtigt sind. Daraus folgt:

- Die Naturgesetze (Maxwell-Gl., ...) haben in allen Inertialsystemen die gleiche Form.
- Die Naturkonstanten (c , \hbar , ...) haben in allen Inertialsystemen die gleichen Zahlenwerte.

Hieraus folgen ebenso Zeitdilatation und Längenkontraktion sowie die Formeln für die Lorentz-Transformationen. Da Ort- und Zeit- Koordinaten gleichermaßen transformiert werden müssen ist die einfachste Notation die der Vierervektoren im Minkowski-Raum:

Kontravarianter Vierervektor:

$$x^\mu = (ct, x, y, z) = (ct, \vec{x}).$$

Die Zeit wird hier mit der Lichtgeschwindigkeit c multipliziert, damit aller Komponenten des Vierervektors die Dimension einer Länge haben. In natürlichen Einheiten wird $c = 1$ gesetzt, also:

$$x^\mu = (t, x, y, z) = (t, \vec{x}),$$

wobei $\mu = 0, 1, 2, 3$ so dass die 0-Komponente die Zeit ist, $x^0 = t$. Im Folgenden werden griechische Indizes (μ, ν, \dots) verwendet um Komponenten von Vierervektoren zu bezeichnen. Aus der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit folgt, dass Skalarprodukte (Abstände) von Vierervektoren invariant sind. Mit dem "kovarianten" Vierervektor

$$x_\mu = (t, -x, -y, -z).$$

ist das Skalarprodukt zweier Vierervektoren definiert als

$$x^\mu x_\mu = x_\mu x^\mu = t^2 - x^2 - y^2 - z^2.$$

Hierbei wird also als Summenkonvention über gleiche, unten und oben stehende Indizes summiert. Kontravariante und kovariante 4-er Vektoren lassen sich durch den metrischen Tensor $g^{\mu\nu}$ ineinander umrechnen:

$$x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu$$

mit

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

In einem anderen Inertialsystem S' mit Koordinaten x'^μ gilt:

$$x^\mu x_\mu = x'^\mu x'_\mu$$

Ebenso gilt für beliebige andere Vierervektoren

$$a^\mu = (t_a, x_a, y_a, z_a), \quad b^\mu = (t_b, x_b, y_b, z_b)$$

, dass

$$a^\mu b_\mu = t_a t_b - x_a x_b - y_a y_b - z_a z_b = t'_a t'_b - x'_a x'_b - y'_a y'_b - z'_a z'_b = a'^\mu b'_\mu$$

Lorentztransformation erlauben die Umrechnung von allen 4-er Vektoren zwischen verschiedenen Inertialsystemen. Aus Sicht eines Systems S' , das sich mit Geschwindigkeit $\beta_s = v_s/c < 1$ und

$$\gamma_s = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_s^2}}$$

in x-Richtung bewegt, gilt (wenn der Ursprung von S und S' zur Zeit $t = 0, t' = 0$ übereinander liegt):

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_s & -\gamma_s \beta_s & 0 & 0 \\ -\gamma_s \beta_s & \gamma_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_s t - \gamma_s \beta_s x \\ \gamma_s x - \gamma_s \beta_s t \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (1)$$

also

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$$

4-er Impulsvektor:

Analog zu Zeit und Ort werden Energie und Impuls eines Teilchens zu einem 4-er Vektor zusammengefasst:

$$p^\mu = (E, p_x, p_y, p_z)$$

wobei die Norm des 4-er Impulsvektors die (Ruhe-) Masse m ist.

$$p^\mu p_\mu = E^2 - \vec{p}^2 = m^2.$$

(Setzt man c explizit ein entspricht dies $E^2 - \vec{p}^2 c^2 = m^2 c^4$.)

Im Ruhesystem eines Teilchen ist $\vec{p}^* = 0$, so dass $E^* = m$. Die Lorentz-Transformation eines 4-er Impulses erfolgt wie bei anderen 4-er Vektoren auch:

$$p'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu p^\nu$$

$$\begin{pmatrix} E' \\ p'_x \\ p'_y \\ p'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_s & -\gamma_s \beta_s & & \\ -\gamma_s \beta_s & \gamma_s & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

Bewegt sich ein Teilchen mit Geschwindigkeit β , so ergibt sich mit ($\beta = \beta_s$) aus der Lorentz-Transformation für Energie, Impuls und kinetische Energie:

$$E = \gamma m$$

$$\vec{\beta} = \vec{p}/E$$

$$\vec{p} = \gamma \vec{\beta} m$$

$$E_{kin} = E - m = (\gamma - 1)m$$

Es folgt: $p^2 = E^2 - \vec{p}^2 = \underbrace{\gamma^2(1 - \beta^2)}_{=1} m^2$, so dass $p^\mu p_\mu = m^2$ in allen Systemen. Daraus

folgt auch das Additionstheorem für Geschwindigkeiten

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{p}}{E} \quad \beta'_x = \frac{p'_x}{E'} = \frac{\gamma_s p_x - \gamma_s \beta_s E}{\gamma_s E - \gamma_s \beta_s p_x} = \frac{\beta_x - \beta_s}{1 - \beta_x \beta_s}$$

sowie die kinematischen Grenzfälle für Teilchen-Impulse:

ruhend:	$\beta = 0$	$\gamma = 1$	$\vec{p} = 0$	$E = m$
langsam:	$\beta \lesssim 0$	$\gamma \gtrsim 1$	$ \vec{p} \ll m$	$E = m + \frac{1}{2}m\beta^2 + \dots \beta^4 + \dots$
ultrarelativ.:	$\beta \approx 1$	$\gamma \gg 1$	$ \vec{p} \gg m$	$E \approx \vec{p} $
Masse-los:	$\beta = 1$	$\gamma = \infty$	$ \vec{p} = E$	

Ableitungen: Als 4-er Ableitung wird definiert:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right)$$

oder, mit $c = 1$,

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = (\partial_t, \partial_x, \partial_y, \partial_z)$$

sowie

$$\partial^\mu = (\partial_t, -\partial_x, -\partial_y, -\partial_z)$$

Damit ist z.B. die Variation einer skalaren Funktion $\Phi(x)$ gegeben durch

$$\delta\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x^\mu} \delta x^\mu = (\partial_\mu \Phi) \delta x^\mu$$

ebenfalls ein Skalar. Es folgt auch

$$\partial^\mu \partial_\mu = \partial_t^2 - \vec{\nabla}^2 = \square$$

2.4 Schrödinger-Gleichung

QM- Wellengleichung für nicht-relativistische Teilchen.

Benutzt wird die nicht-relativistische Energie-Impuls Beziehung für freie Teilchen:

$$E = \frac{\vec{p}^2}{2m}$$

Quantisierung: Ersetzt man Energie und Impuls eines Teilchens durch die Operatoren

$$E \rightarrow i\partial_t, \quad p \rightarrow -i\nabla$$

und wendet das Resultat auf eine Wellenfunktion $\psi(x, t)$ an, so folgt die Schrödinger-Gleichung,

$$-i\partial_t\psi = \frac{1}{2m}\nabla^2\psi$$

(in natürlichen Einheiten, $\hbar = 1$). Lösungen sind ebene Wellen:

$$\psi = \psi_0 e^{i(Et - \vec{p}\vec{r})},$$

so dass mit $\partial_t\psi = iE\psi$, $\nabla\psi = -i\vec{p}\psi$ und $\nabla^2\psi = -\vec{p}^2\psi$ die Energie-Impuls Beziehung wieder erfüllt ist:

$$E\psi = \frac{\vec{p}^2}{2m}\psi$$

2.5 Klein-Gordon-Gleichung

Relativistische Wellengleichung für Spin-0 Teilchen.

Anders als bei der Schrödingergleichung startet man von der relativistischen Energie-Impuls Beziehung

$$E^2 = \vec{p}^2 + m^2 \quad \text{oder} \quad p^\mu p_\mu = m^2$$

Ersetzt man Energie und Impuls durch die gleichen Operatoren wie im nicht-relativistischen Fall, so erhält man den relativistischen 4-er Impulsoperator:

$$E \rightarrow i\partial_t, \quad p \rightarrow -i\nabla \quad \text{oder} \quad p^\mu \rightarrow i\partial^\mu.$$

Dies setzt man in die Energie-Impulsbeziehung ein und wendet die Operatoren auf eine Wellenfunktion $\Phi(x, t)$ an:

$$-\partial_t^2\Phi = -\nabla^2\Phi + m^2\Phi \quad \text{oder} \quad (\partial^\mu\partial_\mu + m^2)\Phi = 0,$$

denn $\partial^\mu\partial_\mu = \partial_t^2 - \nabla^2$. Dies ist die Klein-Gordon Gleichung für relativistische Spin-0 Teilchen. Lösungen sind wieder ebene Wellen,

$$\Phi(x) = \Phi_0 e^{i(Et - \vec{p}\vec{r})} = \Phi_0 e^{i p^\nu x_\nu}$$

mit der Lorentz-invarianten Phase $p^\nu x_\nu$. Da z.B. $\partial^t p^\nu x_\nu = p^0 = E$ ist folgt auch

$$\partial^\mu (p^\nu x_\nu) = p^\mu, \quad \partial_\mu (p^\nu x_\nu) = p_\mu$$

so dass Einsetzen der Wellenfunktion in die Klein-Gordon Gleichung wieder die relativistische Energie-Impuls Beziehung liefert.

2.6 Dirac Gleichung

Relativistische Wellengleichung für Spin 1/2 Teilchen.

In relativistischen Wellengleichungen können Ort- und Zeit- Ableitungen nur gleichberechtigt, d.h. in der Form ∂^μ auftreten. Eine Gleichung linear in den Ableitungen ist die Dirac-Gleichung

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = 0$$

Bestimmt man die Größen γ^μ so, dass für eine ebene Welle ψ die relativistische Energie-Impuls Beziehung $E^2 = \vec{p}^2 + m^2$ erfüllt sein muß, so folgt:

- Jedes γ^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) ist eine 4x4 Matrix. Hinter m in der Dirac-Gleichung steht also (nicht ausgeschrieben) eine 4x4 1er-Matrix im Spinor-Raum. Damit die Dirac-Gleichung Lorentz-invariant ist muss gelten¹

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$$

- ψ ist ein 4-Spinor mit den 4 Komponenten $\psi_k = \psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$. Hier ist k kein Lorentz-Index sondern der Spinor-Index (Römische Buchstaben). Der Spinor hat also 4 Freiheitsgrade: (Teilchen, Antiteilchen) x (2 Spineinstellungen)
Die Dirac-Gleichung gilt also für Spin 1/2 Teilchen und sagt die Existenz von Anti-Materie voraus.

Ausgeschrieben in allen Komponenten lautet die Dirac-Gleichung:

$$\sum_{k=1}^4 \left[\sum_{\mu=0}^3 i(\gamma^\mu)_{jk} \partial_\mu - m \delta_{jk} \right] \psi_k = 0$$

Die 4x4 γ -Matrizen beinhalten nur Zahlen und lassen sich durch die 2x2 Pauli-Matrizen darstellen. In der Dirac-Pauli Notation lauten sie:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

¹Beweis: Ersetzt man in der Dirac-Gleichung den Impulsoperator $i\partial_\nu$ durch den Impulserwartungswert p_ν so erhält man $\gamma^\nu p_\nu \psi = m\psi$. Multipliziert man nun von links auf der linken Seite mit $\gamma^\mu p_\mu$ und auf der rechten Seite mit m , so folgt

$$\gamma^\mu p_\mu \gamma^\nu p_\nu \psi = \frac{1}{2} (\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu) p_\mu p_\nu \psi = m^2 \psi = (E^2 - \vec{p}^2) \psi.$$

Der zweite und vierte Term können nur gleich sein, wenn $\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$ erfüllt ist.

Die zusätzliche γ^5 Matrix ist nicht Teil der Dirac-Gleichung, wird aber später benötigt. Die Pauli-Matrizen $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z) = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ lauten in der Dirac-Darstellung

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

In manchen Fällen ist es vorteilhaft eine andere Konvention für die γ - Matrizen zu verwenden, die Weyl- Notation:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

In dieser Notation haben dann auch die Lösungen der Dirac Gleichung eine andere Form. Generell wird im Folgenden die oben definierte Dirac-Pauli Notation verwendet.

2.7 Lagrange-Formalismus

2.7.1 Für klassische Teilchen

Klassisch und nicht-relativistisch ist die Lagrange-Funktion für ein Teilchen eine Funktion der Ortskoordinaten und deren Zeitableitungen,

$$L(\vec{x}, \partial_t \vec{x}) = T - V = \frac{\vec{p}^2}{2m} - V = \frac{1}{2}m(\partial_t \vec{x})^2 - V(\vec{x})$$

oder mit verallgemeinerten Koordinaten $q, \partial_t q$,

$$L = L(q, \partial_t q)$$

Aus den Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{\partial L}{\partial q(t)} - \partial_t \frac{\partial L}{\partial(\partial_t q(t))} = 0$$

folgen die Bewegungsgleichungen. Ist z.B. $q = \vec{x}$, so folgt mit

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{x}} = -\frac{\partial V(\vec{x})}{\partial \vec{x}} = \vec{F}$$

$$\frac{\partial L}{\partial(\partial_t \vec{x})} = m \cdot (\partial_t \vec{x}) = \vec{p}$$

das Gesetz von Newton:

$$\vec{F} = \partial_t \vec{p},$$

2.7.2 Für die Klein-Gordon Gleichung

Felder sind nicht durch einzelne Koordinaten beschrieben, sondern sind Funktionen vor Ort und Zeit. Man geht daher zur Lagrange-Dichte \mathcal{L} über, die mit der Lagrange-Funktion und der Wirkung über

$$L = \int d\vec{x} \mathcal{L}, \quad S = \int d^4x \mathcal{L}$$

zusammenhängt. Da die Wirkung dimensionslos sein soll und Längen die Dimension $[\text{GeV}^{-1}]$ haben ist die Dimension der Lagrange-Dichte also $[\text{GeV}^4]$. Für ein skalares (Spin 0), reelles Feld $\Phi(x)$ als Funktion von Ort und Zeit-Koordinaten ist die Lagrange-Dichte eine Funktion der Felder Φ und deren Änderungen $\partial_\mu \Phi$,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu \Phi)$$

Die Euler-Lagrange-Gleichung lautet dann

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} = 0$$

Die Klein-Gordon Gleichung lässt sich aus der Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \Phi)(\partial^\mu \Phi) - \frac{1}{2}m^2\Phi^2$$

ableiten, denn es gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} &= -m^2\Phi \\ \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \right) &= \partial_\mu(\partial^\mu \Phi) = \partial_\mu \partial^\mu \Phi, \end{aligned}$$

insgesamt also

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_\mu \partial^\mu \Phi + m^2\Phi = 0,$$

also die Klein-Gordon-Gleichung.

2.7.3 Für die Dirac- Gleichung

Die Dirac- Wellenfunktionen bestehen aus 4 komplexen Feldern ψ . Anstatt Real- und Imaginär- Teile zu betrachten benutzt man equivalent die Funktionen und ihre komplex konjugierten, ausgedrückt durch die “adjungierten” Spinoren

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0,$$

wobei † wie üblich komplex konjugiert und transponiert bedeutet:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \quad \psi^\dagger = (\psi_1^*, \psi_2^*, \psi_3^*, \psi_4^*)$$

Bei Variation der Lagrange- Dichte fungieren alle Komponenten von ψ und $\bar{\psi}$ und ihre Ableitungen als getrennte Variablen,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi, \bar{\psi}, \partial_\mu \bar{\psi})$$

Die Lagrange- Dichte der Dirac- Gleichung lautet für ein freies Teilchen

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi.$$

Aus der Euler- Lagrange Gleichung für $\bar{\psi}$,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} = 0$$

folgt mit

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} = (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi.$$

die Dirac- Gleichung für ψ :

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0.$$

Ebenso folgt aus der Euler- Lagrange Gleichung für ψ ,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} = 0$$

mit

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} = i\bar{\psi}\gamma^\mu, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = -m\bar{\psi}$$

die Dirac- Gleichung für $\bar{\psi}$:

$$i\partial_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu + m\bar{\psi} = 0.$$

also die adjungierte Gleichung zur Dirac- Gleichung.

2.8 Globale Symmetrien und Noether- Theorem

Invarianz unter Translation, Zeit-Verschiebung und Rotation führen zu den Erhaltungssätzen für Impuls, Energie und Drehimpuls. Im Gegensatz zu diesen “äußeren” Symmetrien geht es im Folgenden um “innere” Symmetrien, deren Transformationen mit den Raum-Zeit Transformationen vertauschen. Für eine Wellenfunktion $\psi(x)$ ist die “globale Phasentransformation” (=Eichtransformation, gauge transformation) definiert durch

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{i\alpha} \psi$$

Global heist, das der Parameter α nicht von Ort und Zeit abhängen soll. Solche Transformationen mit reellem Parameter α bilden die Gruppe $U(1)$ der unitären Transformationen mit einem kontinuierlichen Parameter. Da

$$\begin{aligned} \partial_\mu \psi &\rightarrow \partial_\mu \psi' = e^{i\alpha} \partial_\mu \psi \\ \bar{\psi} &\rightarrow \bar{\psi}' = e^{-i\alpha} \bar{\psi} \end{aligned}$$

ist die Lagrange- Dichte der Dirac- Gleichung invariant unter globalen Eichtransformationen:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi &\rightarrow \mathcal{L}' = \bar{\psi}'(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi' \\ &= e^{-i\alpha} \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)e^{i\alpha} \psi \\ &= \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi \\ &= \mathcal{L} \end{aligned}$$

Die Gruppe $U(1)$ ist eine sog. Abel’sche Gruppe, da ihre Elemente vertauschen, $U(\alpha)U(\beta) = U(\beta)U(\alpha)$. Unter einer infinitesimalen Transformation ($\alpha \ll 1$),

$$\begin{aligned} \psi &\rightarrow \psi' = (1 + i\alpha)\psi &\Rightarrow \delta\psi = i\alpha\psi \\ \partial_\mu \psi &\rightarrow \partial_\mu \psi' = (1 + i\alpha)\partial_\mu \psi &\Rightarrow \delta(\partial_\mu \psi) = i\alpha \partial_\mu \psi \end{aligned}$$

sollte sich die Lagrange- Dichte ebenfalls nicht ändern. Daher gilt für die Variation von \mathcal{L} (Produktregel):

$$\begin{aligned} 0 \stackrel{!}{=} \delta\mathcal{L} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} \delta\psi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)} \delta(\partial_\mu\psi) + \dots (\bar{\psi}) \\ &= i\alpha \underbrace{\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)} \right)}_{=0 \text{ Euler Lagrange}} \psi + i\alpha \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)} \psi \right) + \dots (\bar{\psi}) \end{aligned}$$

Demnach muss der zweite Term zusammen mit dem entsprechenden Ausdruck für $\bar{\psi}$ ebenfalls verschwinden,

$$i\alpha \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)} \psi - \bar{\psi} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})} \right) = -\alpha \partial_\mu (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi) = 0$$

Dies stellt die Kontinuitätsgleichung für einen erhaltenen 4-er Strom

$$j^\mu \sim \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$$

dar, da

$$\partial_\mu j^\mu = \partial_t j^0 + \nabla \vec{j} = 0$$

ist, wobei j_0 die Dichte und \vec{j} die entsprechende Vektorstromdichte ist. Die gesamte "Ladung"

$$Q = \int d^3x j^0$$

ist damit eine Erhaltungsgröße. Dies ist ein Beispiel für das Theorem von Noether: Aus Symmetrien folgen Erhaltungssätze. Aus der inneren Symmetrie folgt eine Kontinuitätsgleichung für einen 4-er Strom und Ladungs- Erhaltung.

3 Eigenschaften der Dirac-Gleichung

3.1 Lösungen der Dirac Gleichung

Lösungen der freien Dirac- Gleichungen

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = 0$$

sind vier Wellenfunktionen

$$\psi(x) = u^{(1,2)}(p) e^{-ip^\mu x_\mu}$$

$$\psi(x) = v^{(1,2)}(p) e^{+ip^\mu x_\mu}$$

wobei die jeweils zwei Spinoren für Teilchen $u^{(1,2)}(p)$ und Antiteilchen $v^{(1,2)}(p)$ nur vom 4-er Impuls p_μ abhängen, aber nicht von den Ortskoordinaten x_μ . Einsetzen in die Dirac-Gleichung ergibt Gleichungen für die Spinoren,

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)u^{(1,2)} = 0$$

$$(\gamma^\mu p_\mu + m)v^{(1,2)} = 0$$

sowie

$$\bar{u}^{(1,2)}(\gamma^\mu p_\mu - m) = 0$$

$$\bar{v}^{(1,2)}(\gamma^\mu p_\mu + m) = 0.$$

In der Dirac- Pauli Darstellung der γ - Matrizen ist

$$\gamma^\mu p_\mu - m = \begin{pmatrix} E - m & -\vec{\sigma}\vec{p} \\ \vec{\sigma}\vec{p} & -E - m \end{pmatrix}$$

wobei $E = +\sqrt{p^2 + m^2}$ immer positiv ist und

$$\vec{\sigma}\vec{p} = \begin{pmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{pmatrix}, \quad (\vec{\sigma}\vec{p})^2 = \vec{p}^2$$

Lösungen für die Spinoren der Teilchen (u) und Antiteilchen (v) sind daher

$$u^{(1,2)}(p) = N \begin{pmatrix} \chi^{(1,2)} \\ \frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{E+m} \chi^{(1,2)} \end{pmatrix}, \quad v^{(1,2)}(p) = \pm N \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{E+m} \chi^{(2,1)} \\ \chi^{(2,1)} \end{pmatrix}$$

wobei in der letzten Spalte die zwei-komponentigen Spinoren

$$\chi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \chi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

nur zur Vereinfachung der Schreibweise eingeführt wurden. Explizit ausgeschrieben lauten die Spinoren

$$\begin{aligned}
 u^{(1)}(p) &= N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x+ip_y}{E+m} \end{pmatrix} & u^{(2)}(p) &= N \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_x-ip_y}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \end{pmatrix} \\
 v^{(1)}(p) &= N \begin{pmatrix} \frac{p_x-ip_y}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & v^{(2)}(p) &= -N \begin{pmatrix} \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x+ip_y}{E+m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Die willkürliche Normierung wird zumeist zu $N = \sqrt{E+m}$ gesetzt. Bewegt sich das Teilchen nur in $+z$ Richtung, so lauten die Spinoren

$$\begin{aligned}
 u^{(1)}(p_z) &= N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p}{E+m} \\ 0 \end{pmatrix} & u^{(2)}(p_z) &= N \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{-p}{E+m} \end{pmatrix} \\
 v^{(1)}(p_z) &= N \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-p}{E+m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & v^{(2)}(p_z) &= -N \begin{pmatrix} \frac{p}{E+m} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Im Ruhesystem des Teilchens ist $p^\mu = (m, 0, 0, 0)$ und die Spinoren lauten

$$\begin{aligned}
 u^{(1)}(0) &= \sqrt{2m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & u^{(2)}(0) &= \sqrt{2m} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
 v^{(1)}(0) &= \sqrt{2m} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, & v^{(2)}(0) &= -\sqrt{2m} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

3.2 Spin und Helizität

Der Spin-Operator für die Dirac-Gleichung lautet

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}.$$

Angewendet auf die Spinoren $u(p)$, $v(p)$ zeigt sich, dass diese im Allgemeinen keine Eigenzustände des Spin-Operators sind. Für Teilchen, die sich in $+z$ -Richtung bewegen, sind die Spinoren $u(p_z)$, $v(p_z)$ jedoch Eigenzustände von S_z . Es wird daher der Helizitätsoperator definiert,

$$\lambda = \frac{\vec{S} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} = \frac{1}{2|\vec{p}|} \begin{pmatrix} \vec{\sigma} \vec{p} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \vec{p} \end{pmatrix}$$

der die Spin-Komponente parallel zum Impuls \vec{p} beschreibt.

Insbesondere ist für ein Teilchen mit Impuls in $+z$ Richtung der Helizitätsoperator einfach

$$\lambda_z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix},$$

so dass

$$\lambda_z u^{(1)}(p_z) = +\frac{1}{2} u^{(1)}(p_z) \quad \lambda_z u^{(2)}(p_z) = -\frac{1}{2} u^{(2)}(p_z)$$

Für ein Antiteilchen gilt:

$$\lambda_z v^{(1)}(p_z) = -\frac{1}{2} v^{(1)}(p_z) \quad \lambda_z v^{(2)}(p_z) = +\frac{1}{2} v^{(2)}(p_z)$$

Die Spinoren $u^{(1,2)}$ sind also Eigenfunktionen des Helizitätsoperators mit positiver Helizität $1/2$ wenn der Spin in Bewegungsrichtung zeigt. Helizität ist bedeutsam, weil der Spin zur Drehimpulserhaltung beiträgt.

3.3 Chiralität

Es werden zwei Chiralitäts - Projektionsoperatoren

$$P_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) \quad \text{und} \quad P_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma^5)$$

definiert. Nach Anwendung auf beliebige Spinoren entstehen

$$u_L(p) = P_L u(p) = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)u(p)$$

$$u_R(p) = P_R u(p) = \frac{1}{2}(1 + \gamma^5)u(p)$$

linkshändige (“lefthanded”) Spinoren u_L und rechtshändige (“righthanded”) Spinoren u_R , so dass

$$u = u_L + u_R$$

Explizit ist

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wendet man die Chiralitätsoperatoren auf Helizitätszustände an, so findet man

$$P_L u^{(1)}(p_z) = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) u^{(1)}(p_z) = \frac{1}{2}\sqrt{E+m} \left(1 - \frac{p}{E+m}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_R u^{(1)}(p_z) = \frac{1}{2}(1 + \gamma^5) u^{(1)}(p_z) = \frac{1}{2}\sqrt{E+m} \left(1 + \frac{p}{E+m}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Im ultrarelativistischen Grenzfall, $E \gg m$, $E \approx p$, ist $P_L u^{(1)} \rightarrow 0$ und $P_R u^{(1)} \rightarrow u^{(1)}$, d.h. Teilchen mit positiver Helizität sind nahezu rechtshändig und Teilchen mit negativer Helizität sind nahezu linkshändig. Dies ist aber falsch bei kleineren Geschwindigkeiten.

Chiralität (oder Händigkeit) spielt eine große Rolle, weil sie für Vektorströme an jedem Vertex eines Feynman-Diagramms erhalten bleibt. Für den Strom

$$j^\mu = \bar{u} \gamma^\mu u$$

in der QED gilt mit $u = u_L + u_R$ und $\bar{u} = \bar{u}_L + \bar{u}_R$, dass

$$\bar{u} \gamma^\mu u = \bar{u}_L \gamma^\mu u_L + \bar{u}_R \gamma^\mu u_R.$$

Da der Strom in der QED insgesamt erhalten bleibt und keine gemischten Terme $\bar{u}_R \gamma^\mu u_L$ auftreten bedeutet dies, dass ein in einen Prozess einlaufendes linkshändiges Teilchen auch linkshändig die Reaktion verlässt, und ebenso für ein rechtshändiges Teilchen. Dies stellt eine wichtige Einschränkung für die erlaubten Helizitäts-Kombinationen in Prozessen dar. In der QCD und der schwachen Wechselwirkung gilt dies ebenso. Da die Chiralität für ultrarelativistische Teilchen auch die Helizität und damit den Spin festlegt, folgen hieraus bereits Grundeigenschaften der Wirkungsquerschnitte.

3.4 C,P,T

Für den Operator der Ladungskonjugation C gilt

$$C\psi = \psi^C = i\gamma_2\psi^*,$$

so dass gilt:

$$Cu^{(1)} = u^{(1)C} = v^{(2)}, \quad Cu^{(2)} = u^{(1)C} = v^{(1)}.$$

Die Paritätsoperator bewirkt eine Spiegelung der Raumkoordinaten, $\vec{x} \rightarrow -\vec{x}$. Seine Auswirkungen auf Spinoren lassen sich durch die γ^0 Matrix darstellen,

$$\psi'(x') = \gamma^0 \psi(x)$$

Angewendet auf die Spinoren u, v ergibt sich

$$\gamma^0 u^{(1,2)}(E, \vec{p}) = +u^{(1,2)}(E, -\vec{p}) \quad \gamma^0 v^{(1,2)}(E, \vec{p}) = -v^{(1,2)}(E, -\vec{p})$$

Also haben Spin-1/2 Teilchen positive Parität und Spin 1/2 Antiteilchen negative Parität.

Bei der Zeitumkehr wird nur das Vorzeichen der Zeit umgekehrt, $t \rightarrow -t$. Für Spinoren lässt sich das darstellen als

$$\psi'(t') = i\gamma^1 \gamma^3 \psi^*(t).$$

3.5 Dimensionen der Felder und Bilinearformen

Die Lagrange-Dichte hat die Dimension GeV^4 . Aus dem Massenterm $\mathcal{L}_m = m\bar{\psi}\psi$, dem kinetischen Term für das Vektorfeld $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ und dem Wechselwirkungsterm $q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$ kann man für die Dimensionen der Felder ablesen:

$$\begin{aligned} [\psi] &= \text{GeV}^{3/2} \\ [A_\mu] &= \text{GeV} \\ [q] &= 1 \end{aligned}$$

Das Forderung nach einer renormierbaren Theorie erfordert nun, dass in der Lagrange-Dichte keine Kopplungen mit negativer Potenz von GeV auftreten dürfen.

Wegen ihrer Dimension GeV dürfen also maximal vier Vektorfelder in einem Term der Lagrange-Dichte auftreten. Hingegen treten wegen ihrer Dimension $\text{GeV}^{3/2}$ Dirac-Spinoren höchstens paarweise auf (Bilinearformen). Dies ist für die Lagrange-Dichte der QED tatsächlich der Fall.

Damit sind Alternativen zur QED bereits aus Gründen der Relativitätstheorie und der Konsistenz der Theorie (Renormierbarkeit) weitgehend eingeschränkt.

Es gibt aber neben den bereits in die Lagrange-Dichte eingeführten Termen auch andere Ausdrücke aus je zwei Spinoren, die für relativistisch invariante Terme verwendet werden könnten. Eine vollständige Liste ist:

Skalar	$\bar{\psi}\psi$	1	Massenterm
Vektor	$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$	4	Strom der QED
Tensor	$\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$	6	
Axial-Vektor	$\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi$	4	negative Parität
Pseudo-Skalar	$\bar{\psi}\gamma^5\psi$	1	negative Parität

mit $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)$. Die Zahlen geben an, wieviele unabhängige Bilinearformen in jedem Ausdruck vorkommen; Skalare sind 1-dimensional, Vektoren 4-dimensional und antisymmetrische 4x4 Tensoren haben 6 unabhängige Elemente. Damit sind alle 16 möglichen Kombinationen zweier 4-Spinoren dargestellt.

Es zeigt sich, dass für die QED und die QCD, in denen die Parität erhalten ist, außer dem Tensor keine andere Größen außer den bereits bekannten Massentermen und Strömen auftauchen dürfen. Für einen Tensor-Term gibt es aber keinen experimentellen Beleg. In der schwachen Wechselwirkung, die die Parität verletzt, werden auch Axial-Vektoren eine große Rolle spielen, da der Strom eines linkshändigen Spin-1/2 Teilchens

$$\bar{u}_L\gamma^\mu u_L \sim \bar{\psi}\gamma^\mu\psi - \bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi$$

also als Vektor - Axialvektor Strom (V-A Theorie der schwachen Wechselwirkung) ausgedrückt werden kann.

Ergänzungen zur Dirac-Gleichung

Parität für Antiteilchen

Die Paritätstransformation bedeutet Spiegelung der Koordinaten von 3-er Vektoren,

$$\begin{aligned}\vec{x} &\rightarrow \vec{x}' = S_P \vec{x} = -\vec{x} \\ \vec{p} &\rightarrow \vec{p}' = S_P \vec{p} = -\vec{p}\end{aligned}$$

Die Darstellung des Paritätsoperators ist also für 3-er Vektoren einfach

$$S_P = -1$$

Allgemein hängt die Darstellung von Operatoren mit gleicher physikalischer Bedeutung davon ab, worauf sie angewendet werden sollen. Die gleiche Paritätstransformation S_P für einen Dirac-Spinor ist definiert als

$$u(E, \vec{p}) \rightarrow u'(E, \vec{p}') = S_P u(E, \vec{p})$$

Wendet man

$$S_P = \gamma^0$$

auf einen Teilchen-Spinor u oder Antiteilchen-Spinor v an, so ergibt sich z.B.

$$S_P u^{(1)}(p_z) = \gamma^0 u^{(1)}(p_z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p}{E+m} \\ 0 \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{-p}{E+m} \\ 0 \end{pmatrix} = +u^{(1)}(-p_z)$$

$$S_P v^{(1)}(p_z) = \gamma^0 v^{(1)}(p_z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} N \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-p}{E+m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -N \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{+p}{E+m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -v^{(1)}(-p_z)$$

Insgesamt gilt auch allgemein

$$S_p u(\vec{p}) = +u(-\vec{p}) \quad S_p v(\vec{p}) = -v(-\vec{p})$$

Teilchen haben also positive Parität ("Eigenparität"), Antiteilchen hingegen negative Parität. Nach zweimaliger Spiegelung ist der Ursprungszustand wieder erreicht,

$$S_p^2 u(\vec{p}) = u(\vec{p}) \quad S_p^2 v(\vec{p}) = v(\vec{p}).$$

4 Quanten-Elektrodynamik

4.1 Lokale Eichinvarianz

Die Quanten-Elektro-Dynamik (QED) ist die bis jetzt gültige Theorie zur Beschreibung aller elektromagnetischen Prozesse. Theoretisch wird sie motiviert durch eine Verallgemeinerung der globalen Eichsymmetrie zu einer lokalen Eichsymmetrie.

Während die Schrödinger- Gleichung, die Klein-Gordon- Gleichung und die Dirac-Gleichung bereits invariant unter globalen Eichtransformationen sind (siehe Abschnitt 2.8), folgt aus der Forderung nach lokaler Eichinvarianz

- die Existenz von neuen Vektorfeldern (z.B. dem Photon)
- die Existenz von neuen Wechselwirkungen zwischen diesen Vektorfeldern und Teilchen mit Ladung.

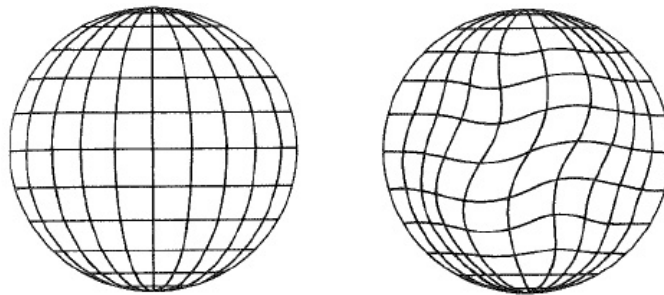


Abbildung 1: Symbolische Darstellung einer Phasentransformation als Rotation einer Kugeloberfläche.

Links: Globale Transformation, entsprechend einer Rotation der ganzen Kugel um den gleichen Winkel, also keine Deformation.

Rechts: Lokale Transformation, entsprechend einer Verschiebung von Punkten untereinander mit Deformationen, die elastische Kräfte erzeugen.

Im Folgenden wird lokale Eichinvarianz für $U(1)$ Phasentransformationen diskutiert.

Bei der globalen Eichinvarianz war die Phase α eine konstante, also unabhängig von Ort und Zeit. Observablen wie $\langle \Psi | \Psi \rangle$ sind aber auch invariant unter lokalen Eichtransformationen, bei der die Phase von Ort und Zeit abhängt. Allgemein sollten physikalische Gesetze vermutlich nicht globalen Symmetrien unterliegen, da deren Transformationen überall gleichzeitig wirken müssten, was dem Prinzip der Kausalität widerspricht. Es wird daher postuliert, dass die Eichsymmetrie $U(1)$ auch lokal gelten soll, d.h. eine kontinuierliche Funktion von Raum und Zeit sein kann:

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{iq\alpha(x)}\psi(x)$$

$$\bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x) = e^{-iq\alpha(x)}\bar{\psi}(x).$$

Hier ist q eine zunächst beliebige, reelle Konstante und $\alpha(x) = \alpha(t, x_1, x_2, x_3)$ eine reelle Funktion. Für ein freies Spin 1/2 Teilchen ist damit die transformierte Lagrange-Dichte der Dirac- Gleichung

$$\mathcal{L}' = \bar{\psi}' i\gamma^\mu \partial_\mu \psi' - m\bar{\psi}'\psi'$$

Der Massenterm ist offenbar eich-invariant,

$$m\bar{\psi}'\psi' = m\bar{\psi}\psi,$$

während für die Ableitung

$$\partial_\mu \psi' = e^{iq\alpha(x)} (\partial_\mu \psi + iq \psi \partial_\mu \alpha(x))$$

gilt. Damit wird die Lagrange- Dichte zu

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= \bar{\psi}' i\gamma^\mu \partial_\mu \psi' - m\bar{\psi}'\psi' \\ &= e^{-iq\alpha(x)} \bar{\psi} i\gamma^\mu e^{iq\alpha(x)} (\partial_\mu \psi + iq \psi \partial_\mu \alpha(x)) - m\bar{\psi}\psi \\ &= \bar{\psi} i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi - q \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \partial_\mu \alpha(x) \\ &= \mathcal{L} - q \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \partial_\mu \alpha(x) \end{aligned}$$

Damit ist die Lagrange- Dichte eines freien Teilchens nicht invariant unter lokalen Eichtransformationen, da die Ableitung $\partial_\mu \psi$ nicht invariant ist.

Damit das Postulat erfüllt wird muss die Lagrange- Dichte offenbar verändert werden. Dies kann erreicht werden, wenn man anstelle der normalen Ableitung $\partial_\mu \psi$ eine "kovariante" Ableitung $D_\mu \psi$ einführt, die sich unter einer Eichtransformation verhalten soll wie:

$$D_\mu \psi \rightarrow D'_\mu \psi' = e^{iq\alpha(x)} D_\mu \psi$$

Dies kann nur erfüllt werden, wenn man ein neues Vektorfeld $A_\mu(x)$ einführt und die kovariante Ableitung definiert als

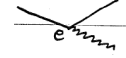
$$D_\mu \equiv \partial_\mu + iqA_\mu(x),$$

wobei sich das Vektorfeld unter der gleichen Eichtransformation verhalten soll wie

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu \alpha(x)$$

Damit ist die neue (noch nicht endgültige) Lagrange- Dichte

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \bar{\psi} i\gamma^\mu D_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi \\ &= \underbrace{\bar{\psi} i\gamma^\mu \partial_\mu \psi}_{\text{kin.Term}} - \underbrace{m\bar{\psi}\psi}_{\text{Massen-Term}} - \underbrace{q \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu}_{\text{Neue Wechselwirkung}} \end{aligned}$$



Die Forderung nach lokaler Eichinvarianz verlangt also ein neues Vektorfeld und sagt die Form der neuen Wechselwirkung voraus. Später werden wir für die QED identifizieren:

- das Vektorfeld A_μ entspricht dem Photon,
- das Dirac- Feld ψ entspricht z.B. einem Elektron (oder Myon, Tau, Quark),
- die Konstante q entspricht der Kopplung zwischen Photon und z.B. dem Elektron, d.h. der elektrischen Ladung.

Es muß noch bewiesen werden, dass die neue Lagrange- Dichte eichinvarinat ist. Es gilt

$$\begin{aligned}
 D'_\mu \psi' &= (\partial_\mu + iqA'_\mu) \psi' \\
 &= \partial_\mu (e^{iq\alpha} \psi) + iq (A_\mu - \partial_\mu \alpha) e^{iq\alpha} \psi \\
 &= e^{iq\alpha} (\partial_\mu \psi + iq\psi \partial_\mu \alpha + iqA_\mu \psi - iq\psi \partial_\mu \alpha) \\
 &= e^{iq\alpha} D_\mu \psi
 \end{aligned}$$

Damit ist auch $\bar{\psi} i \gamma^\mu D_\mu \psi$ invariant, und damit auch die gesamte Lagrange- Dichte und die Bewegungsgleichungen.

4.2 Vektorfelder

4.2.1 Masse und kinetische Energie

Genau wie das Dirac- Feld $\psi(x)$ muss das Vektorfeld $A_\mu(x)$ als neuer Freiheitsgrad der Theorie aufgefasst werden, kann also auch Energie aufnehmen und sollte demnach mit Massen- Term und kinetischem Term in der Lagrange- Dichte auftreten. Im Folgenden werden die Eigenschaften des freien Vektorfeldes untersucht.

Ein Massenterm der Form $m^2 A^\mu A_\mu$ ist jedoch nicht eich- invariant,

$$m^2 A'^\mu A'_\mu = m^2 (A^\mu A_\mu + 2A^\mu \partial_\mu \alpha + \partial^\mu \alpha \partial_\mu \alpha).$$

- Das Vektorfeld muss masselos sein².

²In der Tat sind das Photon der $U(1)$ und die Gluonen der $SU(3)$ masselos. Die schwachen Eichbosonen W^\pm, Z^0 der $SU(2)$ erhalten jedoch durch die "spontane" Symmetrie- Brechung im Higgs- Mechanismus eine Masse.

Ein kinetischer Term für A_μ muss Ableitungen der Form $\partial^\mu A^\nu$ beinhalten, die einzeln nicht eich- invariant sind. Für den Feldstärke- Tensor

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu,$$

gilt jedoch

$$\begin{aligned} F'_{\mu\nu} &= \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu \\ &= \partial_\mu (A_\nu + \partial_\nu \alpha) - \partial_\nu (A_\mu + \partial_\mu \alpha) \\ &= F_{\mu\nu} \end{aligned}$$

Eine Lorentz- invariante Lagrange- Dichte für das freie Vektorfeld ist demnach

$$\mathcal{L}_A = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}.$$

Aus den Euler- Lagrange Gleichungen für jede einzelne Komponente des Feldes A_α ,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\alpha} - \partial_\beta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta A_\alpha)} = 0$$

folgt mit

$$\frac{\partial (\partial_\mu A_\nu)}{\partial (\partial_\beta A_\alpha)} = \delta_{\beta\mu} \delta_{\alpha\nu} \quad \text{und} \quad \frac{\partial (\partial^\mu A^\nu)}{\partial (\partial_\beta A_\alpha)} = g^{\beta\mu} g^{\alpha\nu}$$

die Bewegungsgleichung

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0.$$

4.2.2 Spin und Polarisation

Durch eine Eichtransformation

$$A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu \alpha$$

lässt sich bei geeigneter Wahl von α erreichen, dass die Lorentz- Bedingung erfüllt ist,

$$\partial_\mu A^\mu = 0.$$

Für die Bewegungsgleichungen des freien Bosons

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \square A^\nu - \partial_\nu \partial^\mu A_\mu = 0$$

folgt damit die Wellengleichung

$$\square A^\mu = 0$$

mit einer ebenen Welle als Lösung,

$$A^\mu = \varepsilon^\mu e^{ik_\nu x^\nu}$$

mit dem Polarisationsvektor ε^μ . Mit $\partial_\mu A^\mu = 0$ folgt daraus

$$k_\mu \varepsilon^\mu = 0.$$

Die ursprünglich 4 möglichen Polarisationszuständen ε^μ erfüllen also eine Zwangsbedingung, so dass durch die Eich-Freiheit de facto eine Komponente wegfällt. Die verbleibenden 3 Freiheitsgrade entsprechen den drei Einstellungen des Spins eines Spin-1 Teilchens.

Auch nach einer weiteren Eich- Transformation

$$A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu \alpha$$

bleibt die Lorentz- Bedingung $\partial_\mu A'^\mu = 0$ erfüllt, falls $\square \alpha = 0$. Für ein masseloses Teilchen ist dies möglich, denn als Lösung kann

$$\alpha = iae^{-ik^\mu x_\mu}$$

gewählt werden, denn es gilt $k^\mu k_\mu = m^2 = 0$. Aus diesen Lösungen ergibt sich mit $A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu \alpha$, dass

$$\varepsilon'^\mu = \varepsilon^\mu + ak^\mu$$

Wählt man nun a so, dass $\varepsilon_0 = 0$, so folgt mit $k_\mu \varepsilon^\mu = 0$, dass

$$\vec{k} \cdot \vec{\varepsilon} = 0,$$

d.h. der Polarisationsvektor steht senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung. Für masselose Vektorfelder ist also eine Polarisationsrichtung nicht realisiert; das Feld ist transversal polarisiert. Zeigt der Impuls in z Richtung, so gilt

$$\vec{k} = (0, 0, k)$$

$$\vec{\varepsilon}_1 = (1, 0, 0)$$

$$\vec{\varepsilon}_2 = (0, 1, 0)$$

Daraus lassen sich zirkular polarisierte Felder konstruieren, die den Spin-Einstellungen parallel (Helizität +1) und anti- parallel (Helizität -1) zur Bewegungsrichtung entsprechen,

$$\vec{\varepsilon}(\lambda = +1) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1, i, 0)$$

$$\vec{\varepsilon}(\lambda = -1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -i, 0)$$

Insgesamt hat ein Vektorfeld also 3 Polarisationszustände, wobei allerdings bei masselosen (nicht virtuellen) Vektorfeldern nur zwei realisiert sind.

4.3 Maxwell- Gleichungen

Insgesamt ist die eich- invariante Lagrange- Dichte eines Dirac- Teilchens, einschließlich kinetischer Energie für das Vektorfeld,

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \bar{\psi} i\gamma^\mu D_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \\ &= \underbrace{\bar{\psi} i\gamma^\mu \partial_\mu \psi}_{\text{kin. Term } \psi} - \underbrace{m\bar{\psi}\psi}_{\text{Massen-Term}} - \underbrace{q\bar{\psi}\gamma^\mu \psi A_\mu}_{\text{Neue Wechselwirkung}} - \underbrace{\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}}_{\text{kin. Term } A_\mu}\end{aligned}$$

Aus den Euler- Lagrange Gleichungen für $\bar{\psi}$ und A_μ folgen die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned}\partial_\mu F^{\mu\nu} &= j^\nu \\ (i\gamma^\mu (\partial_\mu + iqA_\mu) - m)\psi &= 0\end{aligned}$$

Hier erscheint jetzt die Stromdichte j^μ als Quelle für das Vektorfeld auf der rechten Seite, da im Gegensatz zur Lagrangedichte des freien Feldes (Abschnitt 4.2.1) die Ableitung

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} = q\bar{\psi}\gamma^\mu \psi = j^\mu$$

nicht verschwindet, sondern gerade die Stromdichte $j^\mu = (\rho, \vec{j})$ ist. Die hier beschriebene Lagrangedichte für eine lokale $U(1)$ Eichinvarianz ergibt daher Bewegungsgleichungen, die identisch denen der Elektrodynamik sind. Wir identifizieren daher die Stromdichte j^μ mit der elektrischen Stromdichte, die Konstante q mit der elektrischen Ladung der Dirac-Teilchens und das Feld A^μ mit dem 4-er Potential der Elektrodynamik,

$$A^\mu = (V, \vec{A}).$$

Das elektrische Feld \vec{E} und das magnetische Feld \vec{B} ergeben sich aus dem skalaren Potential V und dem Vektorpotential \vec{A} durch

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\nabla V - \partial_t \vec{A} \\ \vec{B} &= \nabla \times \vec{A}.\end{aligned}$$

In 4-Vektor Notation, $\partial^\mu = (\partial_t, -\nabla)$, ist dies z.B. für $i = 1, j = 2, k = 3$ gleichbedeutend mit

$$\begin{aligned}E^i &= \partial^i A^0 - \partial^0 A^i \\ B^i &= \partial^k A^j - \partial^j A^k.\end{aligned}$$

Damit ergibt sich für den antisymmetrischen Feldstärke-Tensor

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Die homogenen Maxwell- Gleichungen

$$\nabla \vec{B} = 0 \quad \nabla \times E + \partial_t B = 0$$

sind durch die Darstellung der Felder als Ableitungen des 4-er Potentials automatisch erfüllt. Die inhomogenen Maxwell- Gleichungen ergeben sich aus der ersten Bewegungsgleichung zu $\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$ zu

$$\begin{aligned} \nabla \vec{E} &= \rho & \nu &= 0 \\ \nabla \times B - \partial_t E &= \vec{j} & \nu &= 1, 2, 3 \end{aligned}$$

Die zweite Bewegungsgleichung $(i\gamma^\mu (\partial_\mu + iqA_\mu) - m)\psi = 0$ gibt die Wirkung des elektromagnetischen Feldes auf das Dirac- Teilchen an. Ersetzt man den Impulsope-
rator $i\partial_\mu$ durch den Impuls p_μ so erkennt man den typischen Ausdruck $p - qA$ für die minimale Kopplung eines elektromagnetischen Feldes an ein Teilchen mit Impuls p .

Insgesamt folgern wir also aus der Lorentz-Invarianz der speziellen Relativitätstheorie und aus der globalen Phaseninvarianz der Quantenmechanik die Erhaltung einer Ladung und eines Teilchen-Stroms. Fordert man außerdem lokale Phaseninvarianz, so ergibt sich die Existenz eines Vektorfeldes, das masselos ist, Spin 1 hat und mit einer konstanten Ladung an den Vektorstrom des Teilchens koppelt. Man kann jedoch nicht die Existenz des geladenen Teilchens selber oder die Größe seiner elektrischen Ladung ableiten. Die Ladung ist demnach eine Naturkonstante.

4.4 Feynman- Diagramme

4.4.1 Helizitätsamplituden

Einfache Abschätzungen von Wirkungsquerschnitten kann man bereits erhalten, wenn man nur die Erhaltung der Chiralität am Vertex beachtet. In Abschnitt 3.3 wurde gezeigt, dass sich der Strom der QED in rein linkshändige und rein rechtshändige Komponenten zerlegen lässt,

$$\bar{u}\gamma^\mu u = \bar{u}_L\gamma^\mu u_L + \bar{u}_R\gamma^\mu u_R.$$

Da Photonen nur an diesen Strom koppeln kann man daher auch Wirkungsquerschnitte in solche Faktoren zerlegen. Im ultrarelativistischen Limes, $E \gg m$, werden Chiralität und Helizität gleich,

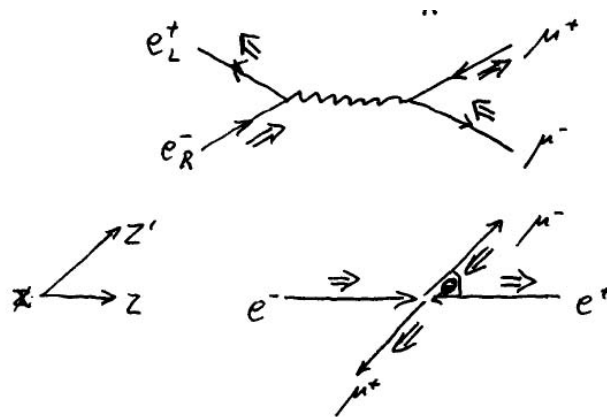
$$u_L = u^{(2)} \quad u_R = u^{(1)}$$

so dass auch die Spin-Richtungen festliegen. Aus der Drehimpulserhaltung folgt dann die Winkelverteilung der Wirkungsquerschnitte.

Als Beispiel betrachten wir den Prozess

$$e_L^+ e_R^- \rightarrow \mu_R^+ \mu_L^-$$

im Schwerpunktsystem (CMS).



Für Drehimpulszustände $|j, m\rangle$ gilt allgemein

$$J^2|j, m\rangle = j(j+1)|j, m\rangle$$

$$J_z|j, m\rangle = m|j, m\rangle$$

$$j = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots$$

$$m = -j, -j+1, \dots, j-1, j$$

Im Anfangszustand ist mit der eingezeichneten Wahl der z-Achse

$$e^- : |j_1, m_1\rangle = \left| \frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle$$

$$e^+ : |j_2, m_2\rangle = \left| \frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle.$$

für die gesamte z-Komponente also

$$m = m_1 + m_2 = 1.$$

Ebenso gilt für den Endzustand bezüglich der Achse z' der Auslaufenden Teilchen:

$$m' = -1$$

Für den Streuwinkel Θ zwischen Anfangs- und Endzustand gilt nun:

- Für $\Theta = 0 \Rightarrow z \hat{=} z'$ ist die Drehimpulserhaltung für J_z verletzt, da $m \neq m'$. Der Prozess ist also verboten.
- Für $\Theta = \pi \Rightarrow z \hat{=} -z'$ ist der Drehimpuls erhalten, der Prozess daher erlaubt.

Der Winkel Θ ist also nicht beliebig. Die Wahrscheinlichkeit verschiedener Θ erhält man, wenn man das System des Anfangszustands in die Richtung des Endzustands dreht. Bei Rotation von $|j, m\rangle$ zum Beispiel um die y-Achse gilt

$$d_{mm'}^j(\Theta) := \langle j, m' | e^{-i\Theta J_y} | j, m \rangle.$$

Für das Matrixelement M des Prozesses muß also gelten:

$$M \sim d_{mm'}^j$$

Die d- Funktionen sind nur vom Spin abhängig, gelten also für alle Prozesse mit gleicher Spin- Konfiguration. Mit der expliziten Form von $J_y = \frac{1}{2}\sigma_y$ folgt

$$d_{1-1}^1 = d_{-11}^1 = \frac{1}{2}(1 - \cos\Theta) \approx -\frac{t}{s},$$

mit dem erwarteten Verhalten für $\Theta = 0$ oder π . Hier sind s, t, u Mandelstamm-Variablen. Bei Umkehrung der Spins im Endzustand

$$e_L^+ e_R^- \rightarrow \mu_L^+ \mu_R^-$$

gilt

$$d_{11}^1 = d_{-1-1}^1 = \frac{1}{2}(1 + \cos\Theta) \approx -\frac{u}{s}.$$

Für den unpolarisierten (L und R Zustände gleich häufig) Prozess

$$e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$$

sind wegen Chiralitätserhaltung außer den genannten Amplituden nur noch

$$e_R^+ e_L^- \rightarrow \mu_L^+ \mu_R^- \quad (\sim d_{-11}^1)$$

$$e_R^+ e_L^- \rightarrow \mu_R^+ \mu_L^- \quad (\sim d_{-1-1}^1)$$

möglich. Addiert man alle Amplituden quadratisch auf, so erhält man

$$|\bar{M}|^2 \sim \left(-\frac{u}{s}\right)^2 + \left(-\frac{t}{s}\right)^2 = \frac{u^2 + t^2}{s^2}$$

Im ultrarelativistischen Limes ist dies das gesamte Matrixelement für unpolarisierte Streuung und identisch der vollständigen Berechnung über die Feynman-Regeln.

4.4.2 Störungsrechnung

Aus der Beschreibung der Quanten-Feldtheorie für Fermionen und Bosonen hat R. Feynman einfache Regeln abgeleitet, die sich für die Berechnung von Teilchenprozessen aller Art anwenden lassen. Grundlage hierfür ist die Störungsrechnung, bei der jeder Prozess durch eine Entwicklungsreihe beschrieben wird, die jeweils durch einen Satz von Feynman-Diagrammen dargestellt werden können. Als Beispiel laufe ein Teilchen mit der Wellenfunktion ψ_i auf ein Streuzentrum zu. Die auslaufende Wellenfunktion sei ψ_s . Die Wahrscheinlichkeit, das auslaufende Teilchen im Zustand ψ_f anzutreffen ist dann

$$\langle \psi_f | \psi_s \rangle = \langle \psi_f | S | \psi_i \rangle$$

wobei S als Streumatrix bezeichnet wird.

In der QED muss bei einem Streuprozess für ein Dirac-Teilchen die Gleichung

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(x) = q\gamma^\mu A_\mu(x) \psi(x) = V(x) \psi(x)$$

gelöst werden. Zur Bestimmung von $\psi(x)$ wird zunächst eine Lösung der Gleichung

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) D(x - x') = \delta^4(x - x')$$

gesucht. Hier ist die Green'sche Funktion $D(x - x')$ die Lösung für $\psi(x)$ im Falle eines punktförmigen Potentials an der Stelle x' . Die allgemeine Lösung für beliebige Potentiale folgt dann aus

$$\psi(x) = \int d^4x' D(x - x') V(x') \psi(x')$$

wie man durch Einsetzen zeigen kann³.

Da hier die rechte Seite auch von $\psi(x)$ abhängt ist die Lösung nicht einfach sondern muss durch Iteration (Störungsrechnung) bestimmt werden. Im Allgemeinen kann man damit jedoch nur Probleme lösen, bei denen die Störung klein ist.

Sehr weit vor dem Streuzentrum sollte die einfallende Welle die Lösung der freien Dirac-Gleichung sein, $\psi_{frei}(x)$, so dass man für kleine Störungen schreiben kann

$$\psi(x) = \psi_{frei}(x) + \text{Störung} \approx \psi_{frei}(x)$$

In diesem Fall kann man in erster Näherung ψ_{frei} in das Integral zur Berechnung von $\psi(x)$ einsetzen:

$$\begin{aligned} \psi^{(1)}(x) &\approx \psi_{frei}(x) + \text{Störung} \times \psi_{frei} \\ &= \psi_{frei}(x) + \int d^4x' D(x-x') V(x') \psi_{frei}(x') \end{aligned}$$

In nächster Näherung setzt man das Ergebnis $\psi^{(1)}$ als verbesserte Lösung in das Integral für $\psi^{(2)}$ ein:

$$\begin{aligned} \psi^{(2)}(x) &\approx \psi_{frei}(x) + \text{Störung} \times \psi^{(1)}(x) \\ &= \psi_{frei}(x) + \text{Störung} \times \psi_{frei}(x) + \text{Störung} \times \text{Störung} \times \psi_{frei}(x) \\ &= \psi_{frei}(x) + \int d^4x' D(x-x') V(x') \psi^{(1)}(x') \\ &= \psi_{frei}(x) + \int d^4x' D(x-x') V(x') \psi_{frei}(x') \\ &\quad + \int d^4x' \int d^4x'' D(x-x') V(x') D(x'-x'') V(x'') \psi_{frei}(x'') \end{aligned}$$

und so weiter für höhere Ordnungen der Störungsrechnung.

Im Falle der QED ist die Störung gegeben durch die rechte Seite der obigen Dirac-Gleichung,

$$V(x)\psi(x) = q\gamma^\mu A_\mu\psi(x)$$

³Beachtet man, dass die Integration über x' läuft und die Ableitung ∂_μ bezüglich x ist, so kann man beide vertauschen:

$$\begin{aligned} (i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) &= (i\gamma^\mu\partial_\mu - m) \int d^4x' D(x-x') V(x') \psi(x') \\ &= \int d^4x' (i\gamma^\mu\partial_\mu - m) D(x-x') V(x') \psi(x') \\ &= \int d^4x' \delta^4(x-x') V(x') \psi(x') \\ &= V(x) \psi(x) \end{aligned}$$

Die elektromagnetische Kopplung ist z.B. für ein Elektron die Elementarladung, $q = -e$, die mit der Feinstrukturkonstanten über

$$\alpha_{em} = \frac{e^2}{4\pi} \approx 1/137,036$$

zusammenhängt, so dass $e \approx 0,3$ im hier verwendeten Einheitensystem.

4.4.3 Propagator für Fermionen

Die Green'sche Funktion wird mittels einer Fourier-Transformation berechnet,

$$D(x - x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{-ip(x-x')} \tilde{D}(p).$$

Setzt man dies in die Definitionsgleichung für $D(x - x')$ ein,

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) D(x - x') = \delta^4(x - x')$$

so erhält man wegen

$$\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \tilde{D}(p) e^{-ip(x-x')} = \delta^4(x - x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{-ip(x-x')}$$

für die Fourier-Transformierte

$$(\gamma^\mu p_\mu - m) \tilde{D}(p) = 1.$$

Durch Multiplikation von links mit $(\gamma^\nu p_\nu + m)$ erhält man wegen $\gamma^\nu p_\nu \gamma^\mu p_\mu = p^\mu p_\mu$ als Lösung

$$\tilde{D}(p) = \frac{\gamma^\mu p_\mu + m}{p^\mu p_\mu - m^2}$$

Dieser Ausdruck hat Polstellen bei

$$p^2 - m^2 = p_0^2 - \vec{p}^2 - m^2 = (p_0 - E_p)(p_0 + E_p) = 0,$$

(hier soll $E_p = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ sein), also dann, wenn das Dirac-Teilchen reell ist. Es wird daher ein kleiner Imaginärteil $i\epsilon$ hinzugefügt, um Integrationen über die Greensche Funktion zu erlauben,

$$\tilde{D}(p) = \frac{\gamma^\mu p_\mu + m}{p^\mu p_\mu - m^2 + i\epsilon}$$

Am Ende einer Berechnung muss natürlich der Limes $\epsilon \rightarrow 0$ verwendet werden. Diese Fourier-Transformierte der Green'schen Funktion ist der Propagator eines Dirac-Teilchens. Er gilt für alle Wechselwirkungen, nicht nur für die QED.

Die Rücktransformation zu $D(x - x')$ erfolgt durch Integration:

$$D(x - x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{-ip(x-x')} \frac{\gamma^\mu p_\mu + m}{p^\mu p_\mu - m^2 + i\epsilon}$$

Insbesondere findet man für die Beziehung zwischen den Wellenfunktionen an verschiedenen Orten x und x' (siehe Anhang A.8):

$$\Psi(x) = i \int d\vec{x}' D(x - x') \gamma^0 \Psi(x')$$

$$\bar{\Psi}(x') = i \int d\vec{x} \bar{\Psi}(x) \gamma^0 D(x - x')$$

Aus Kausalitätsgründen gilt diese Gleichung für $t > t'$.

4.4.4 Propagator für das Photon

Mit der Lorentz-Bedingung $\partial_\alpha A^\alpha = 0$ vereinfacht sich die Maxwell-Gleichung

$$\partial_\alpha F^{\alpha\nu} = j^\nu$$

zu

$$\partial^\alpha \partial_\alpha A^\nu = j^\nu.$$

Mit dem Ansatz für die Green'sche Funktion

$$\partial^\alpha \partial_\alpha D^{\mu\nu}(x - x') = g^{\mu\nu} \delta^4(x - x')$$

ergeben sich als Lösungen für A^μ ,

$$A^\mu(x) = \int d^4x' D^{\mu\nu}(x - x') j_\nu(x'),$$

denn daraus folgt

$$\partial^\alpha \partial_\alpha A^\mu(x) = \int d^4x' \partial^\alpha \partial_\alpha D^{\mu\nu}(x - x') j_\nu(x') = j^\mu(x)$$

Benutzt man die Fourier-Transformation

$$D^{\mu\nu}(x - x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4q \tilde{D}^{\mu\nu}(q) e^{-iq(x-x')},$$

so folgt aus

$$\partial^\alpha \partial_\alpha D^{\mu\nu}(x - x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4q \tilde{D}^{\mu\nu}(q) (-q^2) e^{-iq(x-x')} = g^{\mu\nu} \delta^4(x - x')$$

und Vergleich mit der Exponentialdarstellung der δ -Funktion,

$$\tilde{D}^{\mu\nu}(q) = \frac{-g^{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon}.$$

Dies ist der Propagator für das Photon.

4.4.5 Propagator für Spin-0 und Spin-1 Teilchen

Die bisher abgeleiteten Propagatoren für Spin-1/2 Teilchen und masselose Spin-1 Teilchen lassen sich auch direkt aus den Bewegungsgleichungen für freie Felder ablesen, wenn man den Impuls-Operator durch den Impuls ersetzt, $i\partial_\mu \rightarrow p_\mu$, und symbolisch schreibt:

Dirac-Gl.:

$$\begin{aligned} (\gamma^\mu p_\mu - m) \psi &= 0 \\ \tilde{D}(p) &= \frac{1}{\gamma^\mu p_\mu - m} = \frac{\gamma^\mu p_\mu + m}{p^\mu p_\mu - m^2 + i\epsilon} \end{aligned}$$

Analog erhält man für den Propagator eines Spin-0 Teilchens Klein-Gordon-Gl.:

$$\begin{aligned} (-p^2 + m^2) \Phi &= 0 \\ \tilde{D}(p) &= \frac{i}{p^2 - m^2} \end{aligned}$$

Für ein Spin-1 Teilchen ohne Masse gilt die Maxwell-Gl.:

$$\begin{aligned} q^2 A^\nu &= 0 \quad ; ; \quad (q = \text{Impuls des } \gamma) \\ \tilde{D}^{\mu\nu}(q) &= \frac{-g^{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon}. \end{aligned}$$

Für ein Spin-1 Teilchen mit Masse gilt die Proca-Gl.:

$$\begin{aligned} (\partial^\nu \partial_\nu + m^2) W^\mu - \partial^\mu \partial^\nu W_\nu &= 0 \\ \tilde{D}^{\mu\nu}(q) &= \frac{-g^{\mu\nu} + q^\mu q^\nu / m^2}{q^2 - m^2 + i\epsilon}. \end{aligned}$$

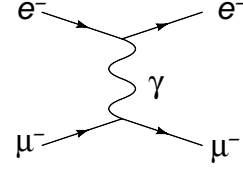
4.4.6 Matrixelement

Die Übergangswahrscheinlichkeit in 1. Ordnung ergibt sich, wenn man das Photonfeld berechnet, das aufgrund eines Stroms $j_\nu(x')$ entsteht, es zum Ort x propagiert und dort auf einen zweiten Strom $j_\mu(x)$ wirken lässt. Da die Ströme aus ausgedehnten Wellenfunktionen bestehen integriert man dabei über alle Orts-Zeit Koordinaten x und x' .

Wir betrachten die Streuung zweier Fermionen aneinander, wobei die Übergangswahrscheinlichkeit als Funktion der vorgegebenen Impulse der einlaufenden Teilchen (p_1, p_2) und der auslaufenden Teilchen (p_3, p_4) berechnet werden soll. Der Strom des Elektrons ist

$$j_e^\nu(x') = q_e \bar{\psi}_3(x') \gamma_\nu \psi_1(x')$$

$$e^-(p_1) \mu^-(p_2) \rightarrow e^-(p_3) \mu^-(p_4)$$



wobei ψ_1 die Wellenfunktion des einlaufenden Elektrons mit Impuls p_1 bezeichnen soll, etc.. Das Photon-Feld dieses Stroms, berechnet am Ort x , ergibt sich dann aus dem Photon-Propagator zu

$$A^\mu(x) = \int d^4x' D^{\mu\nu}(x-x') j_\nu(x').$$

Die Übergangswahrscheinlichkeit ergibt sich aus der Anwendung dieses Potentials auf den Myon-Strom,

$$S_{fi}^{(1)} = iq_m \int d^4x \bar{\psi}_4(x) \gamma_\mu A^\mu(x) \psi_2(x).$$

Hier ist q_m die Ladung des Myons. In unendlicher Entfernung voneinander sind die ein- und auslaufenden Teilchen durch ebene Wellen gegeben,

$$\begin{aligned} \psi_1(x') &= u_1 e^{-ip_1x'} & \psi_3(x') &= u_3 e^{-ip_3x'} \\ \psi_2(x) &= u_2 e^{-ip_2x} & \psi_4(x) &= u_4 e^{-ip_4x} \end{aligned}$$

Setzt man dies zusammen mit der Fourier-Darstellung des Propagators des Photons

$$\begin{aligned} D^{\mu\nu}(x-x') &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4q \tilde{D}^{\mu\nu}(q) e^{-iq(x-x')} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4q \frac{-g^{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon} e^{-iq(x-x')}, \end{aligned}$$

in die Gleichung für die Übergangswahrscheinlichkeit ein, so folgt

$$\begin{aligned} S_{fi}^{(1)} &= iq_m \int d^4x \bar{\psi}_4(x) \gamma_\mu A^\mu(x) \psi_2(x) \\ &= iq_m \int d^4x \bar{u}_4 e^{ip_4x} \gamma_\mu \int d^4x' \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4q \frac{-g^{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon} e^{-iq(x-x')} \left(q_e \bar{u}_3 e^{ip_3x'} \gamma_\nu u_1 e^{-ip_1x'} \right) u_2 e^{-ip_2x} \\ &= \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4q \int d^4x e^{i(p_4 - q - p_2)x} \int d^4x' e^{i(p_3 + q - p_1)x'} q_m \bar{u}_4 \gamma_\mu u_2 \frac{-g^{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon} q_e \bar{u}_3 \gamma_\nu u_1 \\ &= i(2\pi)^4 \int d^4q \delta^4(p_4 - q - p_2) \delta^4(p_3 + q - p_1) q_m \bar{u}_4 \gamma_\mu u_2 \cdot \frac{-g^{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon} \cdot q_e \bar{u}_3 \gamma_\nu u_1. \end{aligned}$$

Hierbei wurden die e -Funktionen so zusammengefasst, dass die Integrale über x, x' jeweils δ Funktionen ergeben. Da q der 4-er Impuls des Photons ist bedeutet die Integration über d^4q , dass alle möglichen Impulse des Photons berücksichtigt werden. Allerdings bedeuten die beiden δ -Funktionen, dass Energie und Impulserhaltung an jedem Vertex gilt, und damit auch für die Reaktion insgesamt,

$$p_3 - p_1 + q = 0, \quad p_4 - p_2 - q = 0, \quad p_1 + p_2 = p_3 + p_4.$$

Daher kann der 4-er Impulsübertrag $q = p_1 - p_3 = p_4 - p_2$ nur einen Wert annehmen, so dass die Integration über d^4q das Resultat ergibt

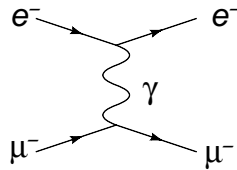
$$S_{fi}^{(1)} = i(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \cdot q_m \bar{u}_4 \gamma_\mu u_2 \cdot \frac{-g^{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon} \cdot q_e \bar{u}_3 \gamma_\nu u_1.$$

Übergangswahrscheinlichkeit $S_{fi}^{(1)}$ und Matrixelement \mathcal{M}_{fi} hängen jetzt wie folgt zusammen:

$$\begin{aligned} S_{fi}^{(1)} &= -i(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \mathcal{M}_{fi} \\ -i\mathcal{M}_{fi} &= iq_m \bar{u}_4 \gamma_\mu u_2 \cdot \frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon} \cdot iq_e \bar{u}_3 \gamma_\nu u_1. \end{aligned}$$

4.4.7 Feynman-Regeln

Der hier gewonnene Ausdruck des Matrixelements \mathcal{M}_{fi} für den Prozess $e^-(p_1) \mu^-(p_2) \rightarrow e^-(p_3) \mu^-(p_4)$ lässt sich graphisch als Feynman-Diagramm darstellen. Andererseits



kann man bereits an der Lagrange-Dichte die existierenden Teilchen und ihre Wechselwirkungen ablesen und so die erlaubten Feynmangraphen konstruieren. Jedem Feynman-Graph kann man dann mit folgenden Regeln ein Matrixelement zuschreiben, ohne die obige detaillierte Rechnung durchführen zu müssen:

- Externe Fermion-Linien erhalten die entsprechenden Spinoren für einlaufende (u, \bar{v}) und auslaufende (\bar{u}, v) Teilchen oder Antiteilchen.
- Für jeden Photon-Vertex führt man einen Vertexfaktor $iq_{el}\gamma^\mu$ zwischen den Spinoren ein, so dass sich ein Vektorstrom mit der elektrischen Ladung q_e ergibt, z.B. $iq_e \bar{u} \gamma^\mu u$.

- Interne Linien werden durch die entsprechenden Propagatoren ausgedrückt, also z.B. $\frac{-ig_{\mu\nu}}{p^2}$ für ein Photon mit 4-er Impuls p .
- Es gilt 4-er Impulserhaltung an jedem Vertex.

Fälle mit anderen externen oder internen Teilchen sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst. Die Faktoren $-1, i$ sind teilweise Konvention, aber bei Interferenzen und Diagrammen höherer Ordnung von Bedeutung.

TABLE 6.2
Feynman Rules for $-i\mathcal{R}$

		Multiplicative Factor
• External Lines		
Spin 0 boson (or antiboson)		1
Spin $\frac{1}{2}$ fermion (in, out)		u, \bar{u}
antifermion (in, out)		\bar{v}, v
Spin 1 photon (in, out)		e_μ, e_μ^*
• Internal Lines—Propagators (need $+i\epsilon$ prescription)		
Spin 0 boson		$\frac{i}{p^2 - m^2}$
Spin $\frac{1}{2}$ fermion		$\frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2}$
Massive spin 1 boson		$\frac{-i(g_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu / M^2)}{p^2 - M^2}$
Massless spin 1 photon (Feynman gauge)		$\frac{-ig_{\mu\nu}}{p^2}$
• Vertex Factors		
Photon—spin 0 (charge $-e$)		$ie(p + p')^\mu$
Photon—spin $\frac{1}{2}$ (charge $-e$)		$ie\gamma^\mu$

Loops: $\int d^4k / (2\pi)^4$ over loop momentum; include -1 if fermion loop and take the trace of associated γ -matrices

Identical Fermions: -1 between diagrams which differ only in $e^- \leftrightarrow e^-$ or initial $e^- \leftrightarrow$ final e^-

4.5 Wirkungsquerschnitt und Matrixelemente

4.5.1 Fermi's Goldene Regel I

Bei Streuprozessen gibt der Wirkungsquerschnitt die Wahrscheinlichkeit für eine Streuung je einlaufendem Teilchen an. Der WQ soll also die Reaktion der Teilchen charakterisieren und gleichzeitig unabhängig von der Anzahl der einlaufenden Teilchen, also Experiment-unabhängig, sein.

Ein einzelnes Teilchen mit geometrischer Querschnittsfläche $\sigma = \pi r^2$ befinde sich in einer Ebene der Fläche A . Trifft ein anderes, viel kleineres Teilchen an einem beliebigen Ort auf die Fläche, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich die beiden Teilchen treffen gleich

$$P_1 = \sigma/A.$$

Ist das eintreffende Teilchen ebenfalls ausgedehnt, so stellt σ die effektive Querschnittsfläche der Reaktion dar, eben den Wirkungsquerschnitt (WQ). Bei sehr kleinen Elementarteilchen repräsentiert der WQ die effektive Querschnittsfläche oder (Reichweite)² der Wechselwirkung zwischen den Teilchen.

Als Einheit des WQ ist ein *barn* gebräuchlich, wobei

$$1\text{barn} = 1b = 10^{-28}\text{m}^2.$$

Ein Proton mit Radius $r \approx 1\text{fm}$ hat also einen geometrischen WQ von $\sigma \approx 31\text{mb}$.

Trifft anstelle eines einzelnen Teilchens ein Teilchenstrahl mit Anzahl-Dichte n_1 und Geschwindigkeit v_1 auf die Fläche, so werden in einer Zeit T insgesamt

$$N_1 = n_1 v_1 T A$$

Teilchen die Fläche treffen. Für den Teilchenstrahl ist die Anzahl der Streuprozesse pro Zeit ("Übergangsrate") daher

$$\frac{P_S}{T} = \frac{P_1 N_1}{T} = \frac{\sigma n_1 v_1 T A}{AT} = \sigma n_1 v_1.$$

Trifft der Teilchenstrahl nicht auf ein einzelnes Teilchen sondern auf N_2 Teilchen in einem Volumen V (Teilchendichte n_2), so ist die Anzahl der Streuprozesse um diesen Faktor N_2 erhöht,

$$\frac{P_S}{T} = \sigma n_1 v_1 N_2 = \sigma n_1 n_2 v_1 V.$$

Für den allgemeinen Fall, dass sich auch die Teilchen N_2 bewegen, ist die Differenz der Geschwindigkeiten $|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|$ maßgebend. Außerdem muss berücksichtigt werden, dass man experimentell bei einer $2 \rightarrow 2$ Reaktion ($p_1 + p_2 = p_3 + p_4$) die Teilchen im Endzustand im Impulsintervall $d^3p_3 d^3p_4$ beobachtet. Der Lorentz-invariante Phasenraumfaktor hierfür, d.h. die Anzahl der quantenmechanischen Zustände in diesem Bereich ist (s.u.)

$$\frac{V}{(2\pi)^3} \frac{d^3p_3}{2E_3} \cdot \frac{V}{(2\pi)^3} \frac{d^3p_4}{2E_4}.$$

Damit ergibt sich insgesamt für den Wirkungsquerschnitt:

$$d\sigma = \frac{P_S / (TV)}{n_1 n_2 |\vec{v}_1 - \vec{v}_2|} \frac{V}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_3}{2E_3} \cdot \frac{V}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_4}{2E_4}.$$

oder symbolisch

$$d\sigma = \frac{\text{Übergangsrate x Phasenraum}}{\text{Teilchenfluss}}$$

Dies ist Fermi's Goldene Regel.

- Das Matrix-Element beinhaltet die Dynamik der QED
- Der Phasenraum beinhaltet die Kinematik
- Der Flussfaktor dient der Normierung des Flusses der einlaufenden Teilchen

4.5.2 Zustandsdichte

Gesucht ist die Anzahl der quantenmechanisch erlaubten Zustände eines Teilchens in einem Würfel mit Volumen $V = L^3$. Die Anzahl der Teilchen im Würfel bleibt konstant, wenn periodische Randbedingungen für die Wellenfunktion und deren Ableitung vorliegen. In einer Dimension heist das

$$e^{-ip_x x} = e^{-ip_x (x+L)},$$

so dass $Lp_x = 2\pi n$, (mit $n = 1, 2, \dots$). Damit gilt für die Anzahl der Zustände dn im Bereich von p_x bis $p_x + dp_x$

$$dn = dp_x \frac{L}{2\pi},$$

oder in 3 Dimensionen

$$dn = d^3 p \frac{V}{(2\pi)^3}.$$

Bei $2E$ Teilchen im Volumen V ist damit die

$$\text{Anzahl der Zustände / Teilchen} = \frac{V}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p}{2E}.$$

4.5.3 Teilchenfluss der einlaufenden Teilchen

Der Fluss der einfallenden Teilchen hängt von ihrer Dichte sowie ihrer Differenzgeschwindigkeit $|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|$ ab, wobei angenommen ist, dass die Geschwindigkeiten entgegengesetzt gerichtet sind. Die Lösungen der Dirac-Gleichung werden so normiert ($N = \sqrt{(E+m)/V}$), dass die Teilchendichten

$$j^0 = \bar{\psi} \gamma^0 \psi = N^2 \bar{u} u = 2E/V$$

betragen. Insgesamt ist damit der Fluss bezogen auf das Reaktionsvolumen V

$$\begin{aligned}
F_V &= |\vec{v}_1 - \vec{v}_2| \frac{2E_1}{V} \frac{2E_2}{V} = (v_1 + v_2) 2E_1 2E_2/V^2 \\
&= \left(\frac{|\vec{p}_1|}{E_1} + \frac{|\vec{p}_2|}{E_2} \right) 2E_1 2E_2/V^2 = \frac{4}{V^2} (|\vec{p}_1|E_2 + |\vec{p}_2|E_1) \\
&= \frac{4}{V^2} \sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2},
\end{aligned}$$

wie man durch explizites Ausrechnen des 4-er Skalarprodukts $p_1 p_2$ in der letzten Zeile sofort zeigen kann. Insbesondere gilt:

	<u>CMS</u>	<u>Fixed Target</u>
	$\vec{p}_i^* = \vec{p}_1^* = -\vec{p}_2^*$	$\vec{p}_2^* = 0$
$V^2 F_V = 4\sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}$	$= 4 \vec{p}_i^* (E_1^* + E_2^*) = 4 \vec{p}_i^* \sqrt{s}$	$= 4m_2 \vec{p}_1^* = 2s$

4.5.4 Matricelement

Für quantenmechanische Prozesse ist P_S die Wahrscheinlichkeit der Streuung in einen bestimmten Endzustand $|f\rangle$. Die Streuung aus dem Anfangszustand $|i\rangle$ in den gestreuten Zustand $|s\rangle$ sei gegeben durch die Streumatrix S ,

$$|s\rangle = S|i\rangle$$

wobei die gestreuten Zustände ein vollständiges System von Eigenzuständen sein müssen,

$$\sum_s |s\rangle \langle s| = 1.$$

Die Wahrscheinlichkeit einen bestimmten Endzustand $|f\rangle$ zu beobachten ist daher

$$|\langle f||s\rangle|^2 = |\langle f|S|i\rangle|^2 = |S_{fi}|^2$$

Für S_{fi} hatten wir abgeleitet

$$\begin{aligned}
S_{fi}^{(1)} &= -i(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \mathcal{M}_{fi} \\
-i\mathcal{M}_{fi} &= iq_m \bar{u}_4 \gamma_\mu u_2 \cdot \frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon} \cdot iq_e \bar{u}_3 \gamma_\nu u_1.
\end{aligned}$$

Bei der Berechnung von $|S_{fi}|^2$ wird demnach eine δ Funktion quadriert werden müssen. Dies ergibt⁴

$$(\delta^4(P))^2 = \delta^4(P) \frac{VT}{(2\pi)^4}.$$

⁴Für δ -Funktionen gilt bei Integration $\delta^4(p) f(p) = \delta^4(p) f(0)$ und demnach auch $\delta^4(p) \delta^4(p) = \delta^4(p) \delta^4(0)$. Wegen

$$\delta^4(p) = \lim_{T, V \rightarrow \text{inf}} \left(\frac{1}{(2\pi)^4} \int_T dt \int_V d^3x e^{-ipx} \right)$$

Damit folgt

$$|S_{fi}|^2 = |\mathcal{M}_{fi}|^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) VT.$$

4.5.5 Fermi's Goldene Regel II

Der Wirkungsquerschnitt setzt sich für $2 \rightarrow 2$ Streuprozesse mit $p_1 + p_2 = p_3 + p_4$ also zusammen aus

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{P_S / (TV)}{n_1 n_2 |\vec{v}_1 - \vec{v}_2|} \frac{V}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_3}{2E_3} \cdot \frac{V}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_4}{2E_4} \\ &= |\mathcal{M}_{fi}|^2 \frac{V^4}{4\sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \frac{d\vec{p}_3}{(2\pi)^3 2E_3} \frac{d\vec{p}_4}{(2\pi)^3 2E_4} \end{aligned}$$

Die Spinoren in \mathcal{M}_{fi} beinhalten noch die Normierung $\sqrt{(e+m)/V}$, so dass sich V heraushebt. Es wird daher ab jetzt $M_{fi} = \mathcal{M}_{fi} V^2$ verwendet, was so verstanden werden soll, dass bei der Berechnung von Matrixelementen M ab jetzt als Normierung der Spinoren $N = \sqrt{E+m}$ verwendet wird. Damit ist der Wirkungsquerschnitt

$$d\sigma = |\mathcal{M}_{fi}|^2 \underbrace{\frac{1}{4\sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}}}_{\text{einlaufender Teilchenfluss}} \underbrace{(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \frac{d\vec{p}_3}{(2\pi)^3 2E_3} \frac{d\vec{p}_4}{(2\pi)^3 2E_4}}_{\text{Lorentz-invarianter Phasenraum (dLips = dQ)}}$$

Dies ist die explizite Form von Fermi's goldener Regel für $2 \rightarrow 2$ Prozesse. Alle Teile sind explizit Lorentz-invariant.

4.5.6 Integration des Phasenraums

Der Wirkungsquerschnitt ist augenscheinlich vielfach differentiell in $d^3 \vec{p}_3$ und $d^3 \vec{p}_4$. Er sollte aber nur von zwei dieser sechs Variablen abhängen, denn es gilt 4-er Impulserhaltung. Da die Energien der Teilchen durch die Anfangsbedingungen und die Massen festliegen, müssen die verbleibenden Variablen der Streuwinkel und der Azimutalwinkel eines der Teilchen sein. Die Richtung des anderen Teilchens ergibt sich dann aus der Impulserhaltung. Das Matrixelement kann aus Symmetriegründen nicht vom Azimutalwinkel um die Kollisionsachse abhängen. Es ist also $M_{fi} = M_{fi}(\theta)$. Da der Flussfaktor nicht von den auslaufenden Teilchen abhängt kann demnach der

folgt demnach auch

$$\delta^4(0) = \lim_{T, V \rightarrow \text{inf}} \frac{VT}{(2\pi)^4}.$$

Der Grenzwert für alle Zeite und den ganzen Raum muss natürlich noch durchgeführt werden. Da jedoch sowohl V als auch T in der endgültigen Formel für den Wirkungsquerschnitt nicht mehr auftauchen ändert der Limes nichts am Endresultat für diese Berechnung und wird daher nicht weiter mitgeführt.

Phasenraum getrennt integriert werden, bis auf die Winkelvariablen. Dies ist besonders einfach im CMS System, da die δ - Funktion die 4-er Impulserhaltung garantiert. Im Schwerpunktsystem (CMS) gilt

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0, \quad ; \quad \sqrt{s} = E_1 + E_2$$

und

$$\delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) = \delta(\sqrt{s} - E_3(p_3) - E_4(p_4)) \delta^3(-\vec{p}_3 - \vec{p}_4),$$

wobei explizit die Energien von den Impulsen abhängen,

$$E_3(p_3) = \sqrt{\vec{p}_3^2 + m_3^2}, \quad E_4(p_4) = \sqrt{\vec{p}_4^2 + m_4^2}.$$

Integriert man zunächst über $d^3\vec{p}_4$ so gilt für den Phasenraum

$$\begin{aligned} dQ &= \int \frac{1}{4(2\pi)^2} \delta(\sqrt{s} - E_3(p_3) - E_4(p_4)) \delta^3(-\vec{p}_3 - \vec{p}_4) \frac{d^3\vec{p}_3 d^3\vec{p}_4}{E_3(p_3) E_4(p_4)} \\ &= \int \frac{1}{4(2\pi)^2} \delta(\sqrt{s} - E_3(p_3) - E_4(p_3)) \frac{d^3\vec{p}_3}{E_3(p_3) E_4(p_3)} \end{aligned}$$

Führt man die verbleibende Integration in Kugelkoordinaten aus, $d^3\vec{p}_3 = \vec{p}_3^2 dp_3 d\Omega$, so kann man die δ - Funktion nach ihrer Polstelle entwickeln⁵ und erhält

$$\begin{aligned} dQ &= \int \frac{1}{4(2\pi)^2} \delta(\sqrt{s} - E_3(p_3) - E_4(p_3)) \frac{p_3^2 dp_3 d\Omega}{E_3(p_3) E_4(p_3)} \\ &= \int \frac{1}{4(2\pi)^2} \frac{\delta(p_3 - p_f)}{|d(E_3(p_3) + E_4(p_3))/dp_3|} \frac{p_3^2 dp_3 d\Omega}{E_3(p_3) E_4(p_3)} \\ &= \frac{1}{4(2\pi)^2} \frac{1}{|p_f/E_3(p_f) + p_f/E_4(p_f)|} \frac{p_f^2 d\Omega}{E_3(p_f) E_4(p_f)} \\ dQ &= \frac{1}{4(2\pi)^2} \frac{p_f}{\sqrt{s}} d\Omega \end{aligned}$$

Hierbei ist p_f der Impuls der beiden Teilchen im Endzustand, so dass Energieerhaltung erfüllt ist, $\sqrt{s} = E_3(p_f) + E_4(p_f)$.

⁵Für die δ - Funktion gilt allgemein

$$\delta(f(x)) = \sum_{i=1,n} \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|}$$

wobei $f'(x_i)$ die Ableitung der Funktion $f(x)$ an den Nullstellen x_i ist ($f(x_i) = 0$).

4.5.7 Wirkungsquerschnitt im CMS

Im Schwerpunktsystem ergibt sich aus der goldenen Regel mit dem Flussfaktor

$$F_V = 4|\vec{p}_i|\sqrt{s}$$

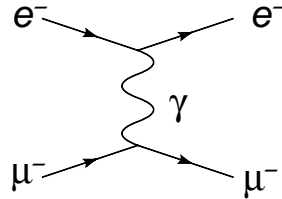
für den Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2} \frac{1}{s} \frac{p_f}{p_i} |M_{fi}|^2$$

- Aus dem Phasenraum folgt, dass σ proportional zum Impuls p_f der Teilchen im Endzustand ist. Die Produktion schwerer Teilchen ist also durch den Phasenraum unterdrückt.
- Bei hohen Energien werden die Massen der Teilchen zunehmend unwichtiger. In diesem Limes ist $p_f = p_i$ und der Wirkungsquerschnitt fällt quadratisch mit der Schwerpunktsenergie \sqrt{s} . Da außer den Massen nur \sqrt{s} die Dimension einer Energie trägt ist dies auch aus Dimensionsgründen erforderlich.
- Der Wirkungsquerschnitt hängt nur durch das Matrixelement vom Streuwinkel Θ ab.

4.6 Prozesse der QED

4.6.1 Berechnung des Prozesses $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$



Beispielhaft soll das Matrixelement des Prozesses $e^-(p_1) \mu^-(p_2) \rightarrow e^-(p_3) \mu^-(p_4)$ berechnet werden, wobei der 4-er Impuls des ausgetauschten Photons $q = p_1 - p_3$ ist. Das Matrixelement M ergibt sich aus den Feynmanregeln der QED (hier mit $e^2 = q_e q_m$):

$$\begin{aligned}
 -iM &= \underbrace{\bar{u}_3 i e \gamma^\mu u_1}_{\text{e-Strom}} \underbrace{\frac{-i g_{\mu\nu}}{q^2}}_{\gamma\text{-Propagator}} \underbrace{\bar{u}_4 i e \gamma^\nu u_2}_{\mu\text{-Strom}} \\
 M &= -\frac{e^2}{q^2} \bar{u}_3 \gamma^\mu u_1 \bar{u}_4 \gamma_\mu u_2,
 \end{aligned}$$

wobei die Spinoren $u_i = u(p_i, s_i)$ von den Impulsen p_i und Spin-Orientierungen s_i abhängen. Das Matrixelement für die Streuung unpolarisierter Teilchen ergibt sich aus der

- Mittelung über die einlaufenden Spin-Zustände,
- Summation über die auslaufenden Spin-Zustände.

$$|\bar{M}|^2 = \frac{e^4}{q^4} L_e^{\mu\nu} L_{\mu\nu}^{\text{Muon}}$$

mit dem Elektron-Tensor (Muon Tensor analog)

$$\begin{aligned}
 L_e^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \sum_{\text{e-Spin}} [\bar{u}_3 \gamma^\mu u_1] [\bar{u}_3 \gamma^\nu u_1]^* \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{\text{e-Spin}} [\bar{u}_3 \gamma^\mu u_1] [\bar{u}_1 \gamma^\nu u_3]
 \end{aligned}$$

wobei der Spin-Faktor $\frac{1}{2}$ für den Mittelwert über verschiedene Spin-Richtungen notwendig ist. Ausgeschrieben und getrennt summiert über die einlaufenden und aus-

laufenden Spin-Zustände ist dies

$$\begin{aligned}
L_e^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \sum_{s_3} \sum_{s_1} \bar{u}_{3,a} \gamma_{ab}^\mu u_{1,b} \bar{u}_{1,c} \gamma_{cd}^\nu u_{3,d} \\
&= \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{s_3} u_{3,d} \bar{u}_{3,a} \gamma_{ab}^\mu}_{(\not{p}_3 + m_e)_{da}} \underbrace{\sum_{s_1} u_{1,b} \bar{u}_{1,c} \gamma_{cd}^\nu}_{(\not{p}_1 + m_e)_{bc}} \\
&= \frac{1}{2} \text{Spur} \left[(\not{p}_3 + m_e) \gamma^\mu (\not{p}_1 + m_e) \gamma^\nu \right]
\end{aligned}$$

unter Benutzung der Vollständigkeitsrelationen der Spinoren und der Notation $\not{p} = \gamma_\alpha p^\alpha$. Die Spurtheoreme⁶ erlauben die Vereinfachung

$$\begin{aligned}
L_e^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \text{Spur} \left[(\not{p}_3 + m_e) \gamma^\mu (\not{p}_1 + m_e) \gamma^\nu \right] \\
&= \frac{1}{2} \text{Spur} \left[\not{p}_3 \gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\nu + m_e^2 \gamma^\mu \gamma^\nu \right] \\
&= 2(p_3^\mu p_1^\nu + p_3^\nu p_1^\mu - (p_3 p_1 - m_e^2) g^{\mu\nu})
\end{aligned}$$

Mit dem analogen Resultat für den Myon-Tensor ist das Resultat für das Matrixelement:

$$\begin{aligned}
|\bar{M}|^2 &= \frac{e^4}{q^4} L_e^{\mu\nu} L_{\mu\nu}^{\text{Muon}} \\
&= \frac{8e^4}{q^4} [(p_3 p_4)(p_1 p_2) + (p_3 p_2)(p_1 p_4) - m_e^2 p_2 p_4 - m_\mu^2 p_1 p_3 + 2m_e^2 m_\mu^2]
\end{aligned}$$

Dies ist das exakte Matrix-Element für unpolarisierte $e^- \mu^-$ Streuung in niedrigster Ordnung. Das Ergebnis ist offensichtlich Lorentz-invariant.

Im ultra-relativistischen Limes kann man die Massen-Terme vernachlässigen. Die Skalarprodukte lassen sich durch die in gleicher Näherung geltenden Mandelstam-Variablen ausdrücken.

$$\begin{aligned}
s &= (p_1 + p_2)^2 = m_e^2 + m_\mu^2 + 2p_1 p_2 \approx 2p_1 p_2 \approx 2p_3 p_4 \\
t &= (p_1 - p_3)^2 = 2m_e^2 - 2p_1 p_3 \approx -2p_1 p_3 = 2m_\mu^2 - 2p_2 p_4 \approx -2p_2 p_4 \\
u &= (p_1 - p_4)^2 = m_e^2 + m_\mu^2 - 2p_1 p_4 \approx -2p_1 p_4 = m_e^2 + m_\mu^2 - 2p_2 p_3 \approx -2p_2 p_3
\end{aligned}$$

⁶Die Spur einer ungeraden Anzahl von γ -Matrizen ist Null.

Weiter gilt $\text{Spur}(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}$, $\text{Spur}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\sigma) = 4(g^{\mu\nu} g^{\lambda\sigma} - g^{\mu\lambda} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\lambda})$,
 $\text{Spur}(\not{p}_1 \gamma^\mu \not{p}_2 \gamma^\nu) = 4(p_1^\mu p_2^\nu + p_1^\nu p_2^\mu - (p_1 p_2) g^{\mu\nu})$, $\text{Spur}(\not{a} \not{b} \not{c} \not{d}) = 4[(ab)(cd) - (ac)(bd) + (ad)(bc)]$.

Wegen $t = q$ folgt der Wirkungsquerschnitt für unpolarisierte ultrarelativistische Streuung,

$$\begin{aligned} |\bar{M}|^2 &\approx \frac{8e^4}{t^2} \left(\frac{1}{4}s^2 + \frac{1}{4}u^2 \right) \\ &= 2e^4 \frac{s^2 + u^2}{t^2} \end{aligned}$$

Das Ergebnis stimmt mit dem früher erhaltenen Resultat für Helizitätsamplituden überein.

- Der Wirkungsquerschnitt ist proportional zum Quadrat der Ladung an jedem Vertex, für $e\mu$ Streuung also proportional zu $q_e^2 q_m^2 = e^4$.
- Der Nenner t ist der Photon-Propagator und unterdrückt Streuung mit großem 4-er Impulsübertrag.
- Der Term mit s^2 entsteht durch Streuung mit entgegengesetzten Spins, so dass der Gesamtspin $J_Z = 0$ ist, denn s beinhaltet keine Winkelinformation (isotrop, da keine Richtung ausgezeichnet ist).
- Der Term mit u entspricht demnach Streuung mit $J_Z = 1$, also gleichgerichteten Spins der einlaufenden Teilchen.

Mit

$$t = -\frac{s}{2}(1 - \cos\Theta^*) \quad \text{und} \quad u = -\frac{s}{2}(1 + \cos\Theta^*)$$

folgt im CMS für ultrarelativistische Streuung

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{1}{64\pi^2} \frac{1}{s} \frac{p_f}{p_i} |\bar{M}|^2 \\ &= \frac{1}{64\pi^2 s} 2e^4 \frac{1 + \left(\frac{1+\cos\Theta^*}{2}\right)^2}{\left(\frac{1-\cos\Theta^*}{2}\right)^2} \end{aligned}$$

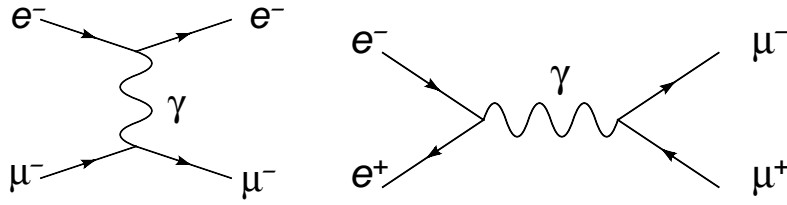
4.6.2 Crossing

Alle QED Prozesse hängen von Strömen wie $j_\mu = \bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi$ ab. Ähnliche Rechnungen für andere $2 \rightarrow 2$ Prozesse lassen sich daher durch “Crossing” aus dem $e\mu \rightarrow e\mu$ Wirkungsquerschnitt ableiten.

Für den t-Kanal Prozess

$$\begin{aligned} e^- \mu^- &\rightarrow e^- \mu^- \\ p_1 + p_2 &= p_3 + p_4 \end{aligned}$$

ergab sich



$$\begin{aligned}
M &= \frac{-e^2}{(p_1 - p_3)^2} (\bar{u}_3 \gamma^\mu u_1) (\bar{u}_4 \gamma_\mu u_2) \\
|\bar{M}|^2 &= \frac{e^4}{(p_1 - p_3)^4} \sum_{s_1, s_3} (\bar{u}_3 \gamma^\mu u_1) (\bar{u}_3 \gamma^\nu u_1)^* \sum_{s_2, s_4} (\dots) \\
&= \frac{e^4}{(p_1 - p_3)^4} \text{Spur}((\not{p}_1 + m_1) \gamma^\mu (\not{p}_3 + m_3)) \gamma^\nu \text{Spur}(\dots) \\
&= \frac{8e^4}{(p_1 - p_3)^4} \left[\underbrace{(p_1 p_2)(p_3 p_4)}_{s^2/4} + \underbrace{(p_1 p_4)(p_2 p_3)}_{u^2/4} - \underbrace{p_1 p_3}_{-t/2} m_2^2 - \underbrace{p_2 p_4}_{-t/2} m_1^2 + 2m_1^2 m_2^2 \right]
\end{aligned}$$

mit $m_1 = m_3$ und $m_2 = m_4$. Entscheidend war die Vollständigkeitsrelation

$$\sum_s u_s \bar{u}_s = \not{p} + m, \quad \sum_s v_s \bar{v}_s = \not{p} - m$$

Für ähnliche Ströme mit Teilchen und Antiteilchen-Spinoren gilt nun

$$\begin{aligned}
\sum_{s_1, s_3} (\bar{u}_3 \gamma^\mu u_1) (\bar{u}_3 \gamma^\nu u_1)^* &= \text{Spur}((\not{p}_1 + m_1) \gamma^\mu (\not{p}_3 + m_3) \gamma^\nu) \\
\bar{v}_3 \quad v_1 \quad \bar{v}_3 \quad v_1 &= \quad \quad \quad - \quad \quad - \\
\bar{v}_3 \quad u_1 \quad \bar{v}_3 \quad u_1 &= \quad \quad \quad + \quad \quad - \\
\bar{u}_3 \quad v_1 \quad \bar{u}_3 \quad v_1 &= \quad \quad \quad - \quad \quad +
\end{aligned}$$

Wendet man dies z.B. auf den s -Kanal Prozess

$$e^-(p_1) + e^+(p_2) \rightarrow \mu^-(p_3) + \mu^+(p_4)$$

$$M = \frac{-e^2}{(p_1 + p_2)^2} (\bar{v}_2 \gamma^\mu u_1) (\bar{u}_3 \gamma^\mu v_4)$$

an, so folgt

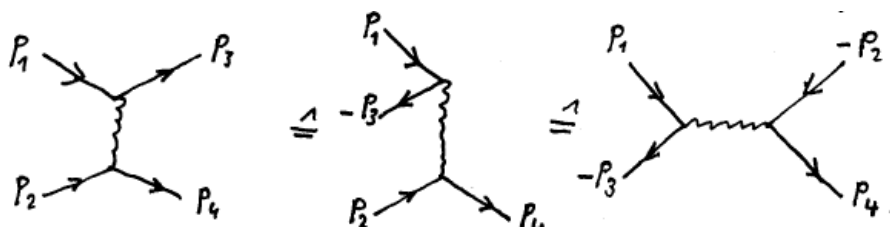
$$\begin{aligned}
 |\bar{M}|^2 &= \frac{e^4}{(p_1 + p_2)^4} \text{Spur}((p_2 - m_2)\gamma^\mu(p_1 + m_1)\gamma^\nu) \text{Spur}((p_3 + m_3)\gamma_\mu(p_4 - m_4)\gamma_\nu) \\
 &= \frac{8e^4}{\underbrace{(p_1 + p_2)^4}_{s^2}} \left[\underbrace{(p_1 p_3)(p_2 p_4)}_{\approx t^2/4} + \underbrace{(p_1 p_4)(p_2 p_3)}_{\approx u^2/4} + \underbrace{p_3 p_4}_{\approx s/2} m_1^2 + \underbrace{p_1 p_2}_{\approx s/2} m_3^2 + 2m_1^2 m_3^2 \right]
 \end{aligned}$$

und, für kleine Massen ($m_1 = m_2, m_3 = m_4$),

$$|\bar{M}|^2 \approx 2e^4 \frac{t^2 + u^2}{s^2}$$

Man sieht, dass zwischen t - und s -Kanal für kleine Massen eine Crossing-Relation besteht, bei der im Endergebnis lediglich $p_2 \leftrightarrow -p_3$ vertauscht werden müssen. Anschaulich interpretiert bedeutet dies, dass ein einlaufendes Teilchen mit Impuls p durch ein auslaufendes Antiteilchen mit Impuls $-p$ ersetzt werden kann. Dies entspricht der Antiteilchen-Interpretation in der Dirac-Gleichung. Die Vertauschung von $p_2 \leftrightarrow -p_3$ bei der Ableitung des s -Kanal Prozesses aus dem t -Kanal Prozess bedeutet, dass man (in ultrarelativistischer Näherung) s und t vertauschen muss.

t -Kanal	\leftrightarrow	s -Kanal
$t = (p_1 - p_3)^2$	\leftrightarrow	$(p_1 + p_2)^2 = s$
$s = (p_1 + p_2)^2$	\leftrightarrow	$(p_1 - p_3)^2 = t$
$u = (p_3 - p_2)^2$	\leftrightarrow	$(p_2 - p_3)^2 = u$
$ \bar{M} ^2 \approx 2e^4 \frac{s^2 + u^2}{t^2}$	\leftrightarrow	$ \bar{M} ^2 \approx 2e^4 \frac{t^2 + u^2}{s^2}$



Beim PETRA Beschleuniger am DESY wurde mit Schwerpunktsenergien bis $\sqrt{s} \leq 46\text{GeV}$ die Winkelverteilungen $s \cdot \frac{d\sigma}{d\Omega}$ gemessen. Sie sind unabhängig von s , wie von der QED vorhergesagt. Bei den höheren \sqrt{s} Werten machen sich bereits Korrekturen durch den Z^0 Austausch der schwachen Wechselwirkung bemerkbar, der bei kleinen Energien im s -Kanal durch den Propagator $\frac{1}{q^2 + M_Z^2}$ stark unterdrückt ist.

Der totale Wirkungsquerschnitt für $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ ergibt sich aus dem differentiellen durch Integration über die Winkel,

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \frac{4\pi}{3} \frac{\alpha^2}{s} \approx 100\text{nb} \frac{\text{GeV}^2}{s}$$

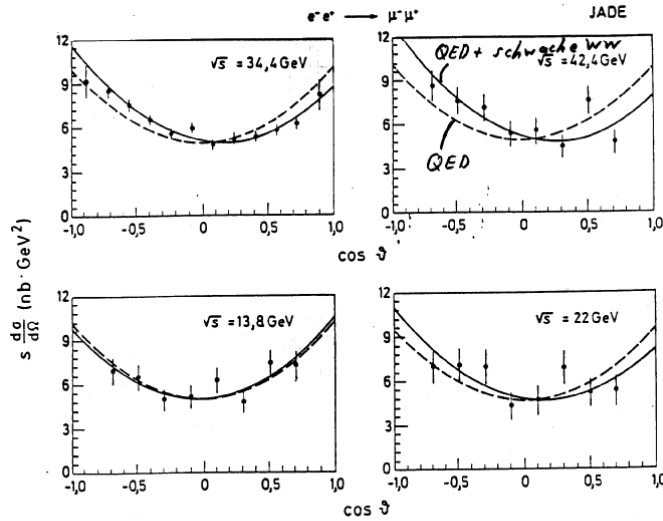


Bild 11-5 Die Winkelverteilung der Myonen in der Reaktion $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$. Daten der JADE-Gruppe bei den angegebenen Schwerpunktsenergien \sqrt{s} . Die gestrichelten Linien sind die Vorhersagen der QED (Gl. (11-17)). Die durchgezogenen Linien berücksichtigen die Effekte der schwachen Wechselwirkung (nach Bartel 1985).

($\hbar c = 1 = 0,2 \text{ GeV fm}$) und der Feinstrukturkonstanten

$$\alpha_{em} = \frac{e^2}{4\pi} \approx 1/128,$$

die bei diesen hohen Energien aufgrund der Renormierung der Quantenkorrekturen deutlich größer ist als der aus der Atomphysik bekannte Wert 1/137. Bei $\sqrt{s} = 46$

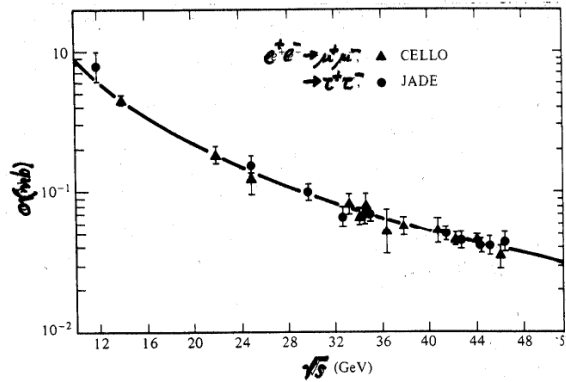
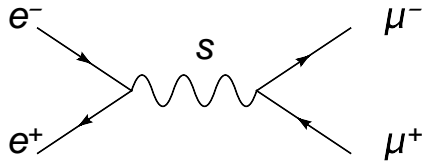


Fig. 10.16. The cross section $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ and $e^+e^- \rightarrow \tau^+\tau^-$ as a function of c.m. energy $W = \sqrt{s}$. The solid line shows the lowest order QED prediction. [After Cello Collaboration, *Phys. Lett.* **191B**, 209 (1987) and JADE Collaboration, *Phys. Lett.* **161B**, 188 (1985).]

GeV ist der Wirkungsquerschnitt 0.047 nb, die effektive Reichweite der Wechselwirkung also etwa 1000 mal kleiner als der Radius eines Protons. Dies schränkt sehr stark die Hypothese einer Substruktur des Elektrons oder Muons ein.

4.6.3 Übersicht der elementaren QED-Prozesse

1.) Paar-Vernichtung und Paar-Erzeugung

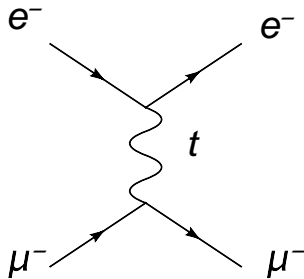


$$e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$$

$$|\bar{M}|^2 \approx 2e^4 \frac{u^2+t^2}{s^2} \approx (1 + \cos^2\Theta)$$

für unpolarisierte e^-e^+
symmetrisch in $\cos\Theta^*$

2.) 'Periphere' Streuung

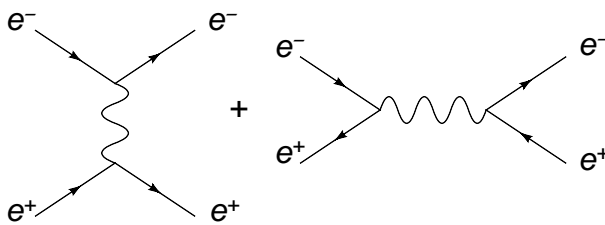


$$e^-\mu^- \rightarrow e^-\mu^-$$

$$|\bar{M}|^2 \approx 2e^4 \frac{s^2+u^2}{t^2}$$

Peak in Vorwärts-Richtung

3.) Bhabha - Streuung

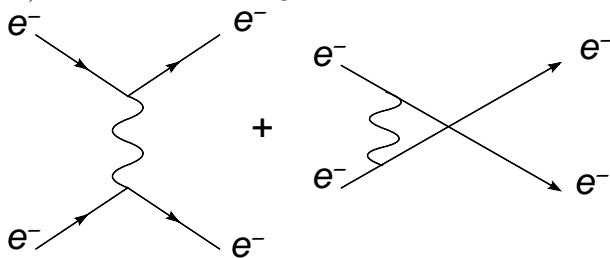


$$e^-e^+ \rightarrow e^-e^+$$

$$|\bar{M}|^2 \approx 2e^4 \left(\frac{s^2+u^2}{t^2} + \frac{2u^2}{t \cdot s} + \frac{u^2+t^2}{s^2} \right)$$

Zwei Diagramme mit gleichem
Anfangs- und Endzustand
→ Interferenz von zwei Feynman-
Amplituden
($|M_1 + M_2|^2$)

4.) Möller - Streuung: identische Fermionen



$$e^-e^- \rightarrow e^-e^-$$

$$|\bar{M}|^2 \approx 2e^4 \left(\frac{s^2+u^2}{t^2} + \frac{2s^2}{t \cdot u} + \frac{s^2+t^2}{u^2} \right)$$

Zwei Diagramme mit identischen Teil-
chen von verschiedenen Vertizes
→ negative Interferenz ($|M_1 - M_2|^2$)
Peak in Vorwärts- und Rückwärts-
Richtung

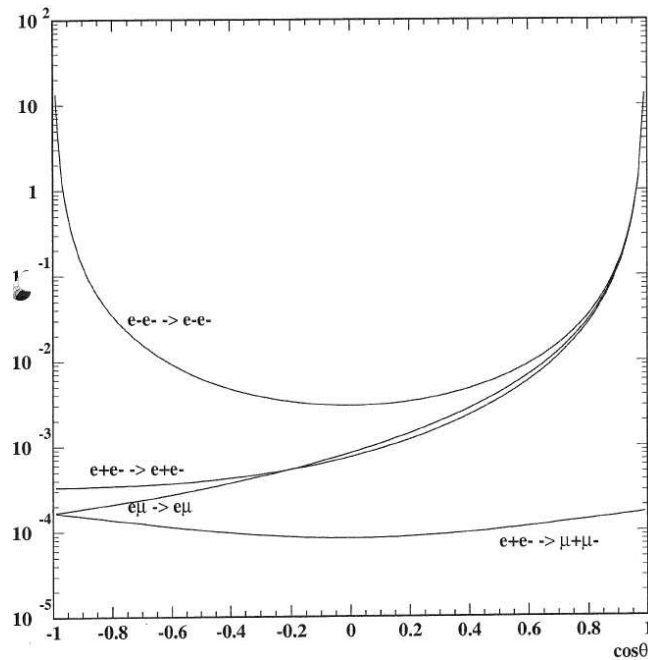


Abbildung 2: Winkelverteilungen der elementaren QED Prozesse. Gezeigt ist $d\sigma/d\Omega$ in willkürlichen Einheiten.

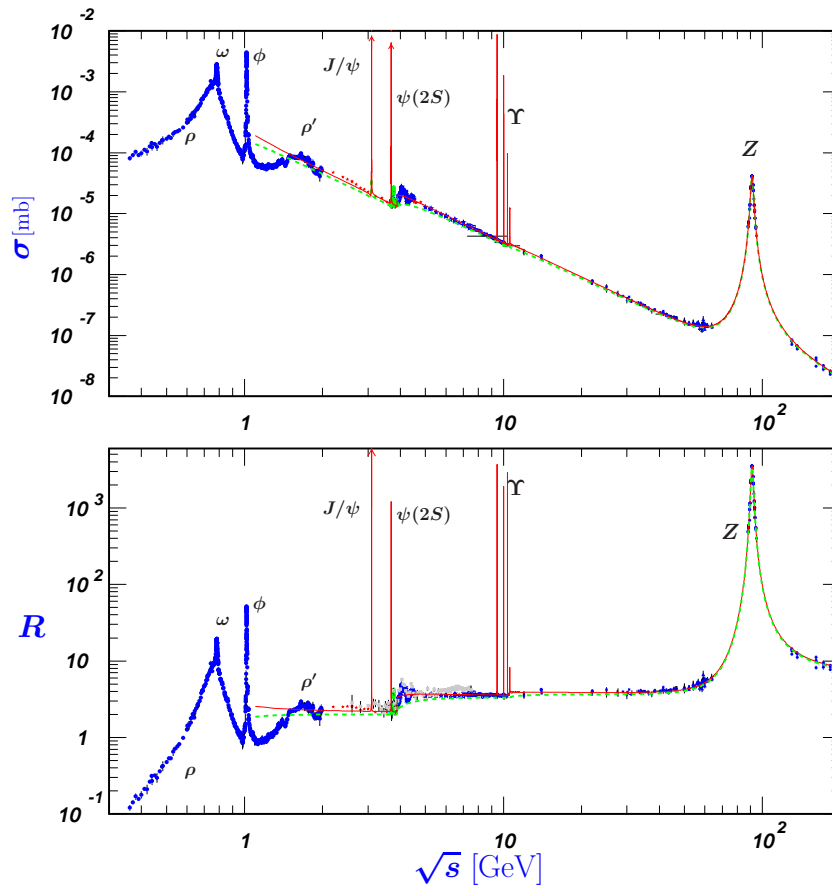
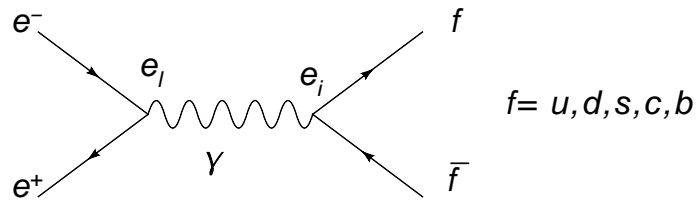
4.6.4 Erzeugung von Hadronen

Zur Untersuchung der Eigenschaften der Hadronen und Quarks eignet sich besonders der Prozess

$$e^+e^- \rightarrow \text{Hadronen}$$

und als Messgröße das Verhältnis von hadronischem zu leptonischem Wirkungsquerschnitt.

$$R = \frac{\sigma_{e^+e^- \rightarrow \text{Hadronen}}}{\sigma_{e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-}}$$



Unter der Annahme, dass man die Produktion von Hadronen durch die Produktion von Quarks mit anschließendem Übergang (Wahrscheinlichkeit 1) der Quarks in Hadronen erklären kann (QCD Faktorisierung), gilt

$$R = \frac{\sigma_{e^+e^- \rightarrow u\bar{u}, d\bar{d}, s\bar{s}, c\bar{c}, b\bar{b}, t\bar{t}}}{\sigma_{e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-}} = \frac{\sum_q |\bar{M}_q|^2 dQ_q}{|\bar{M}_\mu|^2 dQ_\mu}$$

Bei $\sqrt{s} \approx 30\text{GeV}$ kann man den Z^0 Austausch vernachlässigen gegenüber dem γ -Austausch, so dass R sensitiv ist auf

- die elektrische Ladung der Quarks
- den Spin der Quarks
- die Masse der Quarks

Die Massen gehen unter anderem in das Verhältnis der Phasenraum-Faktoren ein,

$$\frac{dQ_{(m_q)}}{dQ_{(m_\mu \approx 0)}} = \frac{p_f(m_q)}{p_f(m_\mu = 0)} = \sqrt{1 - \frac{4m_q^2}{s}}$$

das schnell gegen 1 geht für $\sqrt{s} > 2m_q$.

Das Matrixelement für Spin 1/2 Quarks ist bis auf die elektrische Ladung gleich dem für Muonen, so dass

$$|M|^2 \sim e_e^2 e_f^2.$$

q	μ	u	d	c	s	b	t
e_q	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

$\leftarrow 2m_t > \sqrt{s}!$ verboten

Damit folgt

$$R_{QED} = \frac{e_u^2 + e_d^2 + e_s^2 + e_c^2 + e_b^2}{e_\mu^2} = \frac{\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}}{1} = \frac{11}{9}$$

Die Messung kann wie folgt interpretiert werden:

- $R \approx$ konstant für $10\text{GeV} \leq \sqrt{s} \leq 30\text{GeV}$. Demnach hat die elektromagnetische WW hat gleiche Struktur für μ und Quarks.
- Die kinematische Schwellen (Stufen) in R treten auf, wenn $\sqrt{s} > 2m_q$, da dann ein neuer Endzustand für Quarks möglich ist.

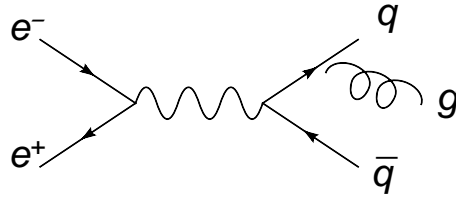
- Der Wirkungsquerschnitt in Hadronen wird um einen Faktor 3 größer gemessen als nur aufgrund der elektrischen Ladung zu erwarten war. Dies ist verständlich, wenn die Quarks einen inneren Freiheitsgrad (Farbe) besitzen, der in drei Zuständen auftritt, so dass sich die Anzahl der Endzustände entsprechen erhöht (Phasenraum). Für drei Farben folgt

$$R = \frac{33}{9}.$$

Dies ist einer der stärksten Hinweise auf Quarks mit Farbe.

Aus der Messung sind auch folgende Korrekturen ablesbar, da R nicht exact $\frac{33}{9}$ ist.

1. Nahe der kinematischen Schwelle $\sqrt{s} = 2m_q$ für neue Quarks haben die entstehenden Quarks nur wenig kinetische Energie, so dass gebundenen Zustände als Resonanzen angeregt werden können, z.B. $e^-e^+ \rightarrow J/\Psi$ ($J/\Psi = c\bar{c}$). Nahe der Schwelle ist auch der Phasenraum nicht groß genug, so dass die Erzeugung der Quarks und die Hadronisierung nicht unabhängig sind.
2. Der leichte Abfall von R zwischen $\sqrt{s} \approx 15\text{GeV}$ und 30GeV ist ein Beitrag höherer Ordnung durch die starke WW, der nur für Quarks auftritt, so dass



$$R = R_{QED}\left(1 + \frac{\alpha_s}{\pi} + \dots\right).$$

Der Wert von $\alpha_s \approx 0.12$ fällt dabei leicht als Funktion der Energie im Prozess.

3. Der Anstieg für $\sqrt{s} \geq 30\text{GeV}$ ist der Beitrag durch Z^0 -Austausch. Da die Kopplung $Z_{\mu\mu}$ nicht gleich derjenigen für $Z_{q\bar{q}}$ ist steigt R , denn der Z^0 Beitrag aufgrund der unterschiedlichen Propagatoren wird größer mit \sqrt{s} .

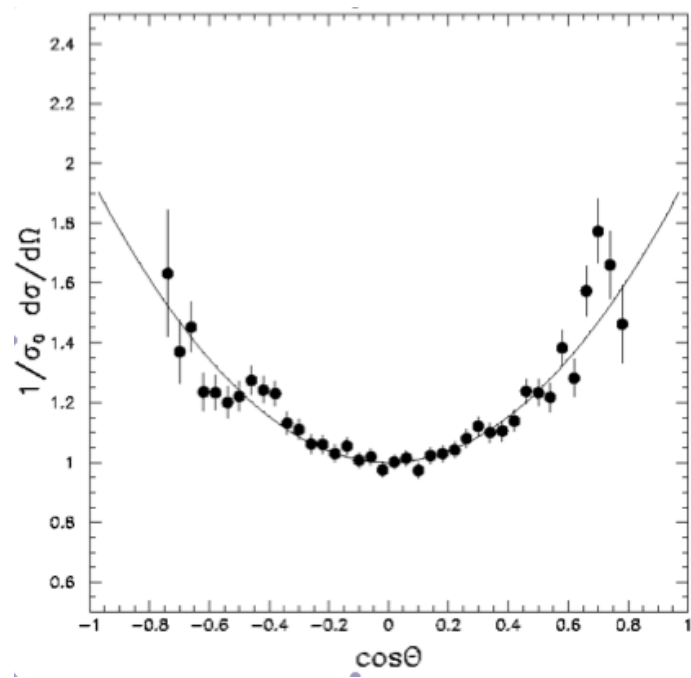
$$\text{Propagator: } \gamma : \frac{1}{s} \qquad Z^0 : \frac{1}{s-M_Z^2+\dots}$$

4.6.5 Drell-Yan Prozess

In der Hadron-Hadron Streuung (πp , $p\bar{p}$ oder pp) beobachtet man die Erzeugung von Lepton-Paaren, z.B.

$$\pi p \rightarrow \mu^+\mu^- + \text{Hadronen}$$

Im CMS System der beiden Muonen ist die Winkelverteilung $\sim (1 + \cos^2 \Theta^*)$, also genau wie beim Prozess $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$. Dies ist einer der wichtigsten Hinweise auf Spin 1/2 Teilchen (Quarks) in Hadronen, die sich vernichten können, $q\bar{q} \rightarrow \mu^+\mu^-$.



5 Starke Wechselwirkung

5.1 Quarks und Gluonen

Experimentell gibt es durch zahlreiche Messergebnisse Evidenz für eine innere Struktur der Nukleonen (Protonen und Neutronen).

- Das Volumen von Atomkernen nimmt linear mit der Anzahl der Protonen und Neutronen zu. Dies deutet auf eine feste geometrische Ausdehnung der Nukleonen mit einem Radius von ca. 1 fm hin.
- In der tief-inelastischen Elektron-Proton Streuung, $e + p \rightarrow e + X$ wird ein Wirkungsquerschnitt gemessen, der nicht dem einer homogenen, strukturlosen Ladungsverteilung innerhalb des Protons entspricht, sondern der sich aus der Summe von Streuprozessen der Elektronen an einzelnen, punktförmigen Ladungsträgern (den Quarks) erklären lässt. Auf diese Art wurden die Quarks an Experimenten am SLAC entdeckt.
- Der totale Wirkungsquerschnitt von Proton-Anti-Proton Kollisionen ist etwa gleich groß wie die daraus berechnete Querschnittsfläche eines Protons von $A = \pi(1\text{fm})^2 = 0.31\text{mb}$ und steigt leicht mit der Schwerpunktsenergie \sqrt{s} . Dies ist ca. 10^6 mal größer als der Wirkungsquerschnitt für e^+e^- Streuung bei $\sqrt{s} = 1\text{GeV}$, der zudem mit der Schwerpunktsenergie fällt.
- Durch Streuung mit Photonen oder anderen Protonen lassen sich ein Spektrum von angeregten Zuständen der Protonen erzeugen, die anschließend wieder in Protonen, Neutronen und Pionen zerfallen.

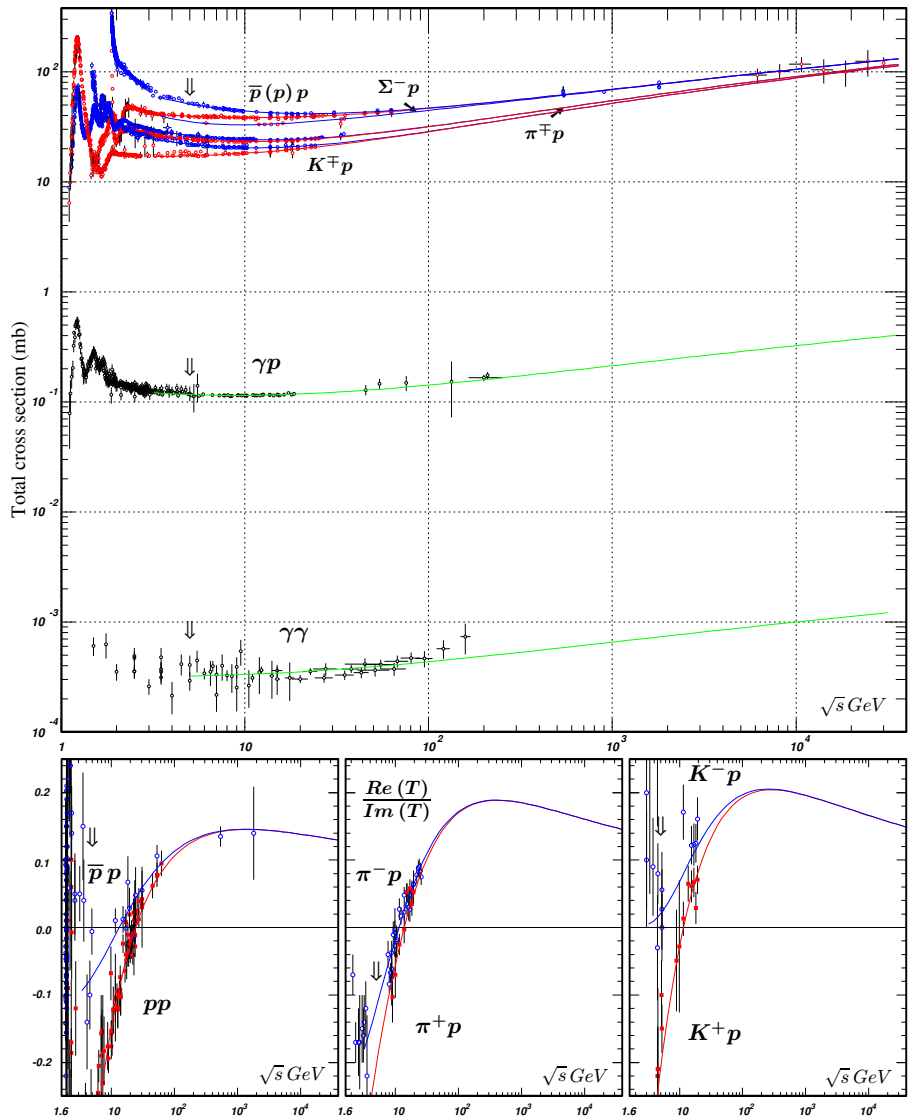
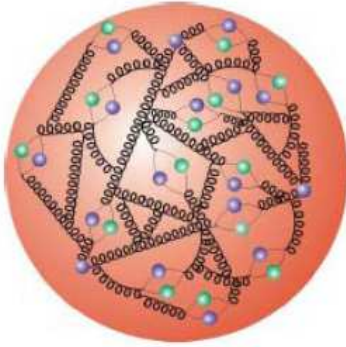
Das Proton ist also ausgedehnt und damit nicht elementar, sondern besteht aus "Partonen". Die Natur der Partonen ist ebenfalls bekannt:

- Quarks: In der e^+e^- Streuung wird die Produktion von "Jets" von Teilchen beobachtet. In den meisten Fällen entstehen 2 entgegengerichtete Jets gleicher Energie, deren Winkelverteilung gegenüber den einlaufenden Teilchen genau wie bei der Produktion von $\mu^+\mu^-$ ist, also

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \sim 1 + \cos^2 \Theta^*$$

Es ist daher anzunehmen, dass die Jets aus der Produktion von Spin 1/2 Teilchen, den Quarks, entstehen.

- u und d Quarks Der Aufbau der leichtesten Hadronen lässt sich mit nur zwei Quark-Sorten erklären, den *up* und *down* Quarks mit den elektrischen Ladungen $q_u = 2/3 e$, $q_d = -1/3 e$.



Baryonen	Mesonen
$p = (uud)$	$\pi^+ = u\bar{d}$
$n = (udd)$	$\pi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} + d\bar{d})$
0	$\pi^- = d\bar{u}$

- Gluonen: In der e^+e^- Streuung wird in typisch 10 % Fälle nicht nur zwei sondern 3 Jets beobachtet, wobei die Winkelverteilung der Jets untereinander mit der Erwartung für die Abstrahlung eines Spin 1 Teilchens (“Gluon”) von einem Spin 1/2 Teilchen (Quark) übereinstimmt. Auf diese Weise wurde das Gluon am PETRA Beschleuniger bei DESY entdeckt.
- Starke Kopplungskonstante α_s : Die Häufigkeit von etwa 10% dieser 3-Jet Ereignisse deutet auf eine große Kopplungskonstante zwischen Quarks und Gluonen hin, $\alpha_s \approx 10 \alpha_{em}$.

Die Natur der Wechselwirkung zwischen Quarks und Gluonen hängt, in Analogie zur elektromagnetischen Wechselwirkung, mit einer erhaltenen “Ladung der Starken Wechselwirkung”, zusammen::

- Farbe: Eine der Baryon-Resonanzen, das Δ^{++} , trägt doppelte elektrische Ladung und Spin 3/2. Es besteht demnach aus 3 u Quarks. Wegen des Pauli-Prinzips können aber identischen Fermionen nicht im gleichen Zustand sein. Daher müssen die drei Quarks des $\Delta^{++} = (uuu)$ in drei unterschiedlichen Zuständen einer neuen, inneren Quantenzahl, der Farbe, vorkommen können.
- Das W^\pm Boson der schwachen Wechselwirkung zerfällt drei mal häufiger in Quark-Paare als in Lepton-Paare.
- Das Verhältnis

$$R = \frac{\sigma_{e^+e^- \rightarrow \text{Hadronen}}}{\sigma_{e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-}},$$

der Streuung in Hadronen oder Myonen zeigt Resonanzen und erhöht sich stufenweise um Beträge von

$$3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \quad \text{oder} \quad 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

was auf die Paar-Weise Erzeugung neuer Quarks $e^+e^- \rightarrow u\bar{u}, d\bar{d}, s\bar{s}, c\bar{c}, b\bar{b}$ hindeutet.

- Skala der QCD: Die Zerfallsbreite (oder Energieunschärfe = 1/Lebensdauer) der Hadron-Resonanzen beträgt typisch etwa 200 MeV. In der gleichen Größenordnung liegt die Masse des Pions (leichtestes Hadron), und auch 1/Radius des Protons. Der Wert $\Lambda_{QCD} \approx 200 \text{ MeV}$ wird daher als Skala der QCD bezeichnet. Die Existenz und Größe dieser Skala wird später aus der Energie-Abhängigkeit von α_s und damit dem Confinement erklärt.

5.2 Nicht-Abelsche Eichtheorie

Die Theorie der starken Wechselwirkung ist die Quantenchromodynamik (QCD), eine lokale, nicht-abelsche Eichtheorie, die auf der Symmetrie-Gruppe $SU(3)_C$ der drei Farben der Quarks beruht (C steht für "Colour"). Solche Eichtransformationen stellen eine Verallgemeinerung der aus der Elektrodynamik bekannten Eich-Invarianz dar und sind die Grundlage für die Theorien der Teilchenphysik und ihrer Vorhersagekraft. Exemplarisch wird zunächst die QCD ($SU(3)_C$) behandelt und das gefundene Prinzip anschliessend auch für die elektroschwache Wechselwirkung angewendet ($SU(2)_L \times U(1)_Y$).

5.2.1 Übersicht zu Eichtheorien

Die einzelnen Schritte zur Ableitung der Naturgesetze aus dem Prinzip der lokalen Eichinvarianz sind (ohne Higgs-Mechanismus)

1. Postuliere Fermion-Felder für Quarks und Leptonen
2. Postuliere lokale Eich-Invarianz der Lagrange-Dichte
Für die QED ist dies eine $\mathbf{U}(1)$ Phasen-Rotation.
Für die QCD ist dies eine $\mathbf{SU}(3)_C$ Rotation der Farb-Freiheitsgrade rot-grün-blau.
3. Sortiere Fermionen in $SU(N)$ -Multipletts
Für die QCD sind dies die Quark-Zustände

$$\begin{pmatrix} u\text{-rot} \\ u\text{-grün} \\ u\text{-blau} \end{pmatrix}$$

4. Aus der Forderung nach Eichinvarianz folgen
 - neue, masselose Spin-1 Bosonen ($N^2 - 1$ Bosonen für $SU(N)$).
 - eine neue Kopplungskonstante zwischen Fermionen und Eichbosonen
 - eine bestimmte Form der WW (γ^μ -Kopplung)

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma_\mu D^\mu\psi \quad \text{mit} \quad D^\mu = \partial^\mu + ig_s T_a G_a^\mu$$

5. Addiere kinetische Energie für Vektorfelder

$$\mathcal{L}_{G,eich} = -\frac{1}{4} G_a^{\mu\nu} G_{a,\mu\nu}$$

$$G_a^{\mu\nu} = \partial^\mu G_a^\nu - \partial^\nu G_a^\mu + gf_{abc} G_b^\mu G_c^\nu$$

6. Die Vorhersage einer Selbst-Wechselwirkung der Bosonen, mit gleicher Kopplungskonstante, ist in diesem Term bereits enthalten, falls die Eichtransformation nicht kommutieren (nicht-abelsche Eich-Gruppe)

$$[T_a, T_b] = if_{abc}T_c$$

5.2.2 Lagrange-Dichte der QCD

Grundlage der Quanten-Chromo-Dynamik (QCD) und der schwachen Wechselwirkung sind nicht-Abelsche Eichtheorien, bei denen also die Symmetrie- Transformationen von einem kontinuierlichen Parameter abhängen und im Allgemeinen nicht vertauschbar sind. Die QCD basiert auf der Symmetriegruppe $SU(3)$, also der unitären Transformationen in drei Dimensionen mit $\det U = +1$. Viele der hier beschriebenen Eigenschaften gelten aber auch z.B. fuer die $SU(2)$ der schwachen Wechselwirkung.

Man betrachtet drei wechselwirkungsfreie Dirac-Teilchen (Quarks) mit gleichen Massen aber verschiedenen Farben r =rot, g =grün, b =blau)

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}_r(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi_r + \bar{\psi}_b(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi_b + \bar{\psi}_g(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi_g.$$

Man führt nun ein Triplet im 3-dim Raum der Farb-Zustände ein, das eine verallgemeinerte Form des Dirac-Feldes darstellt,

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_r \\ \psi_b \\ \psi_g \end{pmatrix}$$

oder in etwas anderer Notation:

$$\psi_r = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_g = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Damit kann man die Lagrange-Dichte auch einfach schreiben als

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi,$$

wobei sowohl über die Spinor-Indizes als auch die Farb-Indizes summiert werden soll. Dies funktioniert nur bei gleichen Massen der drei Farb-Zustände.

Diese Lagrange- Dichte ist invariant unter Rotationen im Farb-Raum. Postuliert man, dass diese Symmetrie auch lokal gelten soll, so kann man die Rotationen darstellen als unitäre Transformationen, die sowohl die Komponenten $\psi_{r,b,g}$ verändern als auch deren Phasen.

$$\psi \rightarrow \psi' = U\psi.$$

Hier ist U eine 3 x 3 Matrix im Farbraum, mit $U^\dagger U = 1$, so dass man U schreiben kann als

$$\psi' = e^{ig_s\alpha_a(x)T_a}\psi.$$

- g_s ist eine reelle Konstante, die wir später mit der starken Kopplungskonstanten identifizieren werden.
- Die reellen Funktionen $\alpha_a(x)$ sollen von Ort und Zeit abhängen, d.h. wie bei der QED fordern wir, dass die Symmetrie lokal gültig sein soll.
- Die Größen T_a sind linear unabhängige hermitesche 3×3 Matrizen im Farbraum, die man die Generatoren der $SU(3)_C$ nennt (Index C für "Colour"). Die T_a müssen so gewählt werden, dass mit $\alpha_a T_a$ (Summation über a) jede beliebige Rotation beschrieben werden kann.

Für eine solche 3×3 Matrix benötigt man im Allgemeinen 9 reelle Zahlen. Wegen der Bedingung $\det U = +1$ folgt jedoch, dass es für die $SU(3)$ nur 8 linear unabhängige T_a gibt. Wir werden sehen, dass daraus auch die Existenz von 8 verschiedenen Gluonen folgt⁷. Die Gruppe ist nicht Abelsch, da die Generatoren im Allgemeinen nicht vertauschen, sondern Kommutator-Relationen erfüllen,

$$[T_a, T_b] = i f_{abc} T_c.$$

Die Konstanten f_{abc} werden Strukturkonstanten der $SU(3)$ genannt. Aus der Unitarität $U^\dagger = U^{-1}$ folgt $\alpha_a T_a = \alpha_a^* T_a^\dagger$. Eine mögliche Darstellung der Generatoren $T_a = \lambda_a/2$ sind die sogenannten λ Matrizen,

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Strukturkonstanten sind antisymmetrisch bei Vertauschung von zwei Indizes,

$$\begin{aligned} f_{123} &= 1, & f_{458} &= f_{678} = \sqrt{3}/2 \\ f_{147} &= f_{246} = f_{257} = f_{345} = f_{516} = f_{637} &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

⁷Allgemein hat eine $SU(N)$ Gruppe demnach $N^2 - 1$ Generatoren und die entsprechende Eichtheorie $N^2 - 1$ unterschiedliche Eichbosonen.

Alle nicht durch Vertauschung zweier Indizes hieraus ableitbaren f_{abc} sind Null. Wegen $\alpha_a = \alpha_a(x)$ sind die Ableitungen

$$\partial_\mu \psi' = \partial_\mu (U\psi) \neq U\partial_\mu \psi,$$

so dass die obige Lagrange- Dichte nicht eichinvariant ist. Ähnlich wie in der QED wird daher die Ableitung ∂_μ durch eine kovariante Ableitung ersetzt,

$$D^\mu = \partial^\mu + ig_s T_a G_a^\mu$$

Die G_a^μ sind dabei 8 neue Vektorfelder, die den Gluonen entsprechen (ein Gluonfeld für jeden Generator). Damit wird die Lagrange- Dichte zu

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \bar{\psi}(i\gamma_\mu D^\mu - m)\psi \\ &= \bar{\psi}(i\gamma_\mu \partial^\mu - m)\psi - g_s \bar{\psi}(\gamma_\mu T_a G_a^\mu)\psi \end{aligned}$$

Der letzte Term stellt eine Wechselwirkung zwischen den Quarks und den Gluonen dar, wobei offenbar die Generatoren festlegen, welches Quark mit welcher Farbe ein bestimmtes Gluon abstrahlen kann. Diese Lagrange-Dichte ist eichinvariant unter infinitesimalen $SU(3)_C$ Transformationen, falls

$$G_a^\mu \rightarrow G'^\mu_a = G_a^\mu - \partial^\mu \alpha_a(x) - g_s f_{abc} \alpha_b(x) G_c^\mu$$

Der letzte Term ist neu in der $SU(3)_C$ im Vergleich zur QED und notwendig, da die Generatoren T_a nicht vertauschen. Für die kinetische Energie der Gluonen werden Feldstärke-Tensoren definiert als

$$G_a^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu G_a^\nu - \partial^\nu G_a^\mu - g_s f_{abc} G_b^\mu G_c^\nu.$$

Auch hier ist der letzte Term neu im Vergleich zur QED und notwendig, damit die kinetische Energie der Gluonen,

$$\mathcal{L}_{G,kin} = -\frac{1}{4} G_{a\mu\nu} G_a^{\mu\nu},$$

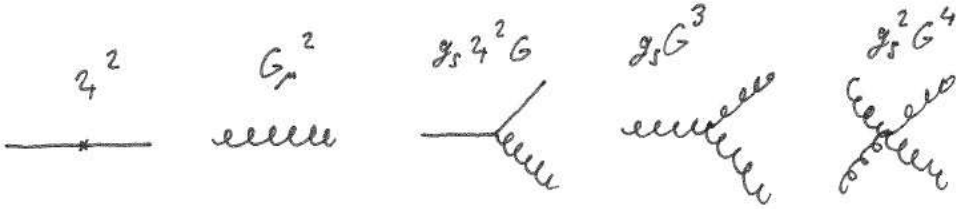
eich-invariant ist. Es existiert also ein Tensor für jedes Gluon und über alle Tensoren wird summiert. Bei nicht-Abelschen Symmetrien vertauschen die Symmetrie-Operatoren nicht ($f_{abc} \neq 0$). Daher enthält der Ausdruck $\mathcal{L}_{G,kin}$ nicht nur Terme quadratisch in den Ableitungen der Felder, also die kinetische Energie der Gluonen, sondern auch Terme mit $\sim g_s (G_a^\mu)^3$ und $\sim g_s^2 (G_a^\mu)^4$. Diese Terme stellen Wechselwirkungen der Gluonen mit sich selber dar⁸, wobei die Kopplungskonstante g_s genau gleich zur Kopplung der Quarks an Gluonen sein muss. Die Selbstwechselwirkung der Gluonen ist verantwortlich für

⁸Eine solche Selbstwechselwirkung existiert nicht für die Photonen der QED, da es für die $U(1)$ nur eine Ladung gibt und daher auch keine Strukturkonstanten.

- die große Anzahl von Feynman-Diagrammen zu Prozessen der QCD,
- den Anstieg der (renormierten) Kopplung bei großen Abständen zwischen Farbladungen. Dies ist auch der Grund für das Confinement zwischen den Quarks und Gluonen, also der Beobachtung, dass es keine freien Farb-Ladungen sondern nur freie Farb-Singletts gibt.

Die Selbstwechselwirkung der Gluonen bedeutet auch, dass die Gluonen selber Farbe tragen. Die gesamte, sogenannte Yang-Mills Lagrange-Dichte der QCD ist damit

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \bar{\psi}(i\gamma_\mu D^\mu - m)\psi - \frac{1}{4}G_{a\mu\nu}G_a^{\mu\nu} \\ &= \underbrace{\bar{\psi}(i\gamma_\mu \partial^\mu - m)\psi}_{\substack{\text{Massen-Term} \\ + E_{kin}(\psi) \\ \rightarrow \text{Propagator}}} - \underbrace{g_s \bar{\psi}(\gamma_\mu T_a G_a^\mu)\psi}_{\substack{\text{Quark } \psi \text{ koppelt} \\ \text{mit Stärke } g_s \text{ an 8} \\ \text{Gluon-Felder } G_a^\nu}} - \underbrace{\frac{1}{4}G_{a\mu\nu}G_a^{\mu\nu}}_{\substack{8 \text{ Gluonen} \\ E_{kin}(G_a) \sim G^2 \\ + \dots g_s G^3 \text{ 3-Vertex} \\ + \dots g_s^2 G^4 \text{ 4-Vertex}}} \end{aligned}$$



5.2.3 Ableitung

Die Form der kovarianten Ableitung ist von entscheidender Bedeutung für die Selbst-Wechselwirkung der Gluonen und damit verantwortlich für das Confinement der Quarks und Gluonen sowie das “Laufen” der starken Kopplungskonstante. Daher wird im Folgenden die Form der kovarianten Ableitung explizit hergeleitet und gezeigt, dass die einzelnen Terme der Lagrange-Dichte eichinvariant sind.

Unter der lokalen Eichtransformation

$$\psi'(x) = U(x) \psi(x), \quad \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x) U^\dagger(x),$$

bleibt der Massenterm wegen der Unitarität von U eichinvariant,

$$\mathcal{L}'_{q,m} = -m\bar{\psi}'\psi' = -m\bar{\psi}U^\dagger U\psi = -m\bar{\psi}\psi = \mathcal{L}_{q,m}.$$

Kinetische Term der Quarks

Der Term für die kinetische Energie der Quarks,

$$\mathcal{L}_{q,kin} = \bar{\psi} i \gamma^\mu D_\mu \psi,$$

bleibt invariant, wenn sich die kovariante Ableitung transformiert wie das Feld ψ selber,

$$D'_\mu \psi' = U(x) D_\mu \psi,$$

denn γ^μ und U vertauschen,

$$\mathcal{L}'_{q,kin} = \bar{\psi}' i \gamma^\mu D'_\mu \psi' = \bar{\psi} U^\dagger i \gamma^\mu U D_\mu \psi = \bar{\psi} i \gamma^\mu D_\mu \psi = \mathcal{L}_{q,kin}.$$

Wählt man als Verallgemeinerung der kovarianten Ableitung in der QED als Ansatz

$$D^\mu = \partial^\mu + i g_s T_a G_a^\mu$$

so muss für $T_a G_a^\mu$ gelten:

$$\begin{aligned} D'^\mu \psi' &= (\partial^\mu + i g_s T_a G_a'^\mu) \psi' \\ &= \partial^\mu \psi' + i g_s T_a G_a'^\mu \psi' \\ &= (\partial^\mu U) \psi + U (\partial^\mu \psi) + i g_s T_a G_a'^\mu U \psi \\ &= U D^\mu \psi = U (\partial^\mu \psi) + i g_s U T_a G_a^\mu \psi \end{aligned}$$

Die letzte Zeile folgt aus der oben gestellten Bedingung $D'_\mu \psi' = U(x) D_\mu \psi$. Aus den beiden letzten Zeilen folgt nach Division durch $i g_s$,

$$T_a G_a'^\mu U \psi = U T_a G_a^\mu \psi - \frac{1}{i g_s} (\partial^\mu U) \psi$$

Setzt man in diese Gleichung $\psi = U^{-1} \psi'$ ein,

$$T_a G_a'^\mu \psi' = U T_a G_a^\mu U^{-1} \psi' - \frac{1}{i g_s} (\partial^\mu U) U^{-1} \psi'$$

so kann diese Gleichung für alle ψ' nur erfüllt sein wenn⁹

$$T_a G_a'^\mu = U T_a G_a^\mu U^{-1} - \frac{1}{i g_s} (\partial^\mu U) U^{-1} = U \left(T_a G_a^\mu + \frac{1}{i g_s} \partial^\mu \right) U^{-1}$$

Dies ist eine allgemeine Bedingung für alle unitären Eichtransformationen. Wie oben gefordert folgt dann auch

$$i g_s T_a G_a'^\mu U \psi = i g_s U \left(T_a G_a^\mu + \frac{1}{i g_s} \partial^\mu \right) U^{-1} U \psi = i g_s U T_a G_a^\mu \psi + U \partial^\mu \psi$$

so dass der kinetische Term für die Quarks tatsächlich eichinvariant ist.

⁹Wegen $\partial^\mu (U^{-1} U) = 0$ gilt auch $(\partial^\mu U^{-1}) U = -U^{-1} (\partial^\mu U)$.

Kinetische Term der Gluonen

Für die kinetische Energie der $a = 1, 2, \dots, 8$ Eich-Felder G_a^μ benötigt man wie in der QED einen Feldstärke-Tensor $G_a^{\mu\nu}$, so dass bei Summation über a alle Felder gleichermaßen beitragen. Die Forderung nach Lorentz- und Eich-Invarianz schränkt mögliche Terme jedoch sehr stark ein. Dieser Feldstärke-Tensor $G_a^{\mu\nu}$ lässt sich am einfachsten aus den kovarianten Ableitungen D^μ konstruieren, denn wegen

$$D'^\mu \psi' = D'^\mu U \psi = U D^\mu \psi$$

haben diese bereits die Eigenschaft

$$D'^\mu = U D^\mu U^{-1}.$$

Damit folgt auch für den Kommutator

$$[D'^\mu, D'^\nu] = [U D^\mu U^{-1}, U D^\nu U^{-1}] = U [D^\mu, D^\nu] U^{-1}.$$

Diese Eigenschaft macht man sich zu Nutze um den allgemeinsten, P und T erhaltende Ausdruck für die kinetische Energie von Eichtheorien zu konstruieren. Die Feldstärke-Tensoren $G_a^{\mu\nu}$ werden definiert als

$$ig_s T_a G_a^{\mu\nu} = [D^\mu, D^\nu],$$

so dass ¹⁰

$$G_a^{\mu\nu} = \partial^\mu G_a^\nu - \partial^\nu G_a^\mu - g_s f_{abc} G_b^\mu G_c^\nu$$

Man erhält also acht Tensoren für die acht Gluon-Felder. Der allgemeinste eichinvariante Ausdruck für die kinetische Energie ist

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{G,kin} &= -\frac{1}{2} \text{Spur}(T_a G_a^{\mu\nu} T_b G_{b,\mu\nu}) \\ &= -\frac{1}{4} G_a^{\mu\nu} G_{a,\mu\nu}, \end{aligned}$$

¹⁰ Wendet man den Kommutator $[D^\mu, D^\nu]$ auf ein Feld ψ an, so gilt

$$\begin{aligned} [D^\mu, D^\nu] \psi &= [\partial^\mu + ig_s T_a G_a^\mu, \partial^\nu + ig_s T_b G_b^\nu] \psi \\ &= [\partial^\mu, \partial^\nu] \psi + [\partial^\mu, ig_s T_b G_b^\nu] \psi + [ig_s T_b G_b^\mu, \partial^\nu] \psi - g_s^2 [T_a G_a^\mu, T_b G_b^\nu] \psi \end{aligned}$$

Damit gilt wegen $[\partial^\mu, \partial^\nu] \psi = 0$ und

$$[\partial^\mu, ig_s T_b G_b^\nu] \psi = ig_s T_b \partial^\mu (G_b^\nu \psi) - ig_s T_b G_b^\nu \partial^\mu \psi = ig_s T_b (\partial^\mu G_b^\nu) \psi$$

dass

$$[D^\mu, D^\nu] \psi = ig_s T_a (\partial^\mu G_a^\nu - \partial^\nu G_a^\mu) \psi - g_s^2 [T_a, T_b] G_a^\mu G_b^\nu \psi = ig_s T_a G_a^{\mu\nu} \psi$$

mit

$$G_a^{\mu\nu} = \partial^\mu G_a^\nu - \partial^\nu G_a^\mu - g_s f_{abc} G_b^\mu G_c^\nu$$

wobei $Spur(T_a T_b) = \frac{1}{2} \delta_{ab}$ benutzt wurde. Damit ist die kinetische Energie tatsächlich eichinvariant, denn

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_{G,kin} &= -\frac{1}{2} Spur(T_a G'^{\mu\nu}_a T_b G'_{b,\mu\nu}) \\ &= -\frac{1}{2} Spur(U T_a G_a^{\mu\nu} U^{-1} U T_b G_{b,\mu\nu} U^{-1}) \\ &= -\frac{1}{2} Spur(T_a G_a^{\mu\nu} T_b G_{b,\mu\nu}) = \mathcal{L}_{G,kin} \end{aligned}$$

Folgt man dem Prinzip der Eichinvarianz, so müssen die Gluonen Masse-los sein, denn ein entsprechender Term in der Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L}_{G,m} = m_G^2 G_a^\mu G_{a\mu}$$

wäre nicht eich-invariant,

$$\mathcal{L}'_{G,m} = m_G^2 G'^\mu_a G'_{a\mu} \neq m_G^2 G_a^\mu G_{a\mu}.$$

QED Für den Spezialfall der QED ist die Eichgruppe die $U(1)$. Dies ist eine Abel'sche Gruppe mit nur einer Ladung und einem Generator, so dass

$$a = 1, \quad T_a = 1, \quad G_a^\mu = A^\mu, \quad f_{abc} = 0.$$

Damit ist U nur eine komplexe Zahl, so dass sich die obigen Gleichungen vereinfachen zu

$$\begin{aligned} A'^\mu &= A^\mu - g \partial^\mu \alpha(x), \\ D^\mu &= \partial^\mu + i g A^\mu \\ F^{\mu\nu} &= \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \end{aligned}$$

wie bereits im Kapitel zur QED gezeigt.

5.3 QCD in der e^+e^- Vernichtung

Wie bereits erwähnt werden bei dem Prozess $e^+e^- \rightarrow \text{Hadronen}$ hauptsächlich 2-Jet Ereignisse und nur in etwa 10% der Fälle 3-Jet Ereignisse beobachtet. Diese Ereignisse werden in der QCD interpretiert als Produktion von 2 Quarks beziehungsweise von 2 Quarks, die ein weiteres Gluon mit großem Öffnungswinkel zur Quark-Richtung abstrahlen.

In der 3-Jet Produktion kann man den Spin der Gluonen direkt aus den Winkelverteilungen der Jets bestimmen. Dazu sortiert man die Jets nach ihren Energien $E_1 > E_2 > E_3$ und bestimmt, im Schwerpunktsystem der beiden niederenergetischen Jets $j_2 + j_3$, den Winkel zwischen diesen Jets und dem höchstenergetischen Jet j_1 .

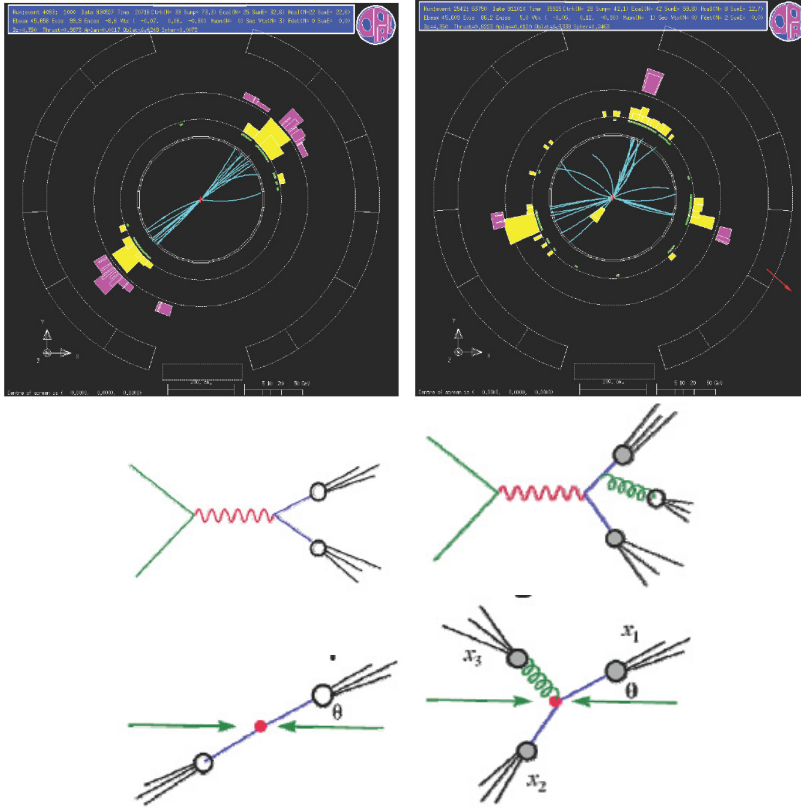


Abbildung 4: 2-Jet Ereignis (links) und 3-Jet Ereignis (rechts) im OPAL Experiment am LEP e^+e^- Beschleuniger.

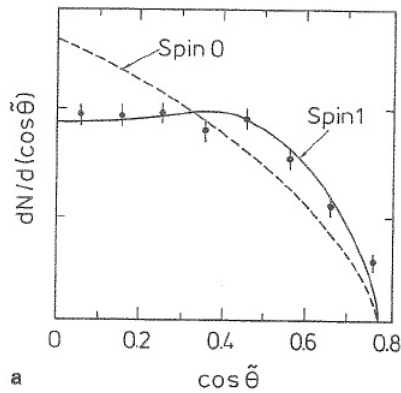


Abbildung 5: Verteilung der Winkel zwischen 3 Jets bei PETRA mit Vorhersagen für Spin-0 und Spin-1 GLuonen.

Diese Verteilung dieses Winkel $\tilde{\Theta}$ aus vielen Ereignissen am PETRA Beschleuniger zeigt, dass Gluonen Spin-1 haben.

In der 4-Jet Produktion ist der Wirkungsquerschnitt sensitiv auch auf die Selbstwechselwirkung der Gluonen, da sowohl die Quarks als auch Gluonen weitere Gluonen abstrahlen können. Eine hierauf sensitive Messgröße ist der Winkel zwischen den beiden Ebenen, die von den beiden Jets höchster beziehungsweise niedrigster Energie aufgespannt werden (Bengtson-Zerwas Winkel). Im Vergleich zu den Messdaten zeigt

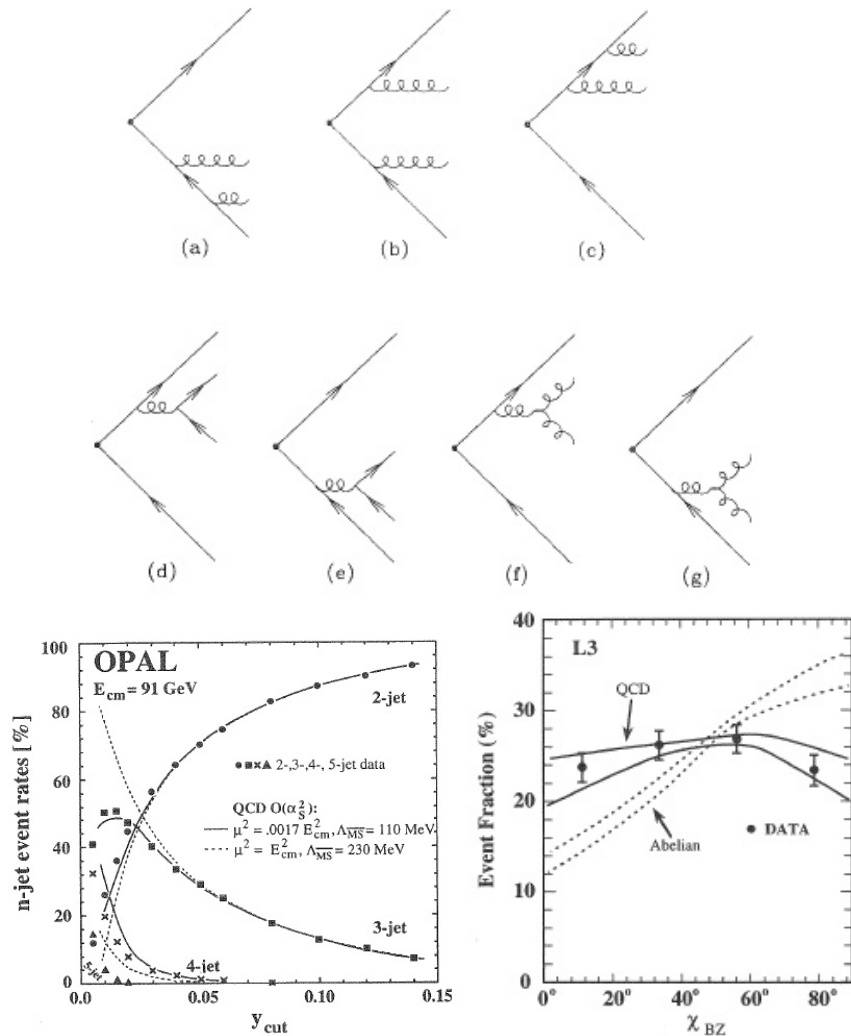


Abbildung 6: Jet Raten für 2,3, und 4 Jets bei LEP als Funktion des Abstandsmaßes zwischen den Jets (links), sowie die Verteilung des Bengtson-Zerwas Winkels zwischen den 4 Jets (rechts).

die QCD Vorhersage eine gute Übereinstimmung mit den Jet-Raten und Winkelver-

teilungen. Aus den Verhältnissen der Jet-Raten und den Winkelverteilungen lassen sich die Farb-Faktoren bestimmen, die die relative Wahrscheinlichkeit der Abstrahlung von Quarks oder Gluonen angeben. In der QCD liegen durch die Eichsymmetrie



die Verhältnisse fest,

$$C_A/C_F = 4/9, \quad T_F/C_F = 3/8.$$

Beide Werte sind mit den Daten sehr gut in Übereinstimmung. Vorhersagen für viele

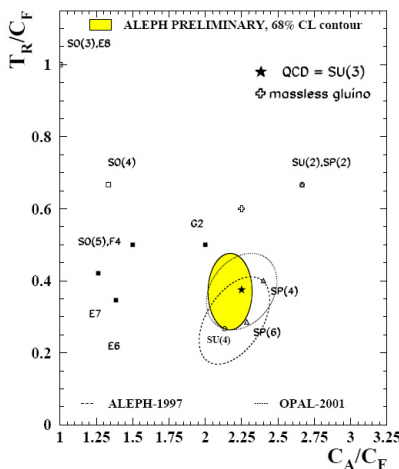


Abbildung 7: Bestimmung der Farb-Faktoren der starken Wechselwirkung in der e^+e^- Streuung bei LEP im Vergleich zu theoretischen Vorhersagen verschiedener Eichgruppen.

andere Eichgruppen können dagegen ausgeschlossen werden. Insbesondere für eine nicht-Abelsche Gruppe, bei der es keine Selbstwechselwirkung der Gluonen gibt, ist $C_A = 0$. Interpretiert man die 3 Farb-Freiheitsgrade als drei unabhängige Ladungen entsprechend einer Gruppe $U(1)_3$, so wäre $C_F/T_F = 3$. Dies ist jedoch komplett ausgeschlossen, wie die Messung zeigt.

5.4 Streuprozesse mit Hadronen

Grundsätzlich sind Streuprozesse mit Hadronen im Anfangs- oder Endzustand sehr komplex, denn:

- Jedes Hadron besteht aus mehreren Partonen, die fortwährend miteinander wechselwirken. Solche Vielteilchenprozesse sind in der Regel theoretisch nicht detailliert berechenbar.
- Die Selbstwechselwirkung der Gluonen führt zu einem Anstieg der Kopplungsstärke mit dem Abstand und erreicht bei ca. 1 fm einen Wert nahe eins, so dass eine Störungsrechnung in Potenzen von α_s nicht mehr konvergiert.

Trotzdem haben Streuprozesse mit Protonen im Anfangszustand zu wichtigen Erkenntnissen in der Teilchenphysik geführt. Hierzu gehören die tief-inelastischen Elektron-Proton Streuung (Entdeckung der Quarks im Proton am SLAC) und $p-\bar{p}$ Kollisionen (Entdeckung der schweren b und t Quarks am Fermilab sowie der W und Z Bosonen am CERN).

Wie im Folgenden erklärt können diese und andere Prozesse mit Hadronen bei hohen Impulsüberträgen im Rahmen der perturbativen QCD beschrieben werden, indem man Parton-Verteilungen der Protonen mit partonischen Wirkungsquerschnitten faltet. Grundlage hierfür sind Faktorisierungstheoreme der QCD.

5.4.1 Tief-inelastische Streuung

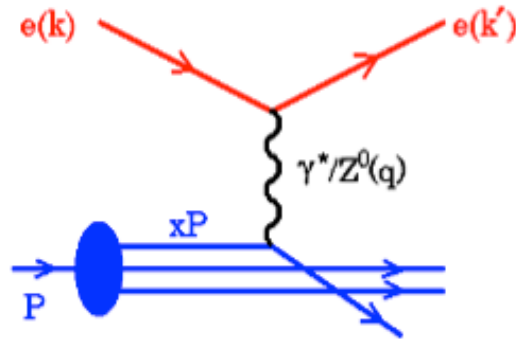


Abbildung 8: Feynman-Diagramm für tief-inelastische Streuung.

Die tief-inelastische Elektron-Proton Streuung (oder allgemeiner Lepton-Nukleon Streuung, Abkürzung “DIS” für “deep inelastic scattering”) ist der Prozess

$$e + p \rightarrow e + X$$

wobei X einen Endzustand aus Hadronen darstellt. Tief-inelastisch bedeutet, dass sowohl der 4-Impulsübertrag $Q^2 = -t$ zwischen Elektron und Proton als auch die invariante Masse M_X aller Hadronen im Endzustand groß ist gegenüber der Skala der starken Wechselwirkung (hier die Masse des Protons).

$$Q^2 \gg M_p^2 \quad M_X \gg M_p$$

Diese Forderungen stellen sicher:

- Das räumliche Auflösungsvermögen

$$\Delta x \approx 1/Q \ll R_p$$

reicht aus um Strukturen im Inneren des Proton-Radius $R_p = (200\text{MeV})^{-1}$ aufzulösen.

- Die Reaktionsdauer des DIS- Prozesses

$$t_{DIS} \approx 1/Q \ll t_{QCD}$$

ist deutlich kleiner als die typische Fluktuationsdauer t_{QCD} des Protons in ein Parton und einen wie immer gearteten Rest des Protons. Diese Zeit ist typisch gegeben durch die Skala der QCD, also etwa $(200 \text{ MeV})^{-1}$.

- Für große Q^2 ist die starke Kopplungskonstante zahlenmäßig klein und damit der Beitrag von QCD- Diagrammen höherer Ordnung ebenfalls klein und berechenbar.
- Bei großen Werten von $M_X \gg M_p$ in einem Ereignis wurde offenbar mehr als nur das Proton im Endzustand erzeugt, d.h. der Prozess ist inelastisch. M_X entspricht dann der gesamten Energie aller Hadronen und ist damit auch ein Mass für den Phasenraum der Hadronen. Bei großen Werten von M_X zeigt es sich experimentell, dass auch $M_X \gg \sum M_{\text{Hadronen}}$ erfüllt ist, so dass der Phasenraumfaktor für den Übergang Parton \rightarrow Hadron eins ist. Anders ausgedrückt können die produzierten Quarks und Gluonen mit Wahrscheinlichkeit eins in Hadronen übergehen. Damit kann der Prozess der Streuung an Hadronen auf Rechnungen mit Quarks und Gluonen zurückgeführt werden.

Insgesamt bedeutet also ein hoher Werte des Impulsübertrags Q^2 , dass eine Momentaufnahme der Fluktuationen des Protons aufgenommen wird, wobei große Werte von Q^2 einer hohen Zeitauflösung von kleinen Strukturen innerhalb des Protons entsprechen. Aus vielen Streuprozessen bei hohen Q^2 und hohen M_X lässt sich damit ein statistisches Bild der Fluktuationen der Partonen im Proton ermitteln.

5.5 Faktorisierung

Die oben diskutierte Vorstellung einer Momentaufnahme des Protons bei harten Prozessen (d.h. hohen Impulsüberträgen) ist auch die Grundlage des Faktorisierungstheorems der QCD. Dieses sagt aus, dass sich der Wirkungsquerschnitt für DIS und andere Prozesse mit Protonen in Faktoren zerlegen lässt:

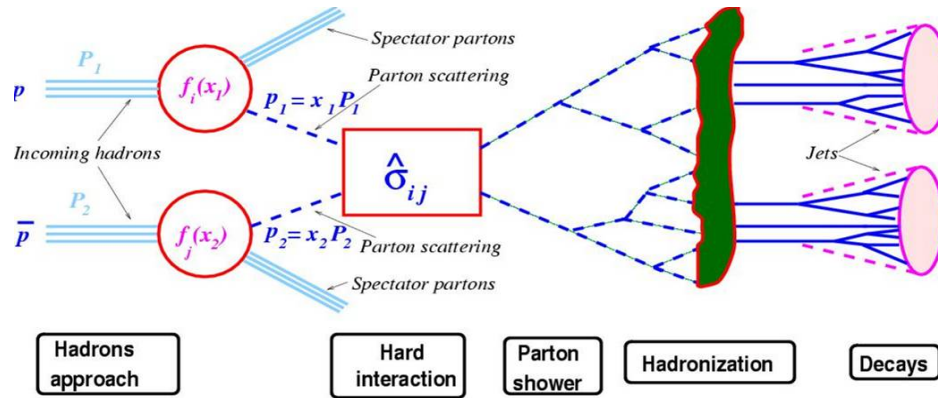


Abbildung 9: Zeitlicher Ablauf einer Proton-Proton-Streuung und Elemente der Faktorisierung.

- Parton-Dichtefunktionen (PDFs) für Quarks und Gluonen,

$$f_{q/p}(x, Q^2) \quad f_{g/p}(x, Q^2)$$

Hierbei ist

$$p_i = x p_p$$

und damit beschreibt x der Bruchteil des 4-er Impulses p_i , den ein Parton i am 4er-Impuls p_p des Protons trägt¹¹. Die PDFs sind damit charakteristisch für die innere Struktur des Protons, d.h. die langreichweitigen Wechselwirkungen der Partonen untereinander und das Confinement. Die PDFs lassen sich daher auch nicht perturbativ berechnen. Sie werden allerdings auch vom Auflösungsvermögen Q des Prozesses abhängen und diese Abhängigkeit von Q ist berechenbar (Skalenverletzung der PDFs).

- Wirkungsquerschnitt für den elastischen, harten Sub-Prozess, also z.B. für $e+u \rightarrow e+u$ oder $d+g \rightarrow d+g$. Dieser wird von der Schwerpunktsenergie \hat{s} des Subprozesses und dem Impulsübertrag Q^2 abhängen, $\hat{\sigma}(\hat{s}, Q^2)$. Er kann mit den bekannten Mitteln der Störungsrechnung beschrieben werden. Für DIS ist z.B. der Wirkungsquerschnitt (bis auf die Quark-Ladung q_q) gleich dem $e\mu \rightarrow e\mu$ Wirkungsquerschnitt ($Q^2 = -t$):

$$\frac{d\sigma_{eq}}{dt} = q_q^2 q_e^2 \frac{1}{8\pi \hat{s}^2} \frac{\hat{s}^2 + \hat{u}^2}{t^2}$$

¹¹Dies ist nur sinnvoll in einem Intertialsystem, in dem sich das Proton mit großer Energie $E_p \gg M_p$ bewegt, so dass die Massen von Proton und Parton keine Rolle spielen und x gleichzeitig den Impulsbruchteil und den Energiebruchteil des Partons beschreibt.

Insgesamt ist damit der Wirkungsquerschnitt für DIS gegeben durch die Summe über alle Quark-Flavour

$$d\sigma_{ep \rightarrow eX} = \sum_i \int dx f_{i/p}(x, Q^2) d\hat{\sigma}_{eq \rightarrow eq}$$

5.6 Messung der Parton-Dichteverteilungen

Die PDFs wurden zuerst am SLAC und später bei höheren Schwerpunktsenergien in fixed-Target DIS Experimenten vermessen. Die genauesten Daten stammen vom HERA Beschleuniger am DESY, der bis 2007 Elektronen mit 27,6 GeV und Protonen mit 920 GeV zur Kollision brachte. In diesen Experimenten wird

$$F_2 = \sum_i q_i^2 x f_{i/p}(x, Q^2)$$

gemessen, also eine Linearkombination der Quark-PDFs. Andere Messungen z.B.

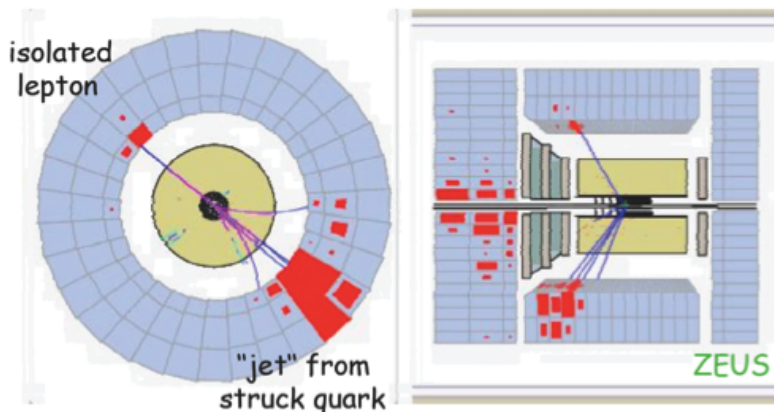


Abbildung 10: Bild eines DIS Ereignisses im ZEUS Experiment bei HERA. Elektronen laufen von links ein, protonen von rechts. Erkennbar ist das gestreute Elektron, ein gestreuter Jet und die Fragmentationsreste des Protons ganz links.

mit W -Austausch oder an Deuteronen ergeben andere Linearkombination. An alle verfügbaren Messungen werden dann Funktionen für die PDFs angepasst. Hierbei wird ausserdem sichergestellt, dass die Summenregeln für die Quark-Flavour und den Gesamt-Impuls erfüllt sind.

$$\int_0^1 [u(x) - \bar{u}(x)] dx = 2, \quad \int_0^1 [d(x) - \bar{d}(x)] dx = 1, \quad \int_0^1 [s(x) - \bar{s}(x)] dx = 0$$

$$\int_0^1 [\sum_i (q_i(x) + \bar{q}_i(x)) + g(x)] x dx = 1$$

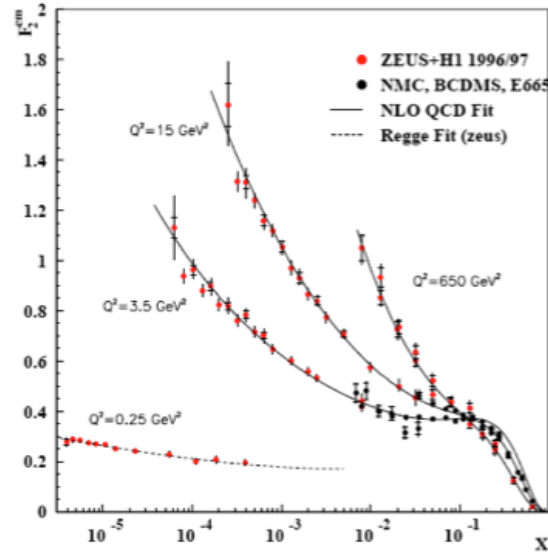


Abbildung 11: Messung von F_2 von HERA bei ausgewählten Werten von Q^2 .

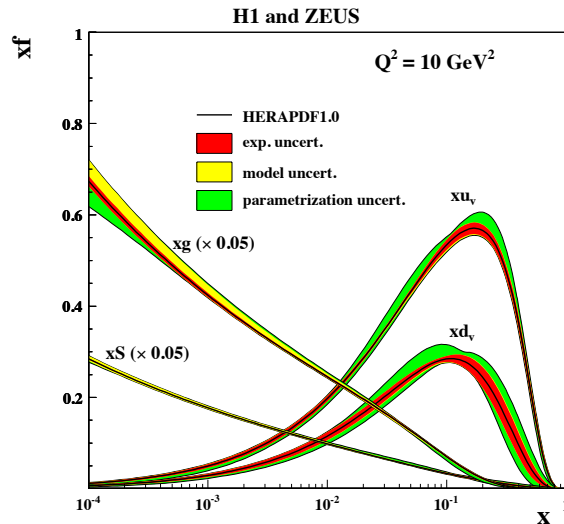


Abbildung 12: Die Parton-Dichteverteilungen $xf(x)$ für die Valenz-Quarks (xu_v, xd_v), die See-Quarks ($xS = 2x(\bar{u} + \bar{c} + \bar{d} + \bar{s})$) sowie die Gluonen (xg) bei einem Impulsübertrag von $Q^2 = 10 \text{ GeV}^2$. Die Gluon-Dichte und die See-Quark-Dichte wurde um einen Faktor 20 verkleinert dargestellt. Die Breite der Bänder entspricht den Unsicherheiten.

5.7 Perturbative QCD in der Quark und Gluon Streuung

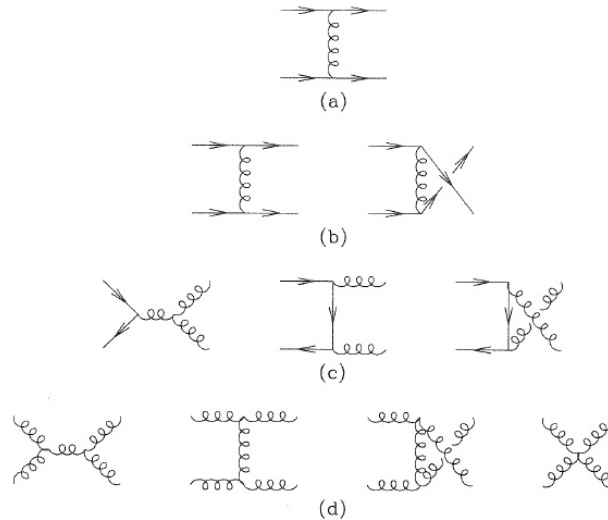


Abbildung 13: Feynman-Graphen für $2 \rightarrow 2$ Prozesse zur Jet-Produktion an Hadron-Beschleunigern.

An Hadron-Beschleunigern treten Quarks und Gluonen sowohl im Anfangs- als auch im Endzustand auf. Feynman-Diagramme für $2 \rightarrow 2$ Prozesse von Quarks und Gluonen haben eine sehr ähnliche Struktur wie die fundamentalen Prozesse der QED, da die Quarks Spin-1/2 haben und über eine γ^μ -Kopplung mit den Spin-1 Gluonen wechselwirken. Es gilt also ebenfalls Chiralität-Erhaltung am Vertex, so dass die Matrixelemente neben den Propagatoren für Quarks und Gluonen auch die entsprechenden Winkelverteilungen, ausgedrückt in Mandelstam-Variablen, haben. Neu ist jedoch, dass bei unbestimmter Farbe im Anfangs- und Endzustand über alle möglichen Farb-Kombinationen summiert werden muss. Hierdurch erklären sich die Vorfaktoren für die Matrixelemente. Für einen Vergleich der QCD Berechnungen mit Daten z.B. von $p\bar{p}$ Beschleunigern benötigt man allerdings noch zusätzlich die Impulsverteilung der Quarks und Gluonen im Proton.

Process	$\overline{\sum \mathcal{M} ^2}/g^4$	$\theta^* = \pi/2$
$q q' \rightarrow q q'$	$\frac{4}{9} \frac{\hat{s}^2 + \hat{u}^2}{\hat{t}^2}$	2.22
$q \bar{q}' \rightarrow q \bar{q}'$	$\frac{4}{9} \frac{\hat{s}^2 + \hat{u}^2}{\hat{t}^2}$	2.22
$q q \rightarrow q q$	$\frac{4}{9} \left(\frac{\hat{s}^2 + \hat{u}^2}{\hat{t}^2} + \frac{\hat{s}^2 + \hat{t}^2}{\hat{u}^2} \right) - \frac{8}{27} \frac{\hat{s}^2}{\hat{u}\hat{t}}$	3.26
$q \bar{q} \rightarrow q' \bar{q}'$	$\frac{4}{9} \frac{\hat{t}^2 + \hat{u}^2}{\hat{s}^2}$	0.22
$q \bar{q} \rightarrow q \bar{q}$	$\frac{4}{9} \left(\frac{\hat{s}^2 + \hat{u}^2}{\hat{t}^2} + \frac{\hat{t}^2 + \hat{u}^2}{\hat{s}^2} \right) - \frac{8}{27} \frac{\hat{u}^2}{\hat{s}\hat{t}}$	2.59
$q \bar{q} \rightarrow g g$	$\frac{32}{27} \frac{\hat{t}^2 + \hat{u}^2}{\hat{t}\hat{u}} - \frac{8}{3} \frac{\hat{t}^2 + \hat{u}^2}{\hat{s}^2}$	1.04
$g g \rightarrow q \bar{q}$	$\frac{1}{6} \frac{\hat{t}^2 + \hat{u}^2}{\hat{t}\hat{u}} - \frac{3}{8} \frac{\hat{t}^2 + \hat{u}^2}{\hat{s}^2}$	0.15
$g q \rightarrow g q$	$-\frac{4}{9} \frac{\hat{s}^2 + \hat{u}^2}{\hat{s}\hat{u}} + \frac{\hat{u}^2 + \hat{s}^2}{\hat{t}^2}$	6.11
$g g \rightarrow g g$	$\frac{9}{2} \left(3 - \frac{\hat{t}\hat{u}}{\hat{s}^2} - \frac{\hat{s}\hat{u}}{\hat{t}^2} - \frac{\hat{s}\hat{t}}{\hat{u}^2} \right)$	30.4

Abbildung 14: Matrixelemente für $2 \rightarrow 2$ Prozesse zur Jet-Produktion an Hadron-Beschleunigern.

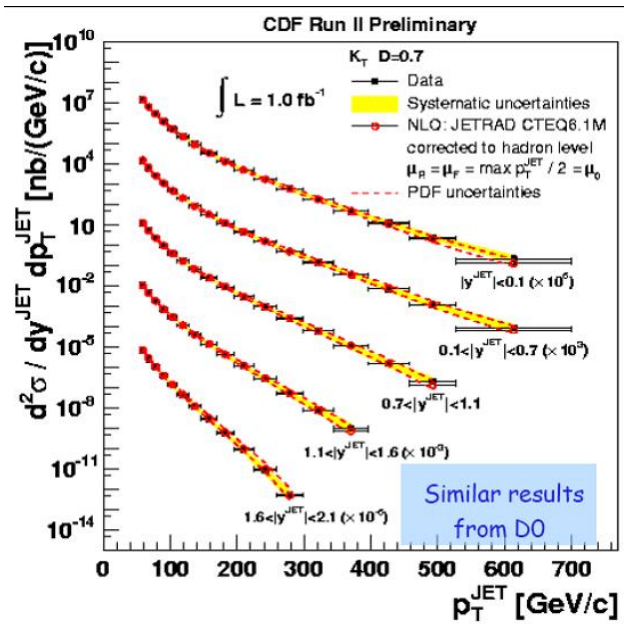


Abbildung 15: Eine Messung der Jet-Wirkungsquerschnitte am Tevatron $p\bar{p}$ Beschleuniger bei einer Schwerpunktsenergie von 2 TeV als Funktion des transversalen Impulses P_T und der Pseudorapidität η der Jets.

6 Schwache Wechselwirkung

6.1 Historie der Schwachen Wechselwirkung

1896 Bequerel entdeckt die Radioaktivität

1914 Chadwick entdeckt, dass β -Strahlen anders als α -Strahlen ein kontinuierliches Energie-Spektrum haben. Heute wissen wir, dass β -Strahlen Elektronen oder Positronen sind, die mit keV - MeV Energien von zerfallenden Kernen emittiert werden.

1927 Ellis und Woostar argumentieren, dass $E_\beta \leq E_{max}$ gilt. Daraus folgt, dass entweder die Energie-Erhaltung verletzt ist (Bohr) oder aber ein 3-Körperzerfall mit einem neuen, unsichtbaren Teilchen vorliegt, dem Neutrino (Pauli). Unsichtbar bedeutet, dass es weder elektromagnetischer noch starker Wechselwirkung unterliegt.

1933 Fermi formuliert die Theorie des β -Zerfalls. Für den Zerfall

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$$

setzte er als Matrix-Element an:

$$\mathcal{M} = G (\bar{u}_p \gamma^\mu u_n) (\bar{u}_e \gamma_\mu v_\nu)$$

also eine Theorie mit einem "geladenem" Strom ("charged current"), der unterschiedliche Teilchen zusammenfasst.

Dies ist eine 4-Fermion Wechselwirkung ohne Propagator. (Im Gegensatz dazu ist in der QED z.B.: $\mathcal{M} = (q_p \bar{u}_p \gamma^\mu u_p) \frac{-1}{q^2} (q_e \bar{u}_e \gamma_\mu u_e)$.)

Die neue Kopplungskonstante ist

$$G = 1,1 \cdot 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$$

Diese Fermi-Theorie enthält aber nicht die Paritätsverletzung der schwachen Wechselwirkung.

1956 Lee und Yang argumentieren, dass in allen schwachen Prozessen Paritätsverletzung auftritt.

1960 Glashow, Salam und Weinberg formulieren die "GSW"-Theorie der Elektroschwachen Wechselwirkung, das Standard-Modell. Sie beinhaltet γ, W^\pm und sagt das Z^0 voraus, also auch neutrale, schwache Ströme.

1973 Entdeckung der neutralen, schwachen Ströme in der Gargamelle Blasenkamer am CERN in der Reaktion:

$$\bar{\nu}_\mu + e^- \rightarrow \bar{\nu}_\mu + e^-$$

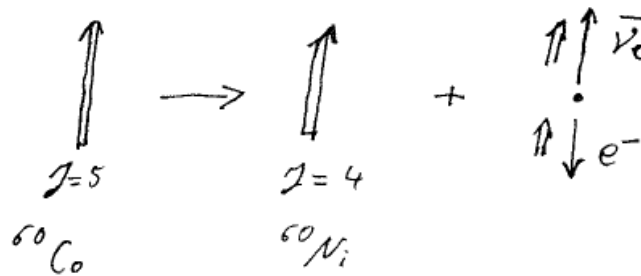
1984 Entdeckung des W^\pm und des Z^0 Bosons am UA1 Experiment am CERN (Nobelpreis C. Rubia)

6.2 Paritätsverletzung und V-A Theorie

Am Beispiel des β -Zerfalls



lässt sich die Beobachtung der Paritätsverletzung verstehen.



Die Spinrichtung des Co wird durch ein Magnetfeld festgelegt. Man beobachtet, dass das e^- vorzugsweise entgegen der Richtung des Co-Spins emittiert wird. Da der e^- -Impuls ein Vektor ist und Spin ein Axialvektor ist folgt, dass die relative Richtung der beiden (Observable) nicht invariant unter einer Paritätstransformation ist.

In der sogenannten V-A Theorie der schwachen WW werden die Projektionsoperatoren für die Händigkeit (Chirality) benutzt:

$$u_L = P_L u = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)u \quad u_R = P_R u = \frac{1}{2}(1 + \gamma^5)u$$

Hierfür gilt

$$u = u_L + u_R \quad \bar{u}_R \gamma^\mu u_L = 0 \quad \bar{u} \gamma^\mu u_L = \bar{u}_L \gamma^\mu u_L$$

Damit setzt man für die schwachen Ströme an (hier für e^- einlaufend und $\bar{\nu}_e$ auslaufend) :

$$J^\mu = \bar{u}_\nu \gamma^\mu \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) u_e = \bar{u}_\nu \gamma^\mu P_L u_e = \bar{u}_\nu \gamma^\mu u_{e,L} = \bar{u}_{\nu,L} \gamma^\mu u_{e,L}$$

Damit gilt in der 4-Fermion Wechselwirkung für linkshändige Fermionen z.B.

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e \quad \mathcal{M} = \frac{4G}{\sqrt{2}} (\bar{u}_p \gamma^\mu \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) u_n) (\bar{u}_e \gamma_\mu \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) v_{\nu_e})$$

$$\mu^- \rightarrow \nu_\mu + e^- + \bar{\nu}_e \quad \mathcal{M} = \frac{4G}{\sqrt{2}} (\bar{u}_{\nu_\mu} \gamma^\mu \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) u_\mu) (\bar{u}_e \gamma_\mu \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) v_{\nu_e})$$

Die einzige Änderung im Vergleich zu Matrixelementen der QED ist also die Ersetzung

$$\gamma^\mu \rightarrow \gamma^\mu \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) = \frac{1}{2}(\gamma^\mu - \gamma^\mu \gamma^5)$$

Dies hat die Form Vektorstrom (γ^μ) minus Axialvektorstrom ($\gamma^\mu \gamma^5$) und wird daher die $V - A$ Theorie der schwachen Wechselwirkung genannt. Das gleichzeitige Auftreten von Vektor und Axialvektor bedeutet, dass diese Wechselwirkung die Parität verletzt:

- Linkshändige Fermionen (e_L^-, ν_L, u_L, d_L) und rechtshändige Anti-Fermionen ($e_R^+, \bar{\nu}_R, \bar{u}_R, \bar{d}_R$) nehmen an der Wechselwirkung teil.
- e_R^-, ν_R, u_R, d_R und $e_L^+, \bar{\nu}_L, \bar{u}_L, \bar{d}_L$ nehmen nicht an der schwachen Wechselwirkung teil.

Dies nennt man eine chirale Theorie.

6.3 P und C: Parität und Ladungskonjugation

Aus der Paritätsverletzung folgt auch die Verletzung der Ladungskonjugation (oder C-Parität).

Als Beispiel betrachten wir den Zerfall der geladenen Pionen,

$$\pi^+ \rightarrow \nu_\mu \mu^+$$

Da der Spin des Pions null ist muss wegen Drehimpulserhaltung der Spin des Neutrinos und des Muons immer in entgegengesetzte Richtungen zeigen.

Im Ruhesystem des Pions folgt aus den Massen der Teilchen ($M_\pi = 139,6$ MeV, $M_\mu = 106$ MeV, $M_\nu < 0.1$ eV) für diesen 2-Körperzerfall die Energie des Neutrinos zu

$$E_\nu = \frac{M_\pi^2 + M_\nu^2 - M_\mu^2}{2M_\pi} = 29.6 \text{ MeV}$$

Das Neutrino ist also hoch-relativistisch. Damit gilt auch $|\vec{P}_\mu| = |\vec{P}_\nu| \approx E_\nu = 29.6 \text{ MeV}$.

Wegen der Paritätsverletzung der schwachen WW ist das Fermion ν_μ immer linkshändig, das Antifermion μ^+ immer rechtshändig. Daher ist für das Neutrino die Helizität negativ, der Spin zeigt also entgegengesetzt zur Flugrichtung. Das μ^+ dagegen ist zwar rechtshändig, aber nicht sehr relativistisch, so dass seine Spinrichtung nicht eindeutig festliegt. Der Muon Spin kann also auch entgegengesetzt zur Flugrichtung zeigen, so dass Drehimpulserhaltung erfüllt ist. Dieser Zerfall ist daher möglich mit Spin-Ausrichtungen entgegen den Flugrichtungen (\downarrow).

$$\pi^+ \rightarrow \nu_\mu \downarrow + \mu^+ \downarrow$$

Wendet man eine Paritätstransformation auf diesen Prozess an, so ändert sich die Impulsrichtung aber nicht die Spin Richtung, so dass die Spins parallel zur Bewegungsrichtung sind (\uparrow),

$$\pi^+ \rightarrow \nu_\mu \uparrow + \mu^+ \uparrow$$

Dieser Prozess ist verboten, da das Neutrino jetzt rechtshändig wäre. Es liegt also Paritätsverletzung vor.

Wendet man dagegen Ladungskonjugation an, so folgt

$$\pi^- \rightarrow \bar{\nu}_\mu \downarrow + \mu^- \downarrow$$

ein ebenfalls verbotener Prozess. Ladungskonjugation ist also ebenfalls verletzt.

Die Kombination von beiden Transformationen, CP, liefert dagegen einen erlaubten Prozess der schwachen WW, da hier das Anti-Neutrino in ultrarelativistischer Näherung rechtshändig ist,

$$\pi^- \rightarrow \bar{\nu}_\mu \uparrow + \mu^- \uparrow$$

CP ist also für den Pion-Zerfall erhalten.

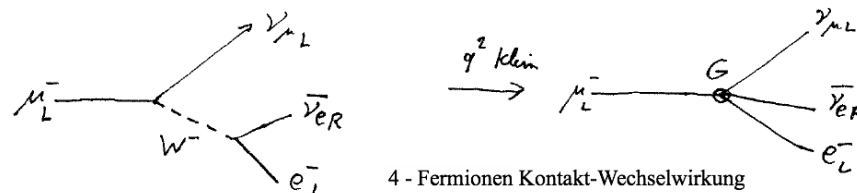
CP Erhaltung ist jedoch nicht exakt erfüllt. Insbesondere tritt im Kaon-Zerfall und B-Meson Zerfall eine sehr kleine Verletzung der CP-Erhaltung auf.

6.4 Fermi-Konstante und W-Propagator

In der heutigen Interpretation durch die Theorie der elektroschwachen Vereinheitlichung entsteht der Prozess

$$\mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu$$

durch den Austausch des gleichen, neuen Teilchens W^\pm mit Spin 1. Für den Muon-Zerfall als Beispiel bedeutet das:



$$\mathcal{M} \approx \frac{g}{\sqrt{2}} \frac{J^\mu}{2} \frac{1}{M_W^2 - q^2} \frac{g}{\sqrt{2}} \frac{J_\mu}{2}$$

Die neue Konstante g ist dabei die Kopplungskonstante des W - Bosons an ein Lepton oder Quark Paar. Im Limes kleiner Impulsüberträge $|q^2| \ll M_W^2$ vereinfacht sich der Propagator für das schwere W -Boson dann zu $1/M_W^2$. Der Vergleich mit der Formel aus der $V - A$ Theorie liefert:

$$\boxed{\frac{G}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8M_W^2}}$$

Damit ist die Fermikonstante als Masse eines Teilchens interpretiert worden.

Andere Betrachtungen Bei hohen Impulsüberträgen wird der W -Propagator die richtigen Ergebnisse liefern, nicht jedoch die Fermi-Theorie. Vergleicht man den Austausch des masselosen Photons mit dem eines massiven W -Bosons, so entspricht dies den Potentialen (siehe auch Abschnitt A.9):

$$\begin{aligned} \gamma\text{-Austausch:} \quad V_{Coulomb} &= \frac{e^2}{4\pi r} \\ \text{W-Austausch:} \quad V_{Yukawa} &= \frac{g^2}{4\pi r} e^{-M_W \cdot r} \quad \text{Yukawa-Potential} \\ \text{für } M_W \rightarrow \infty \quad V_{Yukawa} &= \frac{g^2}{M_W^2} \delta^3(r) \end{aligned}$$

Eine große Masse entspricht daher eine kurze Reichweite. Symbolisch geht damit der Propagator des W -Austausches in eine 4-Fermion Kontaktwechselwirkung über.



Die Reichweite der schwachen WW ist damit

$$R_W \approx \frac{\hbar c}{M_W} = \frac{200 \text{ MeV fm}}{80 \text{ GeV}} \approx 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ fm}$$

Das ist etwa 1/400 der Reichweite der starken Wechselwirkung oder des Radius des Protons. Die schwache Wechselwirkung ist also schwach, weil W und Z Bosonen so schwer sind. Die Kopplungskonstante g ist etwa

$$g = 0,7$$

6.5 Schwache Wechselwirkung von Hadronen

Die beiden Prozesse

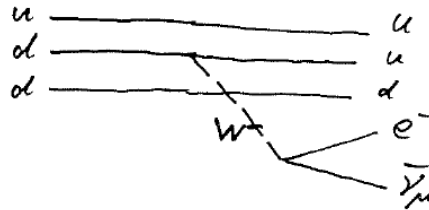
$$\mu^- \rightarrow \nu_\mu e^- \bar{\nu}_e$$

und

$$n \rightarrow p e^- \bar{\nu}_e$$

können durch W -Austausch mit der gleichen Kopplungskonstante G beschrieben werden, wenn man den unterschiedlichen Phasenraum der Prozesse und die Effekte durch die Paritätsverletzung berücksichtigt.

Für diese Universalität der schwachen Wechselwirkung spielt es offenbar keine Rolle, dass das Muon elementar, das Neutron dagegen zusammengesetzt ist. Dies erklärt sich durch das Quark- Modell der Hadronen und das Faktorisierungstheorem der QCD. Innerhalb des Neutrons zerfällt ein d -Quark in ein u - Quark, so dass ein Elektron und ein Neutrino entsteht. Obwohl der Impulsübertrag Q^2 durch das



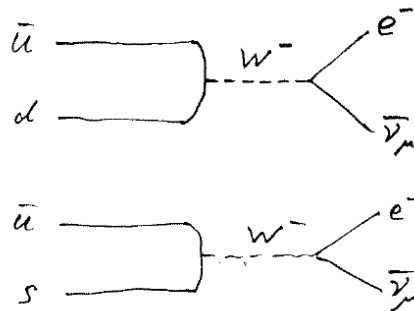
W nur ca. 1 MeV beträgt sorgt die hohe W - Masse für eine Wechselwirkung mit kurzer Reichweite und kurzer Zeitdauer, so dass die anderen Quarks nur als Begleiter (Spectator) wirken, die während dieser kurzen Zeitspanne quasi statisch sind und nicht in die Reaktion eingreifen. Die Universalität der schwachen Wechselwirkung erklärt sich also aus der Ähnlichkeit der Quark und Lepton- Zerfälle,

$$d \rightarrow u e^- \bar{\nu}_e \quad \hat{=} \quad \mu^- \rightarrow \nu_\mu e^- \bar{\nu}_e$$

Durch "kreuzen" ergibt sich daraus auch der Pion-Zerfall ($\pi^- = \bar{u}d$):

$$\bar{u}d \rightarrow e^- \nu_e$$

Ganz analog ergibt sich der Zerfall der schwereren Mesonen, z.B. des $K^- = \bar{u}s$. Für



diese Zerfälle ist allerdings die Rate durch Effekte der Paritätsverletzung deutlich unterdrückt. Beim K^- Zerfall kommt hinzu, dass eine Kopplung zwischen Quarks verschiedener Generationen vorliegt. Solche Übergänge sind durch die CKM- Matrix der Quark-Mischungen zusätzlich unterdrückt.

6.6 SU(2) Symmetrie

Heute basiert die akzeptierte Theorie der schwachen Wechselwirkung auf der $SU(2)_L$ Symmetrie im Flavourraum. Beteiligt sind dabei nur die linkshändigen Fermionen ("L"). Die Eichbosonen sind die W^\pm und Z^0 Bosonen. Im Vergleich zu den anderen Wechselwirkungen haben diese Eichbosonen eine hohe Masse und sind instabil:

γ	QED	$M_\gamma = 0$	$\Gamma_\gamma = 0$
g	QCD	$M_g = 0$	$\Gamma_g = 0$
W^\pm, Z^0	Schwache WW	$M_W = 80,425 \pm 0,038 \text{ GeV}$ $M_Z = 91,1876 \pm 0,0021 \text{ GeV}$	$\Gamma_W = 2,124 \pm 0,041 \text{ GeV}$ $\Gamma_Z = 2,4952 \pm 0,0023$

Hierbei ist Γ die Energieunschärfe aufgrund der endlichen Lebensdauer.

Gemäß Standard-Modell werden alle linkshändigen Fermionen in Doublets, alle rechtshändigen in Singletts eingeordnet.

Linkshändige Lepton-Doublets

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L \quad \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}_L \quad \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}_L \quad \begin{matrix} \curvearrowright W^- \\ \curvearrowleft W^+ \end{matrix}$$

Linkshändige Quark-Doublets

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L \quad \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}_L \quad \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_L \quad \begin{matrix} \curvearrowright W^- \\ \curvearrowleft W^+ \end{matrix}$$

Übergänge innerhalb eines Doublets werden durch W -Austausch vermittelt. Dieser Übergang entspricht einer Rotation im $SU(2)$ Raum. Die schwache Wechselwirkung ist damit automatisch universell gleich für Leptonen und Quarks.

Rechtshändige Lepton-Singletts

$$e_R, \quad \nu_{eR}, \quad \mu_R, \quad \nu_{\mu R}, \quad \tau_R, \quad \nu_{\tau R}$$

Rechtshändige Quark-Singletts

$$(u_R), \quad d_R, \quad c_R, \quad s_R, \quad t_R, \quad b_R$$

Für die rechtshändigen Singletts sind keine Übergänge möglich, sie sind neutral bezüglich der schwachen Ladung und nehmen nicht an der schwachen WW teil.

Die Universalität der schwachen WW zeigt sich am direktesten in der relativen Häufigkeit der Zerfälle des W -Bosons. Kinematisch sind Zerfälle möglich in alle Doubletts außer (top-bottom). Aufgrund der Farbe der Quarks gilt

$$3 \cdot \Gamma_{W \rightarrow l\bar{\nu}_l} = \Gamma_{W \rightarrow qq'}$$

so dass

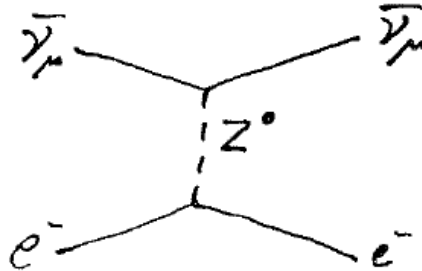
$$\Gamma_{e\nu_e} : \Gamma_{\mu\nu_\mu} : \Gamma_{\tau\nu_\tau} : \Gamma_{du} : \Gamma_{sc} = 1 : 1 : 1 : 3 : 3$$

gilt. Bei 9 gleichen Zerfallsmöglichkeiten ergibt sich ein Verzweigungsverhältnis von jeweils 11%, wie experimentell beobachtet.

Der Austausch von W -Bosonen ist stets mit einer Änderung der Lepton- oder Quark-Flavour sowie der Ladung verbunden. Damit lassen sich Reaktionen wie

$$\bar{\nu}_\mu + e^- \rightarrow \bar{\nu}_\mu + e^-$$

nicht erklären, da hier kein Übergang innerhalb einer Generation stattfindet. Die Entdeckung solcher neutraler Ströme wird durch das Z^0 Boson erklärt, das ebenfalls Spin 1 hat. Erwärmt würde man aufgrund der $SU(2)_L$ Symmetrie insgesamt



3 Eichbosonen. Allerdings kann das Z^0 nicht einfach ein neutraler Partner des W -Bosons sein, denn es hat eine andere Masse und koppelt nicht universell gleich an alle Quarks und Leptonen. Beispielsweise beträgt das Verzweigungsverhältnis des Zerfalls $Z^0 \rightarrow e^+e^-$ nur ca. 3%. Ursache ist die Mischung zwischen Photon und Z^0 in der vereinheitlichten elektroschwachen Wechselwirkung $SU(2)_L \times U(1)_Y$ zusammen mit dem Higgs-Mechanismus.

6.7 Zerfälle als Test von Erhaltungssätzen

Instabile Teilchen mit Lebensdauer τ haben gemäß Unschärferelation eine Energieunschärfe (“Breite”)

$$\Gamma = \frac{1}{\tau}$$

und folgen dem Zerfallsgesetz

$$dN = -\Gamma N dt, \quad N(t) = N_0 e^{-\Gamma t}$$

Γ wird daher auch als Zerfallsrate pro Zeit bezeichnet. Treten mehrere Zerfallskanäle mit Partial-Breite Γ_i auf, so ist die totale Breite gegeben durch

$$\Gamma = \sum_i \Gamma_i$$

Das Verzweigungsverhältnis

$$BR_i = \frac{\Gamma_i}{\Gamma}$$

gibt dann die relative Anzahl der Zerfälle in den Zerfallskanal i an.

Die Partial-Breite für Zerfälle

$$a \rightarrow 1 + 2 + 3 + \dots$$

kann gemäß Fermi’s goldener Regel aus den Feynman-Regeln berechnet werden,

$$d\Gamma = \frac{1}{2E_a} \overline{|\mathcal{M}|^2} \left(\prod_i \frac{d\vec{p}_i}{(2\pi)^3 2E_i} \right) (2\pi)^4 \delta(p_a - p_1 - p_2 - p_3 - \dots)$$

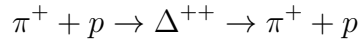
wobei der erste Faktor $1/2E_a$ die Anzahl der Teilchen im Anfangszustand angibt, $\overline{|\mathcal{M}|^2}$ das Spin-Mittel des Matrixelements ist und die δ -Funktion 4-er Impulserhaltung sicherstellt. Die Zerfallsrate Γ ist differentiell in den Impulsen aller Zerfallsprodukte i . Insbesondere ergibt sich für einen 2-Körperzerfall $a \rightarrow b + c$ im Schwerpunktsystem von a

$$d\Gamma_i = \frac{1}{32\pi^2} \overline{|\mathcal{M}|^2} \underbrace{\frac{|P_b^*|}{M_a^2} d\Omega_b}_{\text{Phasenraum(PS)}}$$

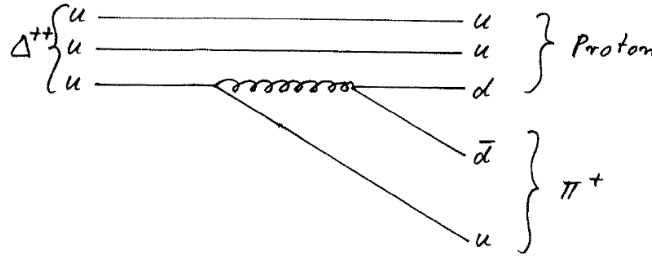
6.7.1 Zerfälle durch Starke WW

Die starke WW erlaubt keine Umwandlung von fundamentalen Fermionen. Allerdings bilden Hadronen aufgrund ihrer inneren Struktur angeregte Zustände mit höherem Drehimpuls, die in den Grundzustand zerfallen können. Als Beispiel dient das Δ^{++} Baryon. Es wurde von E.Fermi entdeckt und besteht aus drei u Quarks mit parallelem

Spin ($\Delta^{++} \hat{=} u \uparrow u \uparrow u \uparrow$) und Bahndrehimpuls $L = 0$. Fermi schloss daraus aufgrund des Pauli-Prinzips für identische Fermionen auf die Existenz der Farbe der Quarks. Es kann in Reaktionen von Pionen und Protonen erzeugt werden,



Ein typisches Zerfallsdiagramm ist



Die Lebensdauer $\tau_{\Delta^{++}} \approx 10^{-23} s$ ist typisch für Zerfälle durch die starke WW.

6.7.2 Zerfälle durch Elektromagnetische WW

Auch die elektromagnetische WW kann keine elementaren Quanten umwandeln. In gebundenen Systemen aus Teilchen und Antiteilchen können sich diese allerdings gegenseitig vernichten. Ein Beispiel hierfür ist das π^0 Meson, das leichteste aller Hadronen,

$$\pi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d})$$

Es zerfällt mit einem BR von über 99% gemäß

$$\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$$



Die Lebensdauer beträgt $\tau_{\pi^0} = 8,4 \cdot 10^{-17} s$, so dass $c \cdot \tau \approx 25 ns$ ist. Das π^0 zerfällt damit “prompt”, d.h. auch bei hohen Impulsen immer noch nach unmessbar kleinen Abständen vom Entstehungsort.

Man könnte erwarten, dass auch der Zerfall $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma\gamma$ erlaubt ist und etwa um einen Faktor $\alpha_{em} = 1/137$ seltener ist als der Zerfall in zwei Photonen. Tatsächlich findet man jedoch

$$\frac{BR(\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma\gamma)}{BR(\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma)} < 3 \cdot 10^{-8}$$

Grund hierfür ist die Erhaltung der C - Parität in der elm. WW.. Elektromagnetische Wellen und damit Photonen werden von sich ändernden Strömen erzeugt, die sich unter Ladungsänderung umdrehen. Daher haben diese Ströme und damit auch das Photon negative C - Parität, $C_\gamma = -1$.

Da die elektromagnetische WW die C - Parität erhält gilt

$$C|\pi^0 \rangle = C_{\pi^0} |\pi^0 \rangle = C|\gamma\gamma \rangle = C_\gamma^2 |\gamma\gamma \rangle$$

und somit $C_{\pi^0} = 1$. Demgegenüber hat ein Zustand mit drei Photonen $C_{\gamma\gamma\gamma} = C_\gamma^3 = -1$. Daher ist der Zerfall in drei Photonen verboten.

6.7.3 Schwache Zerfälle: Muon

Zu unterscheiden sind Prozesse der schwachen WW, bei denen genügend Energie vorhanden ist, so dass ein W oder Z Boson als reelles Teilchen im Endzustand produziert wird, z.B.

$$\begin{aligned} t &\rightarrow bW^+ && \text{oder} \\ e^+e^- &\rightarrow Z^0 && (\text{bei } E_{CMS} = M_Z) \end{aligned}$$

und solche Prozesse, bei denen das nicht der Fall ist, z.B.

$$\mu^- \rightarrow \nu_\mu e^- \bar{\nu}_e$$

oder

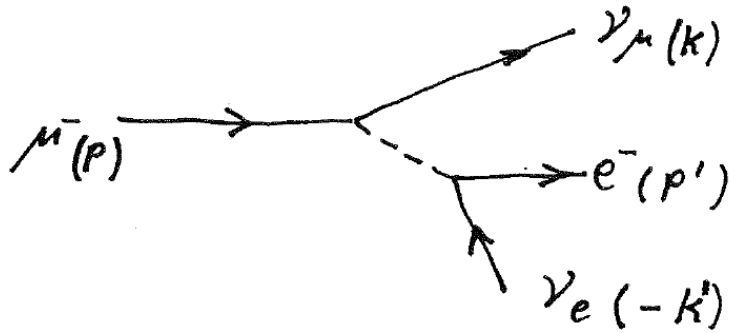
$$b \rightarrow c \mu^- \bar{\nu}_\mu$$

Nur in ersterem Fall sind die W, Z reell, so dass ihre Masse aus den Zerfallsprodukten rekonstruiert werden kann. In letzterem Fall sind die W, Z virtuell, d.h. $p_{W,Z}^2 \neq M_{W,Z}^2$. Damit haben die W, Z auch keine feste Energie sondern es ergibt sich ein kontinuierliches, breites Energiespektrum der Zerfallsprodukte (siehe Postulat des Neutrinos im β - Zerfall). Der Prozess muss daher als ein 3-Körperzerfall gerechnet werden. Die Zerfallsrate ist gegeben durch

$$d\Gamma = \frac{1}{2E} |\overline{\mathcal{M}}|^2 dQ.$$

Exemplarisch für den μ^- - Zerfall

$$\mu^- \rightarrow \nu_\mu e^- \bar{\nu}_e$$



ist das Matrixelement

$$\mathcal{M} = \frac{G}{\sqrt{2}} (\bar{u}_{(\nu_\mu)} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) u_{(\mu)}) (\bar{u}_{(e)} \gamma_\mu (1 - \gamma^5) v_{(\nu_e)})$$

Da der Impulsübertrag durch das W maximal die Masse des μ^- sein kann, so dass $|q^2| < M_\mu^2$, wird der Propagator des W hier durch die Masse des W genähert. Damit ergibt sich für das Matrixelement nach den gleichen Rechenmethoden wie bei der Berechnung von Streuprozessen:

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{2} \sum_{Spin} |\mathcal{M}|^2 = 64G^2 (p_{\nu_\mu} \cdot p_e) (p_{\nu_e} \cdot p_\mu)$$

Integration des Phasenraums mit Hilfe der δ -Funktion ergibt schliesslich die Zerfallsrate als Funktion der Energie des Elektrons, E_e , im Schwerpunktsystem des Muons

$$\Rightarrow \frac{d\Gamma}{dE_e} = \frac{G^2}{12\pi^3} m_\mu^2 E_e^2 \left(3 - \frac{4E_e}{m_\mu} \right)$$

Dieses Energie-Spektrum kann unmittelbar mit Messresultaten verglichen werden. Durch Integration über E_e erhält man die Lebensdauer τ_μ ,

$$\Gamma = \frac{1}{\tau} = \int_0^{m_\mu/2} \frac{d\Gamma}{dE_e} dE_e = \frac{G^2 m_\mu^5}{192\pi^3}$$

Aus der Lebensdauer des Muons $\tau_\mu = 2,2 \cdot 10^{-6}$ sec folgt ein sehr präziser Wert für die Fermi-Konstante für den Muon-Zerfall

$$G_\mu = 1,16635 \pm 0,00002 \cdot 10^{-5} GeV^{-2}$$

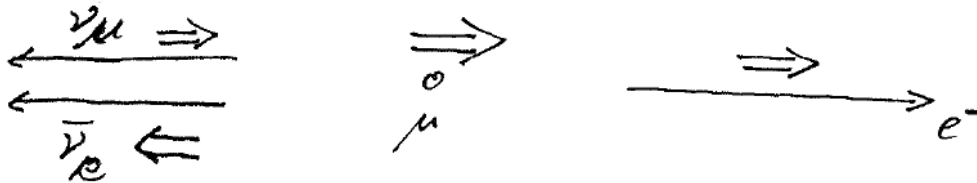
Für den Neutron-Zerfall stimmt (wegen der Quark-Mischung in der CKM Matrix) der Wert bis auf wenige Prozent genau mit diesem überein.

Zu beachten ist, dass die Masse des Muons aufgrund des Phasenraums mit der fünften Potenz in die Zerfallsrate eingeht. Aus diesem Grund zerfallen schwerere Teilchen sehr viel schneller, z.B. liegt die Lebensdauer des c -Quarks nur bei $0,5 \cdot 10^{-12}$ s. Hinzu kommt allerdings die Anzahl der Zerfalls-Moden und die CKM Mischung.

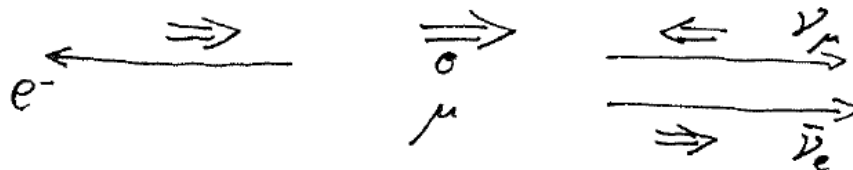
Spin Orientierung in μ Zerfall

Nahe des Endpunkts des Elektron-Energiespektrums hat das e^- maximale Energie. Dies ist der Fall wenn die beiden Neutrinos genau parallel zueinander entgegengesetzt zum e^- fliegen. Wegen der $V - A$ Kopplung der schwachen Wechselwirkung ist das ν_μ nur linkshändig und das $\bar{\nu}_e$ nur rechtshändig. Da sie sehr leicht und damit ultrarelativistisch sind folgt, dass ihre Helizitäten ebenfalls entgegengesetzt sind, ihre Spins sich also gegenseitig kompensieren, $S_{\nu_\mu} + S_{\bar{\nu}_e} = 0$. Wegen Drehimpulserhaltung muss dann der Spin des e^- parallel zum μ^- Spin sein. Da das e^- linkshändig und sehr schnell ist folgt, dass sein Impuls bevorzugt entgegengesetzt zum Spin des μ sein sollte. Daher ist für polarisierte Müonen der Zerfall nicht isotrop.

Unterdrückt:



Erlaubt:



Polarisierte μ^+ erhält man z.B. aus dem Zerfall $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$. Die Winkelverteilung der e^+ ist dann $\sim 1 - P \cos \theta$, wobei P die Polarisation der μ und θ der Winkel zwischen μ -Polarisation und e -Impuls ist.

6.7.4 Schwache Zerfälle: Pion

Experimentell findet man für die Zerfälle

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu^{(-)}$$

$$\pi^+ \rightarrow e^+ \nu_e^{(-)}$$

$$\frac{BR_{\pi \rightarrow \mu \nu}}{BR_{\pi \rightarrow e \nu}} = 8,3 \cdot 10^3$$

Die naive Erwartung wäre hingegen, dass die Kopplungen und Matrixelemente gleich sind, der Impuls der Elektronen in diesem Zerfall jedoch größer ist als der der Muonen ($m_{\pi^\pm} = 0,1396\text{GeV}$, $m_\mu = 0,1056\text{GeV}$, $m_e = 0,000511\text{GeV}$). Damit ist auch der Phasenraum größer, so dass der Zerfall in Elektronen häufiger sein sollte. Das ist aber in klarem Widerspruch zum Experiment.

Der Grund hierfür liegt in der V-A Struktur der schwachen WW. Wie bereits oben diskutiert entstehen aus dem π^- Zerfall linkshändige e^- bzw. μ^- , die jedoch positive Helizität haben. Da aber insbesondere das sehr leichte e^- fast relativistisch ist muss dieser Prozess stark unterdrückt sein gegenüber dem Zerfall in das viel schwerere μ^- . Zur Berechnung des π^\pm Zerfalls muss ein Strom für ein gebundenes $q\bar{q}'$ -System gefunden werden. Der einzige relevante Vektor für spinloses Teilchen ist der Impuls. Daher wählt man den Ansatz für die 4-er Vektoren des Stroms den 4-er Impuls des Pions, ($p_\pi = p_\mu + p_\nu$)

$$J_\pi = f_\pi \cdot p_\pi = f_\pi (p_\mu + p_{\nu_\mu})$$

wobei die Konstante f_π die Wahrscheinlichkeit beschreibt, dass sich die beiden Quarks im Pion hinreichend nahe kommen um eine schwache WW zu erfahren. Damit ist das Matrixelement für den Zerfall in ein μ :

$$\mathcal{M} = \frac{G}{\sqrt{2}} f_\pi (p_\mu^\alpha + k_\nu^\alpha) \underbrace{(\bar{u}_{(\mu)} \frac{1}{2} \gamma_\alpha (1 - \gamma^5) v_{(\nu)})}_{\mu-\nu_\mu \text{ Strom}}$$

Die Zerfallsbreite folgt daraus zu

$$\Gamma_{\pi \rightarrow \mu \nu} = \frac{1}{\tau} = \frac{G^2}{8\pi} f_\pi^2 m_\pi m_\mu^2 \left(1 - \frac{m_\mu^2}{m_\pi^2}\right)^2$$

Der hintere Klammersausdruck entspricht dem Phasenraumfaktor (hohe Massen sind unterdrückt), der Faktor m_μ^2 hingegen ergibt sich aus dem Matrixelement und charakterisiert die $V - A$ Wechselwirkung. Das Ergebnis für den Zerfall in $e^- \bar{\nu}_e$ ergibt sich analog. Damit ist das Verzweungsverhältnis:

$$\frac{\Gamma_{\pi^+ \rightarrow e^+ \nu_e}}{\Gamma_{\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu}} = \left(\frac{m_e}{m_\mu}\right)^2 \left(\frac{m_\pi^2 - m_e^2}{m_\pi^2 - m_\mu^2}\right)^2 = \left(\frac{1}{8,3 \cdot 10^3}\right)^{-1}$$

Dies ist genau der experimentelle Wert, eine glänzende Bestätigung der V-A Theorie.

Die Zerfallskette $\pi \rightarrow \mu \rightarrow e$

Stoppt man π^+ in Material, so beobachtet man die gezeigte Energieverteilung von Elektronen¹². Der sehr seltene π^- Zerfall in Elektronen führt zu einer monoenergetischen Energie der e bei fast der halben π^- Masse. Die Muonen stoppen ebenfalls

¹² π^+ eignen sich besser, da sie von Kernen elektrisch abgestoßen werden. Dagegen werden π^- schnell von Kernen eingefangen.

nach sehr kurzer Strecke. Der häufigere Zerfall des $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$ mit $\mu^+ \rightarrow \bar{\nu}_\mu e^+ \nu_e$ führt dagegen zu einem kontinuierlichen Energiespektrum, das ein Maximum nahe der halben Muon-Masse besitzt. Der Endpunkt dieses Spektrum wird neben der Elektronen-Masse auch von der Masse der Neutrinos abhängen. Auf diese Weise wurde in Tritium-Zerfällen eine Grenze auf die Masse des Elektron-Neutrinos von $m_{\nu_e} < 4$ eV ermittelt.

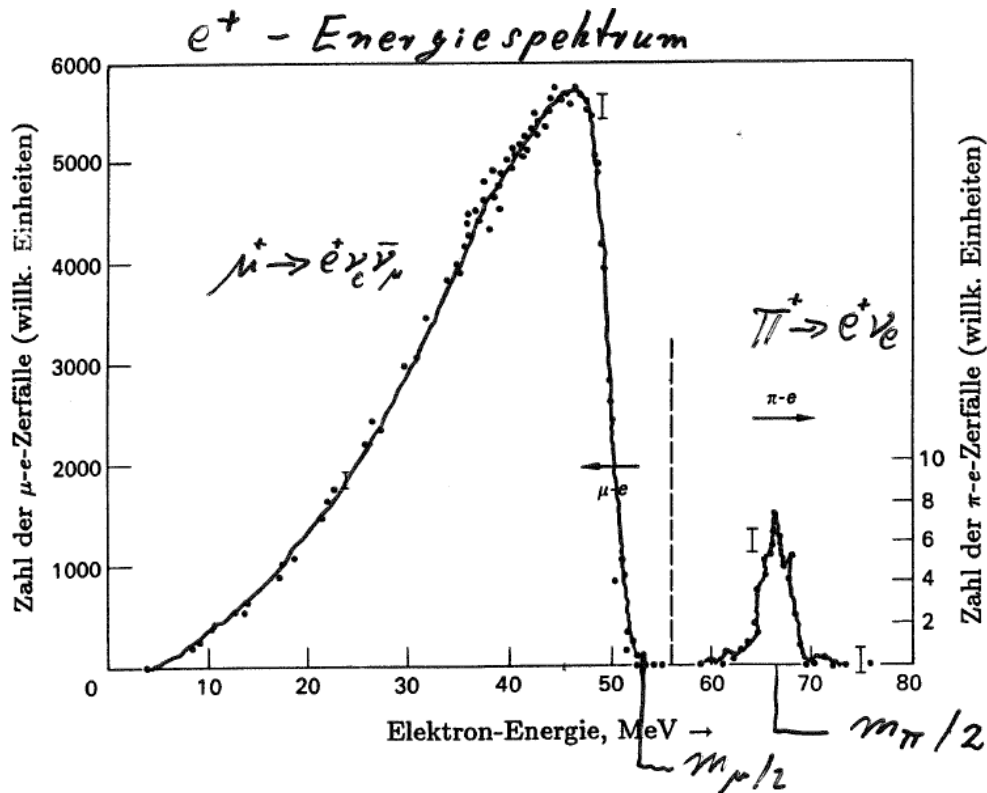


Abbildung 7.11 Das Elektronspektrum gestoppter Pionen aus dem Experiment von Anderson et al. (1960). Die breite Verteilung bis 53 MeV stammt vom Zerfall $\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu + \bar{\nu}$. Das schmale Signal bei 70 MeV stammt vom $\pi^+ \rightarrow e^+ + \nu$ -Zerfall. Beachte die unterschiedliche vertikale Skala für diese sehr seltenen Zerfälle.

6.8 Mischung von Quarks und Leptonen

Die bisherige Darstellung der Quark- und Lepton Doublets für die schwache WW erlaubt nur Übergänge innerhalb eines Doublets, also z.B.

$$e \leftrightarrow \nu_e, \quad u \leftrightarrow d$$

Tatsächlich findet man jedoch auch Zerfälle wie

$$K^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$$

Da $K^+ = u\bar{s}$ ist muss es also auch Übergänge zwischen den Generationen der Quarks geben. Tatsächlich unterscheiden sich die Quarks der einzelnen Generationen nur durch ihre Masse, nicht aber durch ihre Quantenzahlen. Es kann daher auch sein, dass die W - Bosonen nicht direkt an die einzelnen Generationen koppeln sondern an Linearkombinationen aus den einzelnen Generationen. Diesen Mechanismus nennt man Quark Mischung oder, für die ersten beiden Generationen, den Cabbibo-Mechanismus. Ähnliches existiert für die Neutrinos.

Im Folgenden wird unterschieden zwischen

Masseneigenzuständen der Quarks, also $u = (u, c, t)$ und $d = (d, s, b)$. Dies sind Zustände, die in elektromagnetischen oder starken Prozessen erzeugt werden.

Schwache Eigenzustände der Quarks, also $u' = (u_1', u_2', u_3')$ und $d' = (d_1', d_2', d_3')$.

Hierbei sollen die u_i' (d_i') Linearkombinationen der u_i (d_i) sein.

$$u' = U u$$

$$d' = D d$$

d.h. U und D sind unitäre Matrizen, die Transformationen (Rotationen) im Raum der Generationen bewirken. Schwache WW werden diagonal in den Eigenzuständen der schwachen WW sein, so dass entsprechende Terme für W^\pm - Austausch in der Lagrangedichte die Form haben:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \bar{u}_1' (i\gamma_\mu D^\mu) d_1' + \bar{u}_2' (i\gamma_\mu D^\mu) d_2' + \bar{u}_3' (i\gamma_\mu D^\mu) d_3' \\ &= \bar{u}' (i\gamma_\mu D^\mu) d' \\ &= \bar{u} U^\dagger (i\gamma_\mu D^\mu) D d \\ &= \bar{u} (i\gamma_\mu D^\mu) U^\dagger D d \\ &= \bar{u} (i\gamma_\mu D^\mu) V d \end{aligned}$$

Damit lässt sich die Mischung der Quarks über eine einzige unitäre Matrix $V = U^\dagger D$ beschreiben, die nur die d -Quarks betrifft.

Beachtenswert ist, dass eine solche unitäre Transformation der Quark-Zustände für neutrale Ströme keinerlei Auswirkungen hat.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \bar{u}_1' (i\gamma_\mu D^\mu) u_1' + \bar{u}_2' (i\gamma_\mu D^\mu) u_2' + \bar{u}_3' (i\gamma_\mu D^\mu) u_3' \\
&= \bar{u} (i\gamma_\mu D^\mu) U^\dagger U u \\
&= \bar{u} (i\gamma_\mu D^\mu) u
\end{aligned}$$

Daher gibt daher keine Flavour-ändernden neutrale Ströme (FCNC).

Die Matrix V ist die sogenannte CKM Matrix nach Cabbibo, Kobayashi und Mas-kawa. Eine solche 3×3 Matrix besitzt 3 reele Parameter und eine komplexe Phase¹³. Da Übergänge innerhalb einer Generation stark überwiegen lässt sich die CKM-Matrix nähern durch

$$V = \begin{pmatrix} 1 - \lambda^2/2 & \lambda & A\lambda^3(\rho - i\eta) \\ -\lambda & 1 - \lambda^2/2 & A\lambda^2 \\ A\lambda^3(1 - \rho - i\eta) & A\lambda^2 & 1 \end{pmatrix}$$

Hierbei wurden nur Terme der Ordnung λ^4 weggelassen. Der Parameter θ_c definiert durch $\lambda = \sin \theta_c$ wird auch Cabbibo Winkel genannt. Er beträgt etwa 13° Grad, so dass Zerfälle von der zweiten in die erste Generation um etwa einen Faktor 20 unterdrückt sind.

¹³Drei weitere Phasen können in die Wellenfunktionen der Quarks integriert werden ohne die Langrangedichte zu ändern.

7 Elektro-schwache Wechselwirkung

7.1 Eichtheorie der elektro-schwachen Wechselwirkung

Im Folgenden wird die Lagrangedichte der elektroschwachen Wechselwirkung abgeleitet und die daraus folgenden Vorhersagen diskutiert. Zugrunde liegt eine Eichtheorie, die auf der $SU(2)_L \times U(1)_Y$ Symmetrie beruht. Für die $U(1)_Y$ ist die Lagrangedichte exakt die der QED, wobei nur die Kopplungskonstante der QED durch die Kopplungskonstante g' und die elektrische Ladung der Fermionen durch die Hyperladung Y ersetzt wird. Die $SU(2)_L$ hingegen ist eine nicht-Abel'sche Eichtheorie. Der Formalismus entspricht damit exakt dem der QCD, wobei die Farben der Quarks bei allen Fermionen durch den schwachen Isospin ersetzt wird und die λ_a Matrizen durch die Pauli-Matrizen. Hinzu kommen allerdings Paritätsverletzung in der $SU(2)_L$, Mischung zwischen den Eichbosonen der $SU(2)_L$ und der $U(1)_Y$ und die spontane Symmetriebrechung mit dem Higgs-Feld zur Beschreibung der Masse aller Teilchen.

7.1.1 Massen der Fermionen

Zur Beschreibung der schwachen WW mit Paritätsverletzung wird eine $SU(2)$ Symmetrie angenommen, die nur für linkshändige Fermionen gelten soll: $SU(2)_L$.

Als Beispiel dienen die beiden Leptonen der ersten Generationen. Um Paritätsverletzung beschreiben zu können werden diese als ein linkshändiges Doublett ψ_L im Raum des schwachen Isospins und als rechtshändige Singletts aufgefasst,

$$\psi_L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}, \quad e_R, \quad \nu_R$$

Wir betrachten unitäre Transformationen im Isospin-Raum,

$$\psi_L' = U\psi_L \quad e_R' = e_R, \quad \nu_R' = \nu_R$$

wobei U ein Element der Symmetriegruppe $SU(2)_L$ ist, das durch eine 2×2 Matrix mit $U^\dagger U = 1$ und $\det U = 1$ dargestellt werden kann. Die rechtshändigen Singletts werden nicht transformiert. Für die Massenterme von e und ν in der Lagrange-Dichte gilt mit $e = e_R + e_L$ und $\bar{e}_R e_R = 0$, $\bar{e}_L e_L = 0$,

$$\mathcal{L}_m = -m_\nu \bar{\nu} \nu - m_e \bar{e} e = -m_\nu \bar{\nu}_R \nu_L - m_\nu \bar{\nu}_L \nu_R - m_e \bar{e}_R e_L - m_e \bar{e}_L e_R$$

Diese Lagrangedichte kann nicht eichinvariant sein, da sich ν_L und e_L bei $SU(2)_L$ Transformationen ändern, ν_R und e_R jedoch nicht. Expliziter kann man auch schreiben

$$\mathcal{L}_m = -(\bar{\nu}_R, \bar{e}_R) \begin{pmatrix} m_\nu & 0 \\ 0 & m_e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix} - (\bar{\nu}_L, \bar{e}_L) \begin{pmatrix} m_\nu & 0 \\ 0 & m_e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_R \\ e_R \end{pmatrix}$$

Bei einer $SU(2)_L$ Eichtransformation wird daraus:

$$\mathcal{L}_m' = -(\bar{\nu}_R, \bar{e}_R) \begin{pmatrix} m_\nu & 0 \\ 0 & m_e \end{pmatrix} U \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix} - (\bar{\nu}_L, \bar{e}_L) U^\dagger \begin{pmatrix} m_\nu & 0 \\ 0 & m_e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_R \\ e_R \end{pmatrix}$$

Dies wäre nur eichinvariant falls $m_\nu = m_e$ und falls sich außerdem auch die rechtshändigen Komponenten transformieren wie die linkshändigen. Beide Voraussetzungen sind nicht gegeben. Symmetrien von chiralen Theorien zur Beschreibung von Paritätsverletzung lassen also prinzipiell keine Massenterme zu; alle Fermionen müssten masselos sein.

$$m_e = 0, \quad m_\nu = 0.$$

Dies ist experimentell natürlich nicht so. Ein Ausweg ist der Mechanismus der spontanen Symmetriebrechung.

7.1.2 $SU(2)_L$ und schwacher Isospin

Zur Beschreibung der schwachen WW mit Paritätsverletzung wird eine $SU(2)$ Symmetrie angenommen, die nur für linkshändige Fermionen gelten soll: $SU(2)_L$.

Wie oben diskutiert sind in einer solchen Theorie Massen der Fermionen verboten. Betrachtet man daher zwei freie, linkshändige Dirac-Teilchen mit Masse $m = 0$, so lautet die Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_L = \bar{\psi}_{1,L} (i\gamma^\mu \partial_\mu) \psi_{1,L} + \bar{\psi}_{2,L} (i\gamma^\mu \partial_\mu) \psi_{2,L}$$

Sei

$$\psi_L = \begin{pmatrix} \psi_{1,L} \\ \psi_{2,L} \end{pmatrix}$$

ein Doublett im Raum des schwachen Isospin. Damit lässt sich die Lagrangedichte schreiben als

$$\mathcal{L}_L = \bar{\psi}_L (i\gamma^\mu \partial_\mu) \psi_L$$

Wir betrachten unitäre Transformationen im Isospin-Raum,

$$\psi'_L = U\psi_L \quad \psi'_R = \psi_R$$

wobei U ein Element der Symmetriegruppe $SU(2)_L$ ist, das durch eine 2×2 Matrix mit $U^\dagger U = 1$ und $\det U = 1$ dargestellt werden kann. Die rechtshändigen Singletts ψ_R werden nicht transformiert.

Offensichtlich ist \mathcal{L}_L invariant unter globalen $SU(2)_L$ Transformationen, denn

$$\mathcal{L}'_L = \bar{\psi}'_L (i\gamma^\mu \partial_\mu) \psi'_L = \bar{\psi}_L U^\dagger (i\gamma^\mu \partial_\mu) U \psi_L = \bar{\psi}_L (i\gamma^\mu \partial_\mu) U^\dagger U \psi_L = \mathcal{L}_L$$

Als Konstruktionsprinzip für Naturgesetze werden im Folgenden wie in der QED und QCD lokale Eichtransformationen betrachtet, unter denen die Lagrangedichte invariant bleiben soll.

Diese Transformationen verändern – ortsabhängig und zeitabhängig - sowohl die Komponenten der Doublets als auch deren Phasen. Sie können immer in der Form

$$\psi_L \rightarrow \psi'_L = U\psi_L = e^{ig\alpha_a(x)T_a}\psi_L$$

dargestellt werden. Die 2×2 Matrizen T_a müssen linear unabhängig, spurlos und hermitesch sein. Es gibt höchstens drei solche Matrizen¹⁴. Als Generatoren T_a der $SU(2)_L$ können z.B. die

$$T_a = \frac{\sigma_a}{2} \quad a = 1, 2, 3.$$

gewählt werden, wobei die σ_a die bekannten Pauli-Matrizen sind. Die $\alpha_a(x)$ sind willkürliche reelle Funktionen von Ort und Zeit und Summation über a ist impliziert. Die reelle und beliebige Konstante g wird später als Kopplungskonstante der W Bosonen interpretiert werden. Die T_a befolgen die Kommutator-Relationen

$$[T_a, T_b] = if_{abc}T_c$$

wobei im Fall der $SU(2)$ gilt: $f_{abc} = \epsilon_{abc}$ ($\epsilon =$ Levi-Chivita Tensor).

Die Lagrangedichte \mathcal{L}_L soll invariant unter lokalen $SU(2)_L$ Transformationen sein. Wie aus der Diskussion der QCD bekannt ist dies genau dann der Fall, wenn

- ∂^μ durch $D^\mu = \partial^\mu + igT_a W_a^\mu$ ersetzt wird,
- die W_a^μ drei neue Vektorfelder (Eichfelder) sind, eins für jeden Generator. Diese müssen sich transformieren wie

$$W_a^\mu \rightarrow W_a^{\mu'} = W_a^\mu - \partial^\mu \alpha_a(x) - gf_{abc} \alpha_b(x) W_c^\mu$$

- ein Tensor der Form

$$W_a^{\mu\nu} = \partial^\mu W_a^\nu - \partial^\nu W_a^\mu - gf_{abc} W_b^\mu W_c^\nu$$

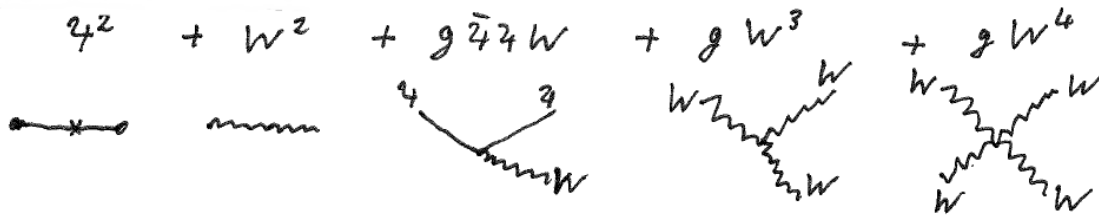
definiert wird um die kinetische Energie der neuen Eichfelder zu beschreiben.

¹⁴Beliebige $n \times n$ unitäre Matrizen bestehen aus $2n^2$ Zahlen (für Real- und Imaginärteil). Unitarität bedeutet $U^\dagger U = 1$, wobei 1 eine 2×2 Einheitsmatrix mit n^2 Elementen ist, so dass dies n^2 Gleichungen sind. Für Elemente der $SU(N)$ kommt die Gleichung $\det U = 1$ hinzu. Insgesamt ergibt das $2n^2 - n^2 - 1 = n^2 - 1$ unabhängige Parameter je $SU(N)$ Matrix. Damit kann jede derartige Matrix als Linearkombination von ebensovielen linear-unabhängigen Matrizen dargestellt werden, die als Basis für diese Matrizen aufgefasst werden können. Demnach gibt es auch nur $n^2 - 1$ unabhängige Matrizen T_a .

Damit ergibt sich die gesammte, eich-invariante Lagrange-Dichte zu

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_L &= \bar{\psi}_L (i\gamma_\mu D^\mu) \psi_L - \frac{1}{4} W_{a\mu\nu} W_a^{\mu\nu} \\
 &= \underbrace{\bar{\psi}_L (i\gamma_\mu \partial^\mu) \psi_L}_{\psi_L - E_{kin} \text{ (Propagator)}} - \underbrace{g \bar{\psi}_L (\gamma_\mu T_a W_a^\mu) \psi_L}_{\psi_L = \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix} \text{ koppelt mit Stärke } g \text{ an drei Felder } W_a^\mu} - \underbrace{\frac{1}{4} W_{a\mu\nu} W_a^{\mu\nu}}_{W^2 \hat{=} E_{kin}} \\
 &\qquad\qquad\qquad g W^3 \hat{=} 3\text{-fach Vertex} \\
 &\qquad\qquad\qquad g^2 W^4 \hat{=} 4\text{-fach Vertex}
 \end{aligned}$$

Die Vertizes der Theorie umfassen damit (wie schon in der QCD) neben dem Fermion-Boson Vertex auch 3-Bosonen und 4-Bosonen Vertizes, alle mit der gleichen Kopplungskonstante g (oder g^2).



Die Eichinvarianz solcher nicht-Abelschen Lagrangedichten wurde schon bei der QCD gezeigt.

Erfolge der $SU(2)_L$ - Theorie

- Diese $SU(2)_L$ Theorie beschreibt die Umwandlung von Teilchen:

$$e \leftrightarrow \nu_e \qquad t \leftrightarrow b$$

- Sie sagt drei neue Eich-Bosonen voraus: W_a^μ , $a = 1, 2, 3$
- Sie legt durch Symmetrie die Form der WW zwischen allen Fermionen und den neuen Bosonen fest und verlangt dafür nur eine neue Naturkonstante: g .
- Sie sagt Selbst-WW der Bosonen voraus und deren Stärke, g . Ursache hierfür ist, dass bei einer nicht- Abelschen Symmetrie die Eichtransformationen nicht kommutieren:

$$[T_a, T_b] = i f_{abc} T_c$$

- Paritätsverletzung wird beschrieben, denn nur die linkshändigen Teilchen, nicht die rechtshändigen, nehmen an der WW teil.

Probleme der $SU(2)_L$ Theorie

Massen der Fermionen können nicht beschrieben werden, wie oben diskutiert.

Masse der Eichbosonen: Ein Masseterm $\mathcal{L}_{m_W} = -m_W^2 W_a^\mu W_{a\mu}$ ist nicht eichinvariant und damit wäre die Theorie nicht renormierbar sondern divergent. Daher muss $m_W = 0$ gelten. Experimentell findet man aber zwei verschiedene sehr große Werte, $m_W = 80,4$ GeV und $m_Z = 90$ GeV.

Paritätsverletzung und Kopplung beim Z^0 In diesem Modell würden alle drei Eichbosonen mit der gleichen Stärke an alle linkshändigen Fermionen koppeln. Experimentell findet man hingegen, dass das Z^0 zwar linkshändige Fermionen bevorzugt, aber auch an rechtshändige koppelt. Auch hat das Z^0 andere Kopplungskonstanten als das W , und diese sind nicht gleich sind für Neutrinos, geladene Leptonen und unterschiedlich geladene Quarks.

7.1.3 $U(1)_Y$ und Hyperladung

Zur Behebung der oben genannten Probleme mit der Paritätsverletzung und den Kopplungen des Z^0 wird im Standard-Modell eine Kombination aus $SU(2)_L$ und $U(1)_Y$ eingeführt. Das Resultat wird sowohl Elektromagnetismus als auch schwache WW beschreiben. Nur die Massen der Fermionen und Bosonen können so noch nicht beschrieben werden.

Die aus der $U(1)_Y$ Symmetrie folgende Wechselwirkung ist ebenso fundamental wie die QCD ($SU(3)_C$) und die schwache WW ($SU(2)_L$). Die $U(1)_Y$ beruht wie die QED auf einer lokalen Eichtheorie mit $U(1)$ Symmetrie. Anstelle der elektrischen Ladung tritt allerdings eine Kopplungskonstante g' und, für jedes Teilchen individuell, eine sogenannte Hyperladung Y . Ausserdem gibt es ein Eichboson, das B^μ genannt wird (dies ist nicht das Photon). Die kovariante Ableitung lautet

$$D_\mu \equiv \partial_\mu + ig' \frac{Y}{2} B_\mu(x),$$

Die Lagrange-Dichte für eine $U(1)$ Theorie wurde im Kapitel zur QED diskutiert. Hier wird sie für z.B. e und ν_e mit Hilfe der Doublets ψ_L und der Singletts e_R, ν_R für masselose Fermionen ($m = 0$) formuliert:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_Y &= \bar{\psi} (i\gamma^\mu D_\mu) \psi - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} \\ &= \underbrace{\bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu) \psi}_{\text{kin. Term } \psi} - \underbrace{g' \frac{Y}{2} \bar{\psi} (\gamma^\mu B_\mu) \psi}_{\text{Neue Wechselwirkung}} - \underbrace{\frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu}}_{\text{kin. Term } B_\mu} \end{aligned}$$

Hierbei ist

$$B^{\mu\nu} = \partial^\mu B^\nu - \partial^\nu B^\mu$$

Auf den ersten Blick unterscheidet diese Wechselwirkung nicht zwischen linkshändigen und rechtshändigen Teilchen.

Der Faktor $1/2$ bei Y ist reine Konvention. Das Eichboson B^μ ist masselos und hat keine Selbst-Wechselwirkung. Die Zahlenwerte für g' und die Quantenzahlen der Fermionen Y müssen experimentell bestimmt werden. Wie später gezeigt wird ergeben sich

$$g' = ??$$

und

Teilchen	ν_{e_L}, e_L	ν_{e_R}	e_R	u_L, d_L	u_R	d_R
Hyperladung Y	-1	0	-2	1/3	4/3	-2/3

Teilchen innerhalb eines linkshändigen Doubletts haben also die gleiche Hyperladung Y , aber es gibt Unterschiede zu den beiden rechtshändigen Singletts, sowohl für die Leptonen als auch für die Quarks. Daher ist auch diese WW paritätsverletzend und der Wechselwirkungsterm in der Lagrangedichte muss interpretiert werden als

$$\mathcal{L}_Y = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu) \psi + g' \frac{Y_R}{2} \bar{\psi}_R (\gamma^\mu B_\mu) \psi_R + g' \frac{Y_L}{2} \bar{\psi}_L (\gamma^\mu B_\mu) \psi_L - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu}$$

Teilchen der anderen Generationen haben die gleichen Hyperladungen wie die Teilchen der ersten Generation. Die Zahlenwerte für Y sind, ebenso wie die elektrischen Ladungen der Leptonen und Quarks, zunächst willkürlich. Wir werden im Folgenden sehen, wie die elektrische Ladung der Teilchen aus der Hyperladung und dem Isospin abgeleitet werden kann.

7.1.4 $SU(2)_L \times U(1)_Y$

Die Kombination der beiden Eichtheorien (Vereinheitlichung) soll wieder mit Hilfe der schwachen Isospin-Doubletts und Singletts formuliert werden. Die Lagrangedichte wird Paritätsverletzung beschreiben und masselose W^\pm, Z^0 und γ beinhalten. Die Lagrangedichte ist zunächst einfach die Summe der Formeln für die $SU(2)_L$ und $U(1)_Y$.

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} W_a^{\mu\nu} W_{a\mu\nu} - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} + \sum \bar{\psi}_L i\gamma_\mu D^\mu \psi_L + \sum \bar{\psi}_R i\gamma_\mu D^\mu \psi_R$$

Die Summen laufen hier über alle linkshändigen Doubletts ψ_L und rechtshändigen Singletts ψ_R der Quarks und Leptonen des Standardmodells. Die Y Werte sind wie oben angegeben für Doubletts und Singletts unterschiedlich. Die kovarianten Ableitungen unterscheiden sich ebenfalls für die Doubletts und die Singletts, da die

Singletts nicht an die $SU(2)_L$ Bosonen koppeln. Effektiv ist also:

$$\begin{aligned} \text{für linkshändige } \psi_L : \quad D_L^\mu \psi_L &= (\partial^\mu + igT_a W_a^\mu + ig' \frac{Y}{2} B^\mu) \psi_L \\ \text{für rechtshändige } \psi_R : \quad D_R^\mu \psi_R &= (\partial^\mu + ig' \frac{Y}{2} B^\mu) \psi_R \end{aligned}$$

Wie vorher sind

- g, g' sind die Kopplungen der $SU(2)_L, U(1)_Y$.
- Y ist die $U(1)_Y$ Ladung (“Hyperladung”) der Fermionen
- B^μ ist das Eichfeld der $U(1)_Y$ (nicht das Photon).
- W_a^μ sind die drei Eichfelder der $SU(2)_L$.

Setzt man in den Ausdruck für D^μ die Generatoren und damit die Pauli-Matrizen $T_a = \sigma_a/2$ explizit ein, so findet man:

$$\begin{aligned} D^\mu &= \partial^\mu + igT_a W_a^\mu + ig' \frac{Y}{2} B^\mu \\ &= \partial^\mu + \frac{ig}{2} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} W_1^\mu + \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} W_2^\mu + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} W_3^\mu \right) + ig' \frac{Y}{2} B^\mu \\ &= \partial^\mu + \frac{ig}{2} \begin{pmatrix} W_3 & W_1 - iW_2 \\ W_1 + iW_2 & -W_3 \end{pmatrix}^\mu + ig' \frac{Y}{2} \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}^\mu \end{aligned}$$

In \mathcal{L} sind die Wechselwirkungsterme zwischen Eich- Bosonen und z.B. der ersten Generation der linkshändigen Leptonen gegeben durch:

$$\mathcal{L}_L = \bar{\psi}_L i\gamma_\mu D^\mu \psi_L = (\bar{\nu}_e, \bar{e})_L i\gamma_\mu D^\mu \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L$$

Offenbar erzeugen in D^μ nur die nicht-diagonalen Elemente der ersten Matrix eine Wechselwirkung, bei der gleichzeitig e und ν_e beteiligt sind. Für solche Flavour- und Ladungs- ändernden WW macht es daher Sinn Aufsteige- und Absteige-Operatoren T^\pm und entsprechende Eichbosonen W^+, W^- zu definieren:

$$\begin{aligned} W^\pm &= \frac{1}{\sqrt{2}}(W_1 \mp iW_2) \\ T^\pm &= \frac{1}{\sqrt{2}}(T_1 \pm iT_2) \end{aligned}$$

so dass

$$T^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad T^- = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

In dieser neuen Basis für die Boson-Felder ist die $SU(2)_L$ Wechselwirkung dann:

$$\begin{aligned} D^\mu &= \partial^\mu + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & W^+ \\ W^- & 0 \end{pmatrix}^\mu + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} gW_3 + g'YB & 0 \\ 0 & -gW_3 + g'YB \end{pmatrix}^\mu \\ &= \partial^\mu + (T^+W^+ + T^-W^-)^\mu + (gT_3W_3 + g'\frac{Y}{2}B)^\mu \\ &= \partial^\mu + D_W^\mu + D_{\gamma Z}^\mu \end{aligned}$$

Hierbei wurden die Flavour-ändernden nicht-diagonal Elemente der $SU(2)_L$ von den Flavour-erhaltenden Diagonalelementen getrennt. Die einzelnen Terme in der Lagrangedichte $\mathcal{L} = \bar{\psi}i\gamma_\mu D^\mu\psi$ haben folgende Bedeutung:

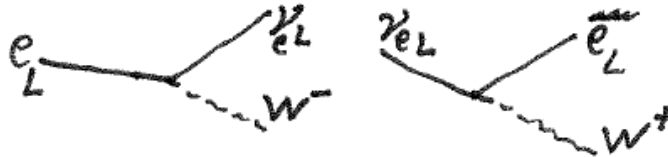
- $\bar{\psi}i\gamma_\mu\partial^\mu\psi$ ist die kinetische Energie der Fermionen. Die Fermionen haben wie diskutiert keinen Masseterm.
- $\bar{\psi}i\gamma_\mu D_W^\mu\psi$ beschreibt die Wechselwirkungen von W^\pm Bosonen mit Fermionen.
- $\bar{\psi}i\gamma_\mu D_{\gamma Z}^\mu\psi$ beschreibt die Wechselwirkungen von γ und Z^0 mit Fermionen.

7.1.5 Wechselwirkung von W Bosonen mit Fermionen

Angewendet auf die linkshändigen Doublets ergibt sich aus D_W^μ die Lagrangedichte

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_L &= ig\bar{\psi}_L i\gamma_\mu (T^+W^+ + T^-W^-)^\mu\psi_L \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} ig (\bar{\nu}_e, \bar{e})_L i\gamma_\mu \begin{pmatrix} 0 & W^+ \\ W^- & 0 \end{pmatrix}^\mu \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} g (\bar{\nu}_{eL}\gamma_\mu W^{+\mu}e_L + \bar{e}_L\gamma_\mu W^{-\mu}\nu_{eL}) \end{aligned}$$

Der erste Term beschreibt die Umwandlung eines e_L^- in ein ν_L unter Abstrahlung eines W^- Bosons. Der zweite Term beschreibt den umgekehrten Prozess.



7.1.6 Mischung von Photon und Z^0

Der Term mit $D_{\gamma Z}^\mu$ beschreiben neutrale WW mittels der W_3 und B Eichbosonen, die die Flavour und die Ladung nicht ändern. Zur obigen Lagrange-Dichte \mathcal{L}_L für die linkshändigen Fermionen muss der Term für rechtshändige WW zwischen Fermionen und B hinzuaddiert werden.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\gamma,Z} = \mathcal{L}_{W_3,B} &= \bar{\psi}_L i \gamma_\mu i (g T_3 W^\mu + g' \frac{Y}{2} B^\mu) \psi_L + \underbrace{\bar{\psi}_R i \gamma_\mu i (g' \frac{Y}{2} B^\mu)}_{e_R, \nu_R} \psi_R \\ &= \sum_{\psi=e_L, e_R, \nu_L, \nu_R} \bar{\psi} i \gamma_\mu i (g T_3 W^\mu + g' \frac{Y}{2} B^\mu) \psi\end{aligned}$$

Für die letzte Zeile ist zu beachten, dass

$$T_3 |\nu_R\rangle = 0, \quad T_3 |e_R\rangle = 0$$

ist, denn rechtshändige Fermionen nehmen nicht an der $SU(2)_L$ WW teil.

Die beiden Eichbosonen W_3 und B koppeln in dieser Schreibweise beide an die gleichen Teilchen. Es ist daher jederzeit möglich auch hier einen Basis-Wechsel vorzunehmen in der Form

$$\begin{pmatrix} W_3^\mu \\ B^\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_W & \sin \theta_W \\ -\sin \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z^\mu \\ A^\mu \end{pmatrix}$$

ohne dass sich die Physik ändert¹⁵. Dies ist offenbar eine Rotation um den sogenannten Weinberg-Winkel θ_W . Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\gamma,Z} &= \sum_{e\nu} i \bar{\psi} i \gamma_\mu \underbrace{(g \sin \theta_W T_3 + g' \frac{Y}{2} \cos \theta_W)}_{\text{Kopplung Fermion-Photon}} A^\mu \psi \\ &+ i \bar{\psi} i \gamma_\mu \underbrace{(g \cos \theta_W T_3 - g' \sin \theta_W \frac{Y}{2})}_{\text{Kopplung Fermion-}Z^0} Z^\mu \psi\end{aligned}$$

7.1.7 Elektromagnetismus

Verlangen wir nun, dass das Feld A^μ das Photon des Elektromagnetismus ist, ergibt sich für die elektrische Ladung Q eines Teilchens,

$$\begin{aligned}eQ &= g \sin \theta_w T_3 + g' \cos \theta_w \frac{Y}{2} \\ &= e \quad T_3 + e \quad \frac{Y}{2}\end{aligned}$$

¹⁵Diese Ersetzung wird erst später notwendig, wenn durch den Higgs Mechanismus dem Z -Boson eine Masse zugeordnet wird, dem Photon A^μ aber nicht.

Mit der Definition

$$Q = T_3 + \frac{Y}{2}$$

erhält man als Beziehung zwischen Weinbergwinkel und den Kopplungskonstanten

$$e = g \sin \theta_W = g' \cos \theta_W$$

Die Y Werte in der obigen Tabelle der Quantenzahlen wurden gerade so gewählt, dass die Gleichung $Q = T_3 + Y/2$ erfüllt ist.

7.1.8 Wechselwirkungen des Z^0 mit Fermionen

In der Kopplung der Fermionen an das Z^0

$$g_Z = g \cos \theta_W T_3 - g' \sin \theta_W \frac{Y}{2}$$

kann man die $U(1)_Y$ Konstanten g' und Y zugunsten der Parameter e und Q des Elektromagnetismus eliminieren:

$$g_Z = \frac{e}{\sin \theta_W \cos \theta_W} (T_3 - \sin^2 \theta_W Q)$$

so dass

$$D_{\gamma Z}^\mu = ieQA^\mu + ig_Z Z^\mu$$

Die Lagrange-Dichte ist somit:

$$\mathcal{L}_{\gamma, Z} = \sum_{ev} i\bar{\psi} i\gamma_\mu (eQA^\mu + g_Z Z^\mu) \psi$$

	Q	T_3	Y	$T_3 - \sin^2 \theta_W Q$	$2c_V$	$2c_A$
ν_{eL}	0	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	1	1
e_L	-1	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2} + \sin^2 \theta_W$	$-1 + 4 \sin^2 \theta_W$	-1
ν_{eR}	0	0	0	0	1	1
e_R	-1	0	-2	$\sin^2 \theta_W$	$-1 + 4 \sin^2 \theta_W$	-1
u_L	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \sin^2 \theta_W$	$1 - \frac{8}{3} \sin^2 \theta_W$	1
d_L	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \sin^2 \theta_W$	$-1 + \frac{4}{3} \sin^2 \theta_W$	-1
u_R	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{4}{3}$	$-\frac{2}{3} \sin^2 \theta_W$	$1 - \frac{8}{3} \sin^2 \theta_W$	1
d_R	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3} \sin^2 \theta_W$	$-1 + \frac{4}{3} \sin^2 \theta_W$	-1

Da das Z^0 eine Mischung von W_3 (linkshändig) und B (links und rechthändig) koppelt es sowohl an links- als auch an rechtshändige Fermionen. Man führt daher die Konstanten c_V und c_A ein, die die relative Stärke der Vektor und Axialvektor- WW beschreiben sollen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(c_V - c_A\gamma^5)\psi &= \frac{1}{2}g_L(1 - \gamma^5)\psi + \frac{1}{2}g_R(1 + \gamma^5)\psi = g_L\psi_L + g_R\psi_R \\ &= \frac{1}{2}((g_L + g_R) - (g_L - g_R)\gamma^5)\psi \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} c_V &= g_L + g_R && \text{Vektorkopplung} \\ c_A &= g_L - g_R && \text{Axialvektorkopplung} \end{aligned}$$

7.1.9 Spontane Symmetrie-Brechung

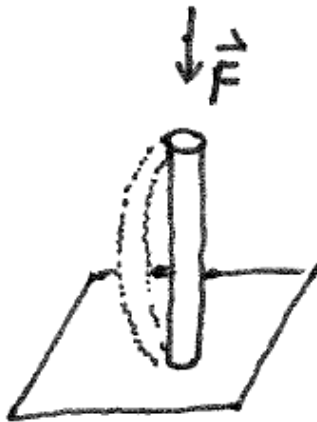
Die bis hier abgeleitete Lagrangedichte beschreibt alle experimentellen Befunde zur elektroschwachen Wechselwirkung mit Ausnahme der Massen von W , Z und γ . Ausserdem verbietet die chirale Struktur der $SU(2)_L$ Massen der Fermionen.

Explizite Brechung der Symmetrien führt zwangsweise zu einer Theorie, die nicht renormierbar ist und damit in bestimmten Wechselwirkungen unendlich hohe Wirkungsquerschnitte vorhersagt, die physikalisch nicht sinnvoll sind.

Diese Unzulänglichkeiten der Theorie lassen sich mit neuen Symmetrie-Argumenten für die Lagrange-Dichte und die WW nicht beheben.

Im Standard-Modell wird daher angenommen, dass nur der Grundzustand (das Vakuum) die Symmetrie bricht. Dieser Mechanismus wird spontane Symmetriebrechung genannt. Bei lokalen Eichtheorien entspricht dies dem Higgs Mechanismus.

Als anschauliches Beispiel für eine spontane Symmetriebrechung dient ein senkrecht stehender Stab. Dieser Zustand ist invariant unter Rotationen um die Stabachse. Setzt man nun den Stab mit einer Kraft von oben unter Spannung (Potential), so wird er sich spontan in eine beliebige Richtung biegen. Für diesen neuen Grundzustand ist die Symmetrie gebrochen und die Auslenkung des Stabs hat einen Wert, der von Null verschieden ist.



Ein weiteres Beispiel ist ein Ferromagnet, der zunächst ungeordnete Ausrichtungen der Spins enthält. Dieser Zustand hat keine ausgezeichnete Richtung, ist also Rotations-invariant. Spontan können sich jedoch Weiss'sche Bezirke ausbilden und damit der Ferromagnet insgesamt seinen Grundzustand ändern, so dass eine von Null verschiedene Magnetisierung entsteht.

7.1.10 Der Higgs- Mechanismus im Standard-Modell

Im Standard-Modell wird zur Beschreibung der Masse aller Fermionen und der Masse der $SU(2)_L$ Eichbosonen ein neues, komplexes skalares Feld postuliert. Dieses soll ein

$SU(2)_L$ Doublett sein und Hyperladung $Y = 1$ haben¹⁶. Aus $Q = T_3 + \frac{Y}{2}$ folgt die elektrische Ladung der beiden Komponenten wie angegeben.

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}$$

	T_3	Y	Q
ϕ^+	$\frac{1}{2}$	1	1
ϕ^0	$-\frac{1}{2}$	1	0

Tatsächlich wurde Y hier so gewählt, dass eine Komponente keine Ladung hat, so dass später das Vakuum auch elektrisch neutral sein kann. Dieses Higgs Doublett ist das einzige elementare Spin-0 Feld im Standard-Modell. Da ϕ^0 und ϕ^+ komplex sein sollen hat dieses Doublett 4 Freiheitsgrade,

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1 + i\phi_2 \\ \phi_3 + i\phi_4 \end{pmatrix}$$

Für Ausdrücke, die symmetrisch in allen vier Komponenten sein sollen, ist eine einfache Notation z.B.

$$|\phi|^2 = \phi^\dagger \phi = (\phi^+, \phi^0)^* \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} = |\phi^+|^2 + |\phi^0|^2 = \phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 + \phi_4^2$$

(Hier sind $+$ und \dagger zu unterscheiden.)

Die gesamte Lagrangedichte dieses Spin-0 Doubletts gehorcht der Klein-Gordon Gleichung

$$\mathcal{L}_\phi = |D^\mu \phi|^2 - V(\phi) \equiv (D^\mu \phi)^\dagger (D_\mu \phi) - V(\phi)$$

wobei D^μ die bekannte kovariante Ableitung der $SU(2)_L \times U(1)_Y$ ist,

$$D^\mu = \partial^\mu + igT_a W_a^\mu + ig' \frac{Y}{2} B^\mu$$

Das Potential $V(\phi)$ wird hier ebenfalls neu postuliert und nicht wie die anderen Wechselwirkungen aus einer Eichsymmetrie abgeleitet. Es soll ebenfalls invariant unter Eichtransformationen sein, d.h. invariant unter Änderungen der komplexen Phase und invariant unter Rotationen zwischen ϕ^+ und ϕ^0 . Das Potential muss daher symmetrisch in allen vier Komponenten sein und kann daher nur von $|\phi|^2$ abhängen. Als Ansatz für das Potential wird gewählt:

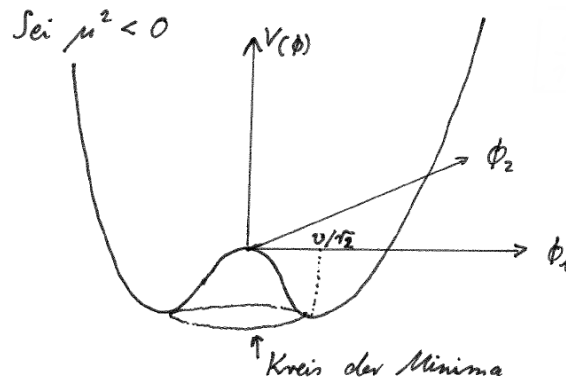
$$V(\phi) = \mu^2 |\phi|^2 + \lambda |\phi|^4$$

Es gilt:

¹⁶Diese Wahl ist die einfachste, mit der man alle Massen erklären kann. Auch komplexere Modelle z.B. mit zwei Higgs-Doubletts sind in Erweiterungen des Standard-Modells möglich.

- μ^2 und λ sind neue, reelle Naturkonstanten. μ hat die Dimension einer Masse. Der $|\phi|^4$ Term beinhaltet eine Selbstwechselwirkung des Higgs-Feldes. Dabei muss $\lambda > 0$ sein, damit das Potential im limes großer Felder $|\phi|$ positiv ist, das Vakuum also nicht instabil ist.
- Terme $|\phi|^n$ mit $n > 4$ sind nicht möglich, da die Theorie sonst nicht renormierbar wäre.
- Terme mit $|\phi|^3$ lassen sich immer durch eine Umdefinierung von ϕ wegtransformieren.
- Terme mit $|\phi|^1$ sind nicht physikalisch.

Damit ist die angegebene Form von V die allgemeinst mögliche Wahl. Frei ist noch das Vorzeichen von μ^2 . Für $\mu^2 > 0$ bleibt der Grundzustand bei $|\phi| = 0$, die Symmetrie ist nicht spontan gebrochen. Anders ist es bei $\mu^2 < 0$. Die Graphik zeigt das entsprechende Potential als Funktion von zwei der vier Komponenten von ϕ .



Das Potential ist nicht minimal bei $|\phi|_{min} = 0$, sondern entwickelt ein Minimum bei $|\phi| = v$ mit dem Vakuums-Erwartungswert

$$v = \sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda}}$$

Tatsächlich gibt es in vier Dimensionen ein Kontinuum von entarteten Grundzuständen und die Lagrangedichte ist ungebrochen.

Spontane Symmetriebrechung wird durch die Wahl eines bestimmten Zustands als Vakuum eingeführt. Da experimentell das Vakuum natürlich elektrisch neutral ist wählen wir als Grunzustand:

$$\phi_{Vak} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$$

d.h. nur die reelle Komponente ϕ_3 des neutralen Feldes bleibt. Hierzu wird eine Eichung durchgeführt

$$\phi(x) \rightarrow e^{ig\alpha_a(x)T_a} \phi(x)$$

bei der die drei beliebigen Funktionen $\alpha(x)$ in der Eichtransformation so gewählt werden, dass die drei anderen Komponenten ϕ_1, ϕ_2 und ϕ_4 Null sind. Da die Lagrangedichte invariant unter diesen Transformation ist ändert sich dadurch die Bewegungsgleichung nicht.

Zur Quantisierung entwickelt man das Potential um das Minimum v ,

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H(x) \end{pmatrix}$$

Hier stellt $H(x)$ das Feld des physikalischen Higgs-Teilchens dar. Setzt man dies in das Potential ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} V(\phi) &= \frac{1}{2}\mu^2(v+H)^2 + \frac{1}{4}\lambda(v+H)^4 \\ &= (\mu^2 + \lambda v^2)vH + \frac{1}{2}(\mu^2 + 3\lambda v^2)H^2 + \lambda vH^3 + \frac{1}{4}\lambda H^4 \end{aligned}$$

so dass mit $v = \sqrt{-\mu^2/\lambda}$:

$$\boxed{V(\phi) = -\mu^2 H^2 + \lambda v H^3 + \frac{1}{4}\lambda H^4}$$

gilt. Dies kann wie folgt interpretiert werden:

- Der Term mit H^2 beschreibt die Masse des Higgs:

$$\boxed{m_H = \sqrt{-\mu^2}}$$

- Die Terme mit H^3 und H^4 beschreiben die Selbstwechselwirkung des Higgs, also einen 3er- und einen 4er- Vertex.

Eichboson - Higgs Wechselwirkung

Die Terme in der Lagrange-Dichte, in denen das Higgs-Feld und die Eichbosonen gemeinsam auftreten, sind gegeben durch:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\phi &= |D^\mu \phi|^2 - V(\phi) \\ &= |(\partial^\mu + D_W^\mu + D_{\gamma Z}^\mu) \phi|^2 - V(\phi) \\ &= |(\partial^\mu + ig(T^+ W^+ + T^- W^-)^\mu + ieQA^\mu + ig_Z Z^\mu) \phi|^2 - V(\phi) \end{aligned}$$

Da das Higgs elektrisch neutral ist, $Q\phi = 0$, entfallen alle Terme mit dem Photon Feld A^μ , d.h. das Photon koppelt nicht an das Higgs und das Photon wird masselos bleiben.

Bildet man für den Rest $|D^\mu\phi|^2$, so bleiben Realteil und Imaginärteil separat. Da außerdem bei obiger Entwicklung $\phi^+ = 0$ ist gibt es auch keine Mischterme zwischen W^\pm und Z^0 . Daher gilt mit $\partial^\mu(v + H(x)) = \partial^\mu H(x)$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\phi &= |\partial^\mu\phi|^2 + |D_W^\mu\phi|^2 + |D_Z^\mu\phi|^2 - V(\phi) \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\mu H)(\partial^\mu H) + \frac{1}{4}g^2W_\mu^+W^{-\mu}(v + H)^2 + \frac{1}{2}g_Z^2Z_\mu Z^\mu(v + H)^2 - V(\phi)\end{aligned}$$

Die einzelnen Terme können wie folgt interpretiert werden:

- $\frac{1}{2}(\partial_\mu H)(\partial^\mu H)$
Dies ist die kinetische Energie für ein einzelnes reelles, skalares Feld H . Das Anregungsquant dieses Feldes ist das Higgs- Teilchen.
- $m_W^2W^+W^- + \frac{1}{2}m_Z^2Z_\mu Z^\mu$
Da g und v konstant sind können die entsprechenden Terme mit v^2 als Massenterme interpretiert werden. Der Zahlenwert der Massen wird demnach nur von der schwachen Kopplungskonstanten und dem Higgs-Potential festgelegt und ist

$$m_W = \frac{1}{2}gv$$

$$m_Z = \frac{1}{2}v\sqrt{g^2 + g'^2}$$

- $\frac{1}{2}g^2vW^+W^-H + \frac{1}{4}g_Z^2vZZH$
Dies sind WW zwischen Higgs und W, Z . Mit den obigen Massentermen folgt, dass die Kopplungen an das Higgs proportional zu den W, Z massen sind.
- $\frac{1}{4}g^2W^+W^-HH + \frac{1}{2}g_Z^2vZZHH$
Dies sind 4-er Vertizes zwischen den Bsonen mit jeweils zwei Higgs-Teilchen.
- Das Higgs Potential ergibt die Higgs-Masse und Selbstwechselwirkungen

$$m_H = \sqrt{-2\mu^2}$$

Die Masse des Higgs ist also nicht vorhergesagt.

Ausserdem ergibt sich

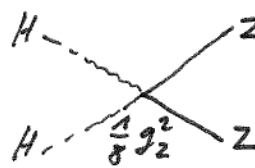
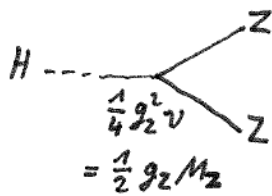
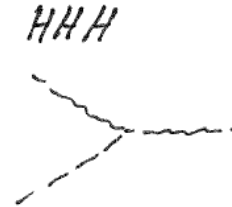
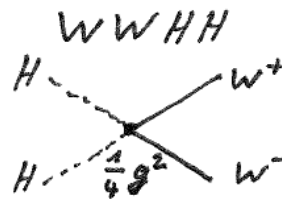
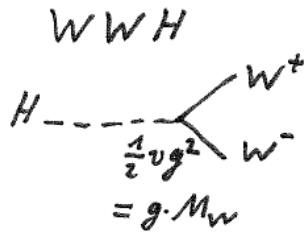
$$M_Z = \frac{1}{2}g_Z v = \frac{M_W}{\cos\theta_W}$$

$$v = 246\text{GeV}$$

$$\cos \theta_W = \frac{M_W}{M_Z} = \frac{80,4}{91,2}$$

$$\tan \theta_W = \frac{g'}{g}$$

Wechselwirkungen des Higgs



7.1.11 Fermion-Higgs Kopplung und Fermion-Massen

Die Lagrangedichte für freie Fermionen

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma_\mu\partial^\mu - m)\psi$$

beinhaltet wie beschrieben Massen-Term

$$\mathcal{L}_m = -m\bar{\psi}\psi = -m\bar{\psi}(P_L + P_R)\psi = -m(\bar{\psi}_R\psi_L + \bar{\psi}_L\psi_R)$$

die linkshändige Doublett -Komponenten ψ_L und rechtshändige Singletts ψ_R kombinieren. Diese transformieren sich unterschiedlich, so dass die Massenterme die $SU(2)_L$ Symmetrie verletzen. Mit dem Higgs steht jedoch ein Doublett zur Verfügung, dass mit den Fermion-Doubletts und Singletts so verbunden werden kann, dass das Resultat eichinvariant ist. Für das Beispiel der Quarks der ersten Generation

$$\psi_L = Q_L = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}; \quad u_R, \quad d_R$$

und dem Higgs-Doublett ϕ lässt sich z.B. für das d Quark schreiben:

$$\mathcal{L} = -c_d (\bar{Q}_L \phi d_R + \bar{d}_R \phi^\dagger Q_L)$$

Setzt man das Higgs-Feld nach spontaner Symmetrie-Brechung

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H(x) \end{pmatrix}$$

ein so ergibt dies

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -c_d \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{d}_L (v + H) d_R + \bar{d}_R (v + H) d_L) \\ &= -c_d \frac{v}{\sqrt{2}} (\bar{d}_L d_R + \bar{d}_R d_L) - c_d \frac{1}{\sqrt{2}} H (\bar{d}_L d_R + \bar{d}_R d_L) \end{aligned}$$

so dass

$$\mathcal{L} = -m_d \bar{d} d - \frac{m_d}{v} H \bar{d} d$$

mit der Masse des d -Quarks

$$m_d = c_d \frac{v}{\sqrt{2}}$$

Man beachte,

- Die Masse der Fermionen wird somit als Kopplungskonstante zwischen Fermionen und Higgs erklärt. Diese Kopplung selber ist aber nicht vorhergesagt, so dass auch die Massen unbekannt sind.
- Alle Massen im Standard-Modell skalieren mit dem Vakuumerwartungswert des Higgs. Dies ist der einzige Parameter im SM mit der Dimension [GeV].
- Das Higgs koppelt vornehmlich an die schwersten Teilchen
- Der letzte Term entspricht den Prozessen

$$d_R + H \rightarrow d_L \quad d_L \rightarrow d_R + H$$

In diesen Prozessen ist sowohl T_3 als auch Y erhalten.

- Im Gegensatz zu den γ^μ Kopplungen der Eichwechselwirkungen ändert sich bei diesen sogenannten Yukawa-Kopplungen c_d die Chiralität der Fermionen.

Für ähnliche Prozesse mit dem u -Quark wird ein Higgs-Doublett mit $Y = -1$ benötigt. Dies lässt sich als ladungskonjugierter Zustand erzeugen,

$$\phi_C = -i\sigma_2\phi^* = \begin{pmatrix} (\phi^0)^\dagger \\ -(\phi^+)^\dagger \end{pmatrix}$$

Damit kann man schreiben:

$$\mathcal{L} = -c_u \left(\bar{Q}_L \phi_C u_R + \bar{u}_R \phi_C^\dagger Q_L \right)$$

Nach spontaner Symmetrie-Brechung

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v + H(x) \\ 0 \end{pmatrix}$$

erhält man

$$\mathcal{L} = -m_u \bar{u} u - \frac{m_u}{v} H \bar{u} u$$

mit der Masse des u -Quarks

$$m_u = c_u \frac{v}{\sqrt{2}}$$

Der letzte Term entspricht den Prozessen

$$u_R + H \rightarrow u_L \quad u_L \rightarrow u_R + H$$

Für die anderen Quark-Generationen und die Lepton-Generationen ergeben sich ganz ähnliche Ausdrücke.

8 Lagrange-Dichte des Standard-Modells

Insgesamt ergibt sich nun als Formel für das Standard-Modell

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} = & \quad -\frac{1}{4}B^{\mu\nu}B_{\mu\nu} - \frac{1}{4}W_a^{\mu\nu}W_{a\mu\nu} && \gamma, Z^0, W^\pm : E_{kin} \\
 & \quad -\frac{1}{4}G_a^{\mu\nu}G_{a\mu\nu} && \text{und Selbstwechselwirkung} \\
 & \quad + \sum_\psi \bar{\psi}_L i\gamma_\mu (\partial^\mu + ig\frac{\sigma_a}{2}W_a^\mu + ig'\frac{Y}{2}B^\mu)\psi_L && \text{Gluon: } E_{kin} \\
 & \quad + \sum_\psi \bar{\psi}_R i\gamma_\mu (\partial^\mu + ig'\frac{Y}{2}B^\mu)\psi_R && \text{und Selbstwechselwirkung} \\
 & \quad + \sum_q \bar{q} i\gamma_\mu (\partial^\mu + ig_s\frac{\lambda_a}{2}G_a^\mu)q && \text{Fermion: } E_{kin} \text{ und} \\
 & \quad + |(\partial^\mu + ig\frac{\sigma_a}{2}W_a^\mu + ig'\frac{Y}{2}B^\mu)\phi|^2 && \text{Elektroschwache WW} \\
 & \quad -(\mu^2|\phi|^2 + \lambda|\phi|^4) && \text{Starke WW von} \\
 & && \text{Quarks und Gluonen} \\
 & && Z^0, W^\pm \text{ Masse,} \\
 & && \text{Higgs } E_{kin}, \\
 & && \text{WW von Z, W mit Higgs} \\
 & && \text{Higgs Masse und Selbst-WW}
 \end{aligned}$$

A Anhang

A.1 Normierung der Dirac-Spinoren

Gesucht wird eine Normierung der Dirac-Spinoren, die zu einer Lorentz-invarianten Lagrange-Dichte führt. Insbesondere muss sich der 4-er Strom $j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ transformieren wie ein 4-er Vektor. Dies heist z.B., dass sich die 0-te Komponente

$$j^0 = \bar{\psi}\gamma^0\psi = \psi^\dagger\gamma^0\gamma^0\psi = \psi^\dagger\psi$$

transformiert wie eine Energie, also proportional zur Energie E ist. Für den Spinor

$$\psi^{(1)}(p_z) = e^{ip_z z} u^{(1)}(p_z) = e^{ip_z z} N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p}{E+m} \\ 0 \end{pmatrix}$$

gilt also z.B.

$$j^0 = N^*N \left(1, 0, \frac{p}{E+m}, 0\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p}{E+m} \\ 0 \end{pmatrix} = |N|^2 \left(1 + \frac{p^2}{(E+m)^2}\right) = |N|^2 \frac{2E}{E+m}.$$

Daher setzt man die Normierung zu

$$N = \sqrt{E+m},$$

so dass die Teilchendichte

$$j^0 = \psi^\dagger\psi = 2E.$$

folgt.

Eine so normierte ebene Welle trägt allerdings unendlich viel Energie, denn $\int d^3x j^0 = \text{inf.}$ Bei der Herleitung von Wirkungsquerschnitten muss daher stattdessen die Teilchendichte in einem Volumen V betrachtet werden. Die Normierung ist dann

$$N = \sqrt{(E+m)/V},$$

so dass

$$j^0 = 2E/V.$$

Dieses Volumen kürzt sich bei der Berechnung von Wirkungsquerschnitten allerdings wieder heraus, so dass häufig dieses Volumen in den Gleichungen weggelassen oder als Einheitsvolumen aufgefasst und nicht explizit geschrieben wird.

Auch andere Konventionen für die Normierung sind gebräuchlich, unterscheiden sich von dieser aber nur um eine Konstante, die sich bei der Berechnung von Wirkungsquerschnitten ebenfalls wieder herauskürzt.

A.2 Teilchen und Antiteilchen in der Dirac-Gleichung

Die Dirac Gleichung eines Teilchens mit elektrischer Ladung q lautet

$$[i\gamma^\mu(\partial_\mu + iqA_\mu) - m] \Psi = 0$$

und komplex konjugiert:

$$[-i\gamma^{\mu*}(\partial_\mu - iqA_\mu) - m] \Psi^* = 0$$

Sei C' eine Matrix für die gilt:

$$-C'\gamma^{\mu*} = \gamma^\mu C'$$

Dann folgt durch multiplizieren der komplex konjugierten Dirac-Gleichung mit C' :

$$[-iC'\gamma^{\mu*}(\partial_\mu - iqA_\mu) - mC'] \Psi^* = [i\gamma^\mu(\partial_\mu - iqA_\mu) - m] C'\Psi^* = 0$$

Dies ist aber die Dirac-Gleichung eines Teilchens mit entgegengesetzter elektrischer Ladung $-q$ und gleicher Masse m , also dem Antiteilchen, das durch die Wellenfunktion $C'\Psi^*$ beschrieben wird. Es zeigt sich, dass obige Bedingung für C' durch

$$C' = i\gamma^2$$

erfüllt wird. Z.B. bedeutet dies für die Lösung

$$\Psi = u_{(\vec{p})}^{(1)} e^{-ipx}$$

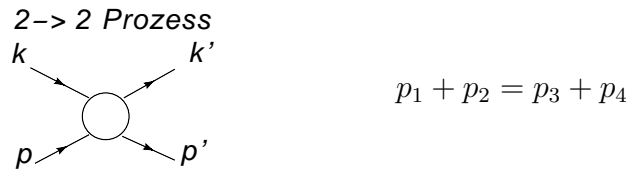
der Dirac-Gleichung, dass

$$\Psi^C = C' \left(u_{(\vec{p})}^{(1)} e^{-ipx} \right)^* = \left(v_{(\vec{p})}^{(1)} e^{ipx} \right)$$

Daher bezeichnet man die Lösungen v als die Lösungen der Dirac Gleichung für Antiteilchen.

A.3 Mandelstam - Variablen

Wirkungsquerschnitte müssen Lorentz-invariant sein und von der Kinematik der ein- und auslaufenden Teilchen anhängen. Daher muß aus den 4-er Vektoren der Teilchen ein vollständiger Satz Lorentz-invarianter Skalarprodukte gebildet werden und nur von diesen darf der Wirkungsquerschnitt abhängen. Für $2 \rightarrow 2$ Prozesse mit den vier 4-er Vektoren p_1, p_2, p_3, p_4 gibt es insgesamt 10 Möglichkeiten für Skalarprodukte, wovon wegen Energie und Impulserhaltung aber nur sechs unabhängig sind. Dazu



gehören die 4 Massen

$$p_i^2 = p_i^\mu p_{i,\mu} = m_i^2 \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

sowie zwei weitere unabhängige Kombinationen. Hierfür werden konventionell zwei der drei “Mandelstam-Variablen”

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2$$

$$t = (p_1 - p_3)^2 = (p_4 - p_2)^2$$

$$u = (p_1 - p_4)^2 = (p_3 - p_2)^2$$

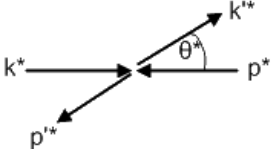
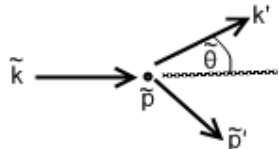
verwendet, die über die Beziehung

$$s + t + u = \sum_{i=1..4} m_i^2$$

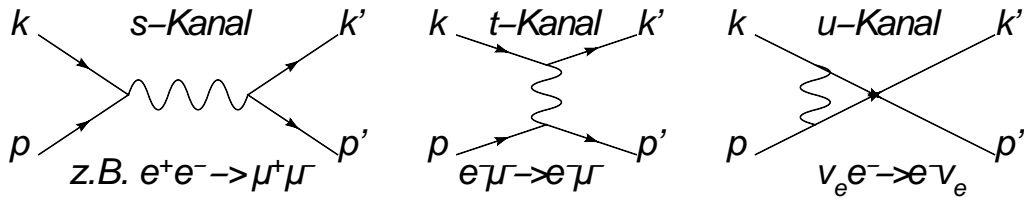
verknüpft sind. Offenbar ist $\sqrt{s} = E_{CMS}$ die Schwerpunktsenergie, während t und u den 4-er Impulsübertrag zwischen ein- und auslaufenden Teilchen beschreiben. Es gilt weiterhin

$$\begin{aligned} s &= (p_1 + p_2)^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2p_1 p_2 \approx 2p_1 p_2 \approx 2p_3 p_4 \\ t &= (p_1 - p_3)^2 = m_1^2 + m_3^2 - 2p_1 p_3 \approx -2p_1 p_3 \approx -2p_2 p_4 \\ u &= (p_1 - p_4)^2 = m_1^2 + m_4^2 - 2p_1 p_4 \approx -2p_1 p_4 \approx -2p_2 p_3 \end{aligned}$$

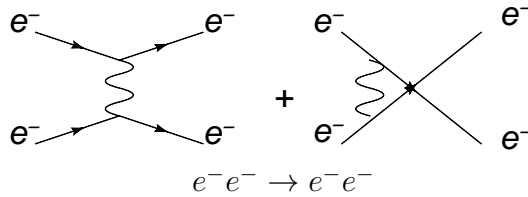
wobei die letzten beiden Spalten nur in ultra-relativistischer Näherung relevant sind ($m_i^2 \ll s, t, u$). Insbesondere gilt in dieser Näherung im Schwerpunktsystem beziehungsweise im “Fixed-Target” System (Teilchen 2 in Ruhe),

	<u>CMS</u>	<u>Fixed Target</u>
	$\vec{p}_1^* = -\vec{p}_2^*$	$\vec{p}_2 = 0$
		
$s \approx 2p_1p_2 = 2(E_1E_2 - \vec{p}_1\vec{p}_2)$	$\approx 4E_1^*E_2^*$	$\approx 2m_2E_1'$
$t \approx -2p_1p_3 = -2(E_1E_3 - \vec{p}_1\vec{p}_3)$	$\approx -\frac{s}{2}(1 - \cos\Theta^*)$	$\approx -2m_2(E_1' - E_3')$
$u \approx -2p_1p_4 = -2(E_1E_4 - \vec{p}_1\vec{p}_4)$	$\approx -\frac{s}{2}(1 + \cos\Theta^*)$	$\approx -2m_2E_3'$

Bedeutsam sind die Mandelstam-Variablen auch, weil die Propagatoren der ausgetauschten Teilchen in Feynman-Diagrammen direkt mit s, t, u beschrieben und damit klassifiziert werden können. Als Konvention werden die gleichartigen Teilchenpaare



im Anfangszustand mit (1, 3) beziehungsweise (2, 4) bezeichnet. Der u -Kanal tritt in der QED nur auf, wenn bei gleichen Teilchen im Anfangs- und Endzustand (z.B. $e^-e^- \rightarrow e^-e^-$) nicht unterschieden werden kann, welches Teilchen von welchem Vertex stammt. In der schwachen Wechselwirkung können anders als in der QED



auch Teilchensorten ineinander umgewandelt werden, so dass der u Kanal z.B. für $\nu_e e^- \rightarrow e^- \nu_e$ bedeutsam ist.

A.4 Luminosität

Die Luminosität eines Kreis-Beschleunigers ist gegeben durch

$$L = N_B f \frac{N_1 N_2}{4\pi \sigma_x \sigma_y}$$

Hierbei sind σ_x und σ_y die Breiten der Verteilung der Teilchen transversal zur Strahlrichtung, die näherungsweise Gauß-Verteilungen sind. Die Anzahl der Teilchen je Bunch, $N_{1,2}$, multipliziert mit der Anzahl der Bunche, N_B , und der Umlauffrequenz der Bunche, f , ist der Strom eines der Teilchenstrahlen in der Maschine.

$$I_{1,2} = e N_{1,2} N_B f.$$

In Anzahl der beobachtbaren Wechselwirkungen je Experiment hängt vom Wirkungsquerschnitt und der zeitlich integrierten Luminosität ab,

$$N = \sigma L_{int} = \sigma \int L dt.$$

A.5 Phasenraum

Im Endzustand ist der Phasenraum eines Teilchens mit 4-er Impuls (E, \vec{p}) proportional zu

$$d^3p = dp_x dp_y dp_z$$

Gesucht ist ein Lorentz-invarianter Ausdruck für den Phasenraum. Bei einer Lorentz-Transformation z.B. in x-Richtung gilt,

$$p'_x = \gamma p_x - \gamma \beta E, \quad E' = \gamma E - \gamma \beta p_x,$$

so dass

$$dp'_x = \frac{\partial p'_x}{\partial p_x} dp_x + \frac{\partial p'_x}{\partial E} dE = \gamma dp_x - \gamma \beta dE.$$

Außerdem folgt aus $p_x^2 = E^2 - p_y^2 - p_z^2 - m^2$ bei festgehaltenem p_y, p_z , dass $p_x dp_x = E dE$. Setzt man dies ein so folgt

$$dp'_x = \left(\gamma - \gamma \beta \frac{p_x}{E} \right) dp_x$$

und damit

$$\frac{dp'_x}{E'} = \frac{(\gamma - \gamma \beta \frac{p_x}{E}) dp_x}{\gamma E - \gamma \beta p_x} = \frac{dp_x}{E}.$$

Verallgemeinert für alle drei Impulsrichtungen ist also der Lorentz-invariante Ausdruck für den Phasenraum

$$\frac{d^3p}{E}$$

beziehungsweise für den differentiellen Wirkungsquerschnitt

$$E \frac{d\sigma}{d^3p}.$$

A.6 Nicht-Abelsche Eichtheorie

Nicht-Abelsche Eichtheorien sind die Grundlage des Standardmodells der Elektroschwachen und Starken Wechselwirkung. Auch die QED ergibt sich daraus durch Vereinfachung auf den Abelschen Fall. Die Form der kovarianten Ableitung ist von entscheidender Bedeutung für die Selbst-Wechselwirkung der W, Z Bosonen und der Gluonen. Daher wird im Folgenden die Form der kovarianten Ableitung explizit hergeleitet und gezeigt, dass die einzelnen Terme der Lagrange-Dichte eichinvariant sind.

Sei

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \dots \\ \psi_n \end{pmatrix}, \quad \bar{\psi} = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)$$

ein Multipllett¹⁷ aus Fermionen mit der freien Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\gamma_\mu \partial^\mu - m) \psi$$

Wir betrachten Transformation

$$\psi' = U \psi, \quad \bar{\psi}' = \bar{\psi} U^\dagger,$$

zwischen den Komponenten des Multipletts (also nicht den Spinorkomponenten). Für ein Multipllett der Dimension n kann U z.B. als eine $n \times n$ Matrix dargestellt werden. Für eine globale (d.h. ortsunabhängige) Transformation U bleibt \mathcal{L} invariant wenn U unitär ist, $U^\dagger U = 1$, denn dann gilt

$$\mathcal{L}' = \bar{\psi}' (i\gamma_\mu \partial^\mu - m) \psi' = \bar{\psi} U^\dagger (i\gamma_\mu \partial^\mu - m) U \psi = \bar{\psi} (i\gamma_\mu \partial^\mu - m) U^\dagger U \psi = \bar{\psi} (i\gamma_\mu \partial^\mu - m) \psi = \mathcal{L}$$

Unter lokalen Eichtransformationen

$$U = U(x)$$

bleibt der Massenterm $-m\bar{\psi}\psi$ weiterhin eichinvariant, der kinetische Term mit der Ableitung dagegen nicht, denn

$$U^\dagger \partial^\mu (U\psi) \neq \partial^\mu (U^\dagger (U\psi))$$

¹⁷In der $SU(2)$ sind dies z.B. die schwachen Doubletts

$$\psi = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L, \quad \dots, \quad \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_L$$

In der $SU(3)_C$ sind es die Farb-Tripletts der Quarks

$$\psi = \begin{pmatrix} u_{\text{rot}} \\ u_{\text{blau}} \\ u_{\text{grün}} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \begin{pmatrix} b_{\text{rot}} \\ b_{\text{blau}} \\ b_{\text{grün}} \end{pmatrix}$$

Kinetischer Term der Quarks

Im Folgenden wird verlangt, dass die Lagrangedichte invariant unter lokalen Transformationen ist. Um Eichinvarianz zu erreichen muss der Term für die kinetische Energie der Fermionen,

$$\mathcal{L}_{kin} = \bar{\psi} i\gamma_\mu \partial^\mu \psi$$

verändert werden. In Analogie zur QED wird daher die Ableitung ∂^μ zur “kovarianten” Ableitung generalisiert,

$$\partial^\mu \rightarrow D^\mu$$

so dass jetzt

$$\boxed{\mathcal{L}_{kin} = \bar{\psi} i\gamma_\mu D^\mu \psi}$$

Die transformierte Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_{kin}' = \bar{\psi}' i\gamma_\mu D^{\mu'} \psi' = \bar{\psi} U^\dagger i\gamma_\mu D^{\mu'} (U\psi) = \bar{\psi} i\gamma_\mu U^\dagger D^{\mu'} (U\psi)$$

ist invariant,

$$\mathcal{L}_{kin}' = \mathcal{L}_{kin}$$

wenn

$$\boxed{U^\dagger D^{\mu'} (U\psi) = D^\mu \psi}$$

Symbolisch lässt sich dies auch schreiben als

$$U^\dagger D^{\mu'} U = D^\mu \quad \text{oder} \quad D^{\mu'} = U D^\mu U^\dagger$$

Da \mathcal{L} keine Matrix sondern nur eine Zahl ist muss D^μ die Gestalt einer $n \times n$ Matrix haben, wobei jedes Element genau wie ∂^μ ein 4er-Vektors sein muss. Deshalb wird als Ansatz

$$\boxed{D^\mu = \partial^\mu + M^\mu}$$

gewählt, wobei M ebenfalls eine $n \times n$ Matrix ist und vor ∂^μ eigentlich eine $n \times n$ Einheitsmatrix steht, die zur Vereinfachung der Notation weggelassen wurde.

Aus der abgeleiteten Transformationseigenschaft für D^μ ergibt sich für M^μ :

$$\begin{aligned} U^\dagger (\partial^\mu + M^{\mu'}) (U\psi) &= U^\dagger \left(U \partial^\mu \psi + (\partial^\mu U) \psi + M^{\mu'} U \psi \right) \\ &= \partial^\mu \psi + U^\dagger (\partial^\mu U) \psi + U^\dagger M^{\mu'} U \psi \\ &= (\partial^\mu + M^\mu) \psi \end{aligned}$$

so dass $M^\mu = U^\dagger M^{\mu'} U + U^\dagger \partial^\mu U$ oder

$$\boxed{M^{\mu'} = U M^\mu U^\dagger - (\partial^\mu U) U^\dagger}$$

Dies ist eine allgemeine Bedingung für alle unitären Eichtransformationen. Die Komponenten der Matrix M^μ sind also ebenso wie U Funktionen von Ort und Zeit und werden Eichfelder genannt. Sie haben damit eigenständige Bedeutung und tragen zur kinetischen Energie bei. Sie haben Vektor-Charakter, ihre Quanten sind also Spin 1 Teilchen und werden Eichbosonen genannt.

Kinetischer Term der Eichbosonen

Für die kinetische Energie der Eichfelder M^μ benötigt man zumindest deren Ableitungen, $\partial^\nu M^\mu$. Analog zur QED muss auch hier ein Feldstärke-Tensor $M^{\mu\nu}$ definiert werden, dessen mögliche Form jedoch wegen der Forderung nach Lorentz- und Eich-Invarianz sehr stark eingeschränkt ist. Dieser Feldstärke-Tensor $M^{\mu\nu}$ lässt sich am einfachsten aus den kovarianten Ableitungen D^μ konstruieren, denn diese haben bereits die Eigenschaft

$$D'^\mu = U D^\mu U^{-1}.$$

Damit folgt auch für den Kommutator

$$[D'^\mu, D'^\nu] = [U D^\mu U^{-1}, U D^\nu U^{-1}] = U [D^\mu, D^\nu] U^{-1}.$$

Diese Eigenschaft macht man sich zu Nutze um den allgemeinsten, P und T erhaltende Ausdruck für die kinetische Energie von Eichtheorien zu konstruieren. Die Feldstärke-Tensoren $M^{\mu\nu}$ werden definiert als

$$M^{\mu\nu} = [D^\mu, D^\nu]$$

so dass ¹⁸

$$\boxed{M^{\mu\nu} = \partial^\mu M^\nu - \partial^\nu M^\mu + [M^\mu, M^\nu]}$$

Einen Lorentz-invarianten Ausdruck aus diesem Feldstärketensor ist dann $M^{\mu\nu} M_{\mu\nu}$. Der allgemeinste eichinvariante Ausdruck für die kinetische Energie ist

$$\mathcal{L}_{M,kin} = -\frac{1}{2} \text{Spur}(M^{\mu\nu} M_{\mu\nu})$$

¹⁸ Wendet man den Kommutator $[D^\mu, D^\nu]$ auf ein Feld ψ an, so gilt

$$\begin{aligned} [D^\mu, D^\nu] \psi &= [\partial^\mu + M^\mu, \partial^\nu + M^\nu] \psi \\ &= [\partial^\mu, \partial^\nu] \psi + [\partial^\mu, M^\nu] \psi + [M^\mu, \partial^\nu] \psi + [M^\mu, M^\nu] \psi \end{aligned}$$

Wegen $[\partial^\mu, \partial^\nu] \psi = 0$ und

$$[\partial^\mu, M^\nu] \psi = \partial^\mu (M^\nu \psi) - M^\nu \partial^\mu \psi = (\partial^\mu M^\nu) \psi$$

folgt

$$M^{\mu\nu} \psi = [D^\mu, D^\nu] \psi = (\partial^\mu M^\nu - \partial^\nu M^\mu) \psi + [M^\mu, M^\nu] \psi$$

Damit ist die kinetische Energie tatsächlich eichinvariant, denn wegen $M^{\mu\nu'} = U M^{\mu\nu} U^\dagger$ folgt

$$\begin{aligned}\mathcal{L}'_{M,kin} &= -\frac{1}{2} \text{Spur}(M^{\mu\nu'} M'_{\mu\nu}) &= -\frac{1}{2} \text{Spur}(U M^{\mu\nu} U^{-1} U M_{\mu\nu} U^{-1}) \\ &= -\frac{1}{2} \text{Spur}(U M^{\mu\nu} M_{\mu\nu} U^{-1}) &= -\frac{1}{2} \text{Spur}(U^{-1} U M^{\mu\nu} M_{\mu\nu}) \\ &= -\frac{1}{2} \text{Spur}(M^{\mu\nu} M_{\mu\nu}) &= \mathcal{L}_{M,kin}\end{aligned}$$

wobei in der Spur die Reihenfolge der Matrizen permutiert werden darf.

Folgt man dem Prinzip der Eichinvarianz, so müssen die Eichbosonen Masse-los sein, denn ein entsprechender Term in der Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L}_{M,m} = m_M^2 M^\mu M_\mu$$

wäre nicht eich-invariant,

$$\mathcal{L}'_{M,m} = m_M^2 M^{\mu'} M'_\mu \neq m_M^2 M^\mu M_\mu.$$

SU(N) Unitäre Transformationen

Diese Lagrange-Dichte ist invariant unter Rotationen im Farb-Raum. Postuliert man, dass diese Symmetrie auch lokal gelten soll, so kann man die Rotationen darstellen als unitäre Transformationen, die sowohl die Komponenten $\psi_{r,b,g}$ verändern als auch deren Phasen.

$$\psi \rightarrow \psi' = U\psi.$$

Hier ist U eine 3 x 3 Matrix im Farbraum, mit $U^\dagger U = 1$, so dass man U schreiben kann als

$$\psi' = e^{ig_s \alpha_a(x) T_a} \psi.$$

- g_s ist eine reelle Konstante, die wir später mit der starken Kopplungskonstanten identifizieren werden.
- Die reellen Funktionen $\alpha_a(x)$ sollen von Ort und Zeit abhängen, d.h. wie bei der QED fordern wir, dass die Symmetrie lokal gültig sein soll.
- Die Größen T_a sind linear unabhängige hermitesche 3 x 3 Matrizen im Farbraum, die man die Generatoren der $SU(3)_C$ nennt (Index C für "Colour"). Die T_a müssen so gewählt werden, dass mit $\alpha_a T_a$ (Summation über a) jede beliebige Rotation beschrieben werden kann.

Für eine solche 3x3 Matrix benötigt man im Allgemeinen 9 reelle Zahlen. Wegen der Bedingung $\det U = +1$ folgt jedoch, dass es für die $SU(3)$ nur 8 linear unabhängige T_a gibt. Wir werden sehen, dass daraus auch die Existenz von 8 verschiedenen Gluonen folgt¹⁹. Die Gruppe ist nicht Abelsch, da die Generatoren im Allgemeinen nicht

¹⁹Allgemein hat eine $SU(N)$ Gruppe demnach $N^2 - 1$ Generatoren und die entsprechende Eichtheorie $N^2 - 1$ unterschiedliche Eichbosonen.

vertauschen, sondern Kommutator-Relationen erfüllen,

$$[T_a, T_b] = i f_{abc} T_c.$$

Die Konstanten f_{abc} werden Strukturkonstanten der $SU(3)$ genannt. Aus der Unitarität $U^\dagger = U^{-1}$ folgt $\alpha_a T_a = \alpha_a^* T_a^\dagger$. Eine mögliche Darstellung der Generatoren $T_a = \lambda_a/2$ sind die sogenannten λ Matrizen,

Die unitären Transformationen U lassen sich für Eichgruppen $SU(N)$ und Multipletts $\psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)$ als unitäre $n \times n$ Matrizen darstellen:

Allgemein gibt es hierfür $n^2 - 1$ linear unabhängige Matrizen

A.7 Die kovariante Ableitung für Nicht-Abel'sche Eichtheorien

Kinetischer Term + Wechselwirkungsterm + Massenterm:

$$0 \stackrel{!}{=} \delta\mathcal{L} = -g\bar{\psi}\gamma_\mu T_a \underbrace{(\partial^\mu\alpha_a + gf_{abc}\alpha_b W_c^\mu + \delta W_a^\mu)}_{=0} \psi$$

$$\Rightarrow W_a^{\mu'} = W_a^\mu + \delta W_a^\mu$$

$$\boxed{W_a^{\mu'} = W_a^\mu - \partial^\mu\alpha_a - gf_{abc}\alpha_b W_c^\mu}$$

unter dieser Trafo bleibt \mathcal{L} konstant

Betrachte infinitesimale Trafo

$$\begin{aligned} \psi \rightarrow \psi' &= e^{ig\alpha_a(x)T_a} \psi \\ &\approx (1 + ig\alpha_a(x)T_a) \psi & \delta\bar{\psi} &\equiv \bar{\psi}' - \bar{\psi} \\ &= (1 + c(x))\psi & &= \bar{\psi}\bar{c}^* \\ c &= ig\alpha_a(x)T_a & \delta(\partial_\mu\psi) &\equiv \partial_\mu\psi' - \partial_\mu\psi \\ \bar{\psi}' &= [\psi(1 + c)]^* \gamma^0 & &= \partial_\mu\psi + \partial_\mu(c\psi) - \partial_\mu\psi \\ &= \bar{\psi}\bar{c}^* & &= (\partial_\mu c)\psi + c\partial_\mu\psi \end{aligned}$$

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}i\gamma_\mu\partial^\mu\psi - m\bar{\psi}\psi - g\bar{\psi}\gamma_\mu T_a \psi W_a^\mu - \frac{1}{4}W_a^{\mu\nu}W_{a\mu\nu}$$

Variation von \mathcal{L} soll null sein: $0 \stackrel{!}{=} \delta\mathcal{L} = \mathcal{L}' - \mathcal{L}$

Massenterm:

$$\begin{aligned} \delta(m\bar{\psi}\psi) &= m((\delta\bar{\psi})\psi + \bar{\psi}\delta\psi) = m(\bar{\psi}\bar{c}^*\psi + \bar{\psi}c\psi) \\ &= m\bar{\psi}(\bar{c}^* - c)\psi = 0 \\ &\text{da } \alpha_a^* T_a^\dagger = \alpha_a T_a \end{aligned}$$

Kinetischer Term:

$$\begin{aligned} \delta(\bar{\psi}i\gamma_\mu\partial^\mu\psi) &= (\delta\bar{\psi})i\gamma_\mu\partial^\mu\psi + \bar{\psi}i\gamma_\mu\delta(\partial^\mu\psi) = \bar{\psi}i\gamma_\mu(\bar{c}\partial^\mu\psi + (\partial_\mu c)\psi + c(\partial^\mu\psi)) \\ &= \bar{\psi}i\gamma_\mu(\partial^\mu c)\psi = -g\bar{\psi}\gamma_\mu(\partial^\mu\alpha_a)T_a\psi \end{aligned}$$

Wechselwirkungsterm:

$$\begin{aligned} g\delta(\bar{\psi}\gamma_\mu T_a \psi W_a^\mu) &= g((\delta\bar{\psi})\gamma_\mu T_a \psi W_a^\mu + \bar{\psi}\gamma_\mu T_a (\delta\psi) W_a^\mu + \bar{\psi}\gamma_\mu T_a \psi \delta W_a^\mu) \\ &= g\bar{\psi}\gamma_\mu(\bar{c}T_a\psi W_a^\mu + T_a c\psi W_a^\mu + T_a\psi\delta W_a^\mu) \\ &= g\bar{\psi}\gamma_\mu(-ig\alpha_b T_b T_a W_a^\mu\psi + igT_a\alpha_b T_b W_a^\mu\psi + T_a\psi\delta W_a^\mu) \\ &= g\bar{\psi}\gamma_\mu(ig\alpha_b [T_a, T_b] W_a^\mu\psi + T_a\psi\delta W_a^\mu) \\ &= g\bar{\psi}\gamma_\mu(ig\alpha_b i f_{abc} T_c W_a^\mu\psi + T_a\psi\delta W_a^\mu) \\ &= g\bar{\psi}\gamma_\mu(ig i f_{abc} \alpha_c T_a W_b^\mu\psi + T_a\psi\delta W_a^\mu) \\ &= g\bar{\psi}\gamma_\mu(gf_{abc} T_a \alpha_b W_c^\mu\psi + T_a\delta W_a^\mu\psi) \end{aligned}$$

A.8 Ergänzungen zum Propagator

Die Eigenschaften des Propagators für Dirac-Teilchen

$$\tilde{D}(p) = \frac{\gamma^\mu p_\mu + m}{p^\mu p_\mu - m^2 + i\epsilon}$$

lassen sich nach Rücktransformation zu $D(x - x')$ verstehen.

$$D(x - x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{-ip(x-x')} \frac{\gamma^\mu p_\mu + m}{p^\mu p_\mu - m^2 + i\epsilon}$$

Insbesondere findet man für die Beziehung zwischen den Wellenfunktionen an verschiedenen Orten x und x' :

$$\Psi(x) = i \int d\vec{x}' D(x - x') \gamma^0 \Psi(x')$$

Dies soll jetzt bewiesen werden. Mit $E = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ folgt für den Nenner von \tilde{D} :

$$p^\mu p_\mu - m^2 + i\epsilon = p_0^2 - \vec{p}^2 - m^2 + i\epsilon = p_0^2 - E^2 + i\epsilon \approx (p_0 - (E - i\epsilon)) (p_0 + (E - i\epsilon))$$

für $\epsilon \rightarrow 0$. Wegen der Polstelle bei $p_0 = E - i\epsilon$ lässt sich das Integral über die Energiekomponente p_0 mit Hilfe des Residuensatzes ausführen:

$$\begin{aligned} D(x - x') &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d\vec{p} e^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{x}')} \int dp_0 e^{-ip_0(t-t')} \frac{1}{p_0 - (E - i\epsilon)} \frac{\gamma^\mu p_\mu + m}{p_0 + (E - i\epsilon)} \\ &= \frac{-i}{(2\pi)^3} \int d\vec{p} e^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{x}')} e^{-iE(t-t')} \frac{\gamma^0 E - \vec{\gamma}\vec{p} + m}{2E} \end{aligned}$$

Für eine eben Welle

$$\Psi(x') = u(k)e^{-ikx'} = u(k)e^{-ik_0 t'} e^{i\vec{k}\vec{x}'}$$

folgt daraus:

$$\begin{aligned} &i \int d\vec{x}' D(x - x') \gamma^0 \Psi(x') \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\vec{p} \left(\int d\vec{x}' e^{-i(\vec{p}-\vec{k})x'} \right) e^{i\vec{p}\vec{x}} e^{-ik_0 t'} e^{-iE(t-t')} \frac{\gamma^0 E - \vec{\gamma}\vec{p} + m}{2E} \gamma^0 u(k) \\ &= e^{i\vec{k}\vec{x}} e^{-ik_0 t'} e^{-ik_0(t-t')} \frac{\gamma^0 k_0 - \vec{\gamma}\vec{k} + m}{2k_0} \gamma^0 u(k) = e^{-ikx} u(k) \end{aligned}$$

wobei das Integral über $d\vec{x}'$ durch $(2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{k})$ ersetzt wurde und damit E durch k_0 , sowie mit Hilfe der Dirac Gleichung:

$$(-\vec{\gamma}\vec{k}\gamma^0 + m\gamma^0)u = \gamma^0(\vec{\gamma}\vec{k} + m)u = \gamma^0(\gamma^0 k_0)u = k_0 u$$

A.9 Yukawa Potential und Reichweite der Kräfte

Yukawa schlug in den Anfängen der Kernphysik einen Ansatz mit schweren Austauscheteilchen vor um die endliche Reichweite der Kernkräfte zu erklären. Zunächst wird der Zusammenhang zwischen Wellengleichung und statischem Potential in der Elektrodynamik erklärt. Die Wellengleichung für das 4-er Potential A^μ bei äußerem Strom j^μ lautet

$$\square A^\mu = j^\mu$$

Ohne äußeren Strom und Ladungsdichte, $j^0 = 0$ ist die Lösung von $\square A^\mu = 0$ eine ebene Welle, $A^\mu \sim e^{ikx}$, die freien, masselosen Photonen entspricht. Für eine punktförmige, statische Ladung e im Zentrum ist

$$j^\mu = \begin{pmatrix} e\delta^3(x) \\ \vec{0} \end{pmatrix}$$

Das Potential hierfür ist bekanntlich das Coulomb-Potential

$$A^0 = \frac{e}{4\pi r}, \quad \vec{A} = 0$$

Die Reichweite dieses Potentials fällt nur sehr langsam mit dem Abstand von der Quelle.

Yukawa ging von der Klein-Gordon-Gleichung in der Form

$$(\square + m^2) \Phi = g \rho(x)$$

aus, wobei g eine Kopplungskonstante und $\rho(x)$ die Dichteverteilung eines Kerns sein sollte, also auch die Ladungs-Verteilung für die starke Kraft. Ohne äußeres Feld ist die Lösung wiederum eine ebene Welle für ein freies Teilchen mit Masse m ,

$$\Phi(x) \sim e^{ikx} \quad \text{mit } k^2 = m^2$$

Für eine punktförmige Ladungsverteilung

$$\rho(x) = \delta^3(x)$$

findet man als Lösung

$$\Phi = g \frac{e^{-mr}}{4\pi r}$$

Dieses Potential fällt wegen der Exponentialfunktion sehr schnell nach außen ab, d.h. diese Kraft hat eine endliche Reichweite, die typisch von der Größe $1/m$ ist.

Diese Interpretation für ein schweres Austauscheteilchen stimmt mit der Überlegung überein, dass eine statische Ladungsverteilung für kurze Zeit ein massives Quant der Energie $\Delta E \approx m$ emittieren kann, dessen Lebensdauer Δt aufgrund der Unschärferelation $m \Delta t \approx 1$ und Reichweite r durch die Lichtgeschwindigkeit auf

$$r \approx c \Delta t \approx \frac{1}{m}$$

beschränkt sind (mit $\hbar = c = 1$).

Kern-Kräfte

Setzt man für die Reichweite der Kernkraft den Radius des Protons an, $r \approx 1\text{fm}$, so ergibt sich $m \approx 200\text{Mev}$. Dies ist tatsächlich die Größenordnung für die Masse des leichtesten Hadrons, des Pions. Pion-Austausch stellt demnach eine erste plausible Näherung für die Kräfte zwischen den Protonen und Neutronen im Kern dar, die durch den Austausch auch schwererer Hadronen zur Regge-Theorie verallgemeinert wurde, die erfolgreich zahlreiche Phänomene der Hadron-Hadron-Streuung bei kleinen Impulsüberträgen erklären kann. In diesem Bereich ist das ansonsten natürlich fundamentalere Parton-Bild der Hadronen nicht anwendbar, da das Auflösungsvermögen für die Partonen fehlt und die Kopplungskonstante α_s zu groß ist um perturbative Rechnungen zuzulassen.

Reichweite der Schwachen Wechselwirkung

Die Eichbosonen W und Z der schwachen Wechselwirkung sind Spin-1 Teilchen, die wie das Photon durch Vektorfelder beschrieben werden. Zwar gilt für diese die Proca-Gleichung und nicht die Klein-Gordon Gleichung, aber das Prinzip der obigen Überlegungen von Yukawa bleiben gültig. Den Massen $M_W = 80,4\text{ GeV}$ und $M_Z = 90,1\text{ GeV}$ entsprechen Reichweiten der schwachen Wechselwirkung von ca. $1/m \approx 2,5 \cdot 10^{-3}\text{ fm}$. Die schwache Wechselwirkung ist also bei kleinen Energien schwach, weil die Reichweite der schweren Bosonen und damit auch alle Wirkungsquerschnitte klein sind.

Bei hohen Energien können W und Z auch als reelle Teilchen produziert werden. Die Reichweite ergibt sich dann aus der Lebensdauer der Teilchen. Bei einer totalen Breite von ca. $\Gamma = 2\text{ GeV}$ ergibt sich eine typische Reichweite von $c\tau = 0,1\text{ fm}$. Werden W und Z in Proton-Proton Kollisionen erzeugt zerfallen sie demnach noch innerhalb des Proton-Radius. Bei Zerfällen in Quarks werden diese also noch durch das Farb-Feld der kollidierenden Protonen beeinflusst.

A.10 Drehimpuls und Rotation

Für infinitesimal kleine Translationen, d.h. Verschiebungen entlang einer Richtung, lassen sich Zustände schreiben als

$$\Psi' = D\Psi = \Psi(x + \delta x) = \Psi(x) + \delta x \partial_x \Psi = (1 + i \delta x p_x) \Psi$$

mit dem Impulsoperator $p_x = -i\partial_x$ als Generator der Transformation. Endlich große Verschiebungen $\Delta x = n \delta x$ ergeben sich aus n infinitesimal kleinen Verschiebungen, die hintereinander ausgeführt werden, im Limes $n \rightarrow \infty$ und $\delta x \rightarrow 0$.

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + i \delta x p_x)^n = e^{i p_x \Delta x}$$

Ganz analog gilt für eine infinitesimal kleine Rotation z.B. um die z -Achse

$$\Psi' = R\Psi = \Psi(\varphi + \delta\varphi) = \Psi(\varphi) + \delta\varphi \partial_\varphi \Psi = (1 + i \delta\varphi J_z) \Psi$$

mit der Drehimpulskomponente

$$J_z = (\vec{r} \times \vec{p})_z = -i(x \partial_y - y \partial_x)$$

als Generator der Rotation um die z -Achse. Das J_z tatsächlich der richtige Generator ist sieht man aus den rotierten Koordinaten

$$x = r \cos \varphi \quad \delta x = (\partial_\varphi x) \delta \varphi = -r \sin \varphi \delta \varphi = -y \delta \varphi \quad (2)$$

$$y = r \sin \varphi \quad \delta y = (\partial_\varphi y) \delta \varphi = r \cos \varphi \delta \varphi = x \delta \varphi \quad (3)$$

und

$$R\Psi(x, y, z) = \Psi(x', y', z) \quad (4)$$

$$= \Psi(x, y, z) + (\partial_x \Psi) \delta x + (\partial_y \Psi) \delta y \quad (5)$$

$$= \Psi(x, y, z) - y \delta \varphi \partial_x \Psi + x \delta \varphi \partial_y \Psi \quad (6)$$

$$= (1 + i \delta \varphi J_z) \Psi(x, y, z) \quad (7)$$

Für eine Rotation um einen endlich großen Winkel $\Delta\varphi = n\delta\varphi$ gilt wie oben:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + i \delta \varphi J_z)^n = e^{i J_z \Delta \varphi}$$

Für die Komponenten J_i des durch $\vec{J} = \vec{r} \times \vec{p}$ definierten Drehimpulsoperators und für $J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$ ergeben sich folgende Vertauschungsrelationen:

$$[J_i, J_j] = i \epsilon_{ijk} J_k \quad [J^2, J_i] = 0$$

Für die Auf- und Absteigeoperatoren

$$J_{\pm} = J_x \pm iJ_y$$

gilt

$$\begin{aligned} [J_z, J_+] &= J_+ & J_+ J_- &= J^2 - J_z^2 + J_z \\ [J_z, J_-] &= -J_- & J_- J_+ &= J^2 - J_z^2 - J_z \end{aligned}$$

Für einen Drehimpulszustand $|jm\rangle$ mit Gesamtdrehimpuls j und z -Komponente m gilt

$$-j \leq m \leq j \quad J_z |jm\rangle = m |jm\rangle \quad J^2 |jm\rangle = j(j+1) |jm\rangle$$

Daraus folgt

$$J_z (J_- |jm\rangle) = J_- (J_z - 1) |jm\rangle = (m-1) (J_- |jm\rangle)$$

und

$$J_z (J_+ |jm\rangle) = (m+1) (J_+ |jm\rangle)$$

so dass für die Auf- und Absteigeoperatoren gilt:

$$J_+ |jm\rangle = C_+ |j, m+1\rangle \quad J_- |jm\rangle = C_- |j, m-1\rangle$$

mit

$$C_+ = \sqrt{j(j+1) - m(m+1)} \quad C_- = \sqrt{j(j+1) - m(m-1)}$$

Dreht man einen Zustand $|j, m\rangle$ um die y -Achse um den Winkel θ , so wird daraus eine Linearkombination von Zuständen $|j, m'\rangle$ mit gleichem Gesamtdrehimpuls j und neuen dritten Komponenten m' .

$$e^{-i\theta J_y} |j, m\rangle = \sum_{m'} d_{m'm}^j(\theta) |j, m'\rangle$$

Die einzelnen d -Funktionen sind von θ und von j, m, m' abhängig und werden Drehmatrizen genannt. Multiplikation von links mit $\langle j, m'|$ liefert

$$\langle j, m'| e^{-i\theta J_y} |j, m\rangle = d_{m'm}^j(\theta)$$

Der Fall Spin $j = \frac{1}{2}$

Für die Darstellung der beiden möglichen Zustände $|j, m\rangle$

$$\left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ist die Darstellung von J_y geben durch die Pauli-Matrizen,

$$J_y = \frac{1}{2}\sigma_y = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Wegen $\sigma_y^2 = 1$ folgt aus einer Taylorentwicklung für \sin und \cos :

$$\begin{aligned} e^{-i\theta J_y} &= \cos(-\theta J_y) + i \sin(-\theta J_y) \\ &= 1_2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - i\sigma_y \sin\frac{\theta}{2} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Damit ist z.B.

$$\begin{aligned} d_{m'm}^j &= d_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \\ &= \langle j, m' | e^{-i\theta J_y} | j, m \rangle \\ &= (1, 0) \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \cos\frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

Der Fall Spin $j = 1$

Berechnet werden soll z.B. $j = 1, m = 1, m' = 1$, also $d_{1,1}^1$. Auch ohne explizite Darstellung ist die Berechnung möglich wenn man berücksichtigt, dass $J_y = -\frac{i}{2}(J_+ - J_-)$. Für die ersten Terme der Taylor-Entwicklung

$$e^{-i\theta J_y} = 1 - i\theta J_y - \frac{\theta^2}{2!} J_y^2 + i \frac{\theta^3}{3!} J_y^3 + \dots$$

folgt wegen $J_+ |1, 1\rangle = 0$:

$$J_y |1, 1\rangle = -\frac{i}{2}(J_+ - J_-)|1, 1\rangle = \frac{i}{2} J_- |1, 1\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}} |1, 0\rangle$$

$$J_y^2 |1, 1\rangle = \frac{1}{2}(|1, 1\rangle - |1, -1\rangle)$$

etc. Daraus folgt

$$\langle 1, 1 | e^{-i\theta J_y} | 1, 1 \rangle = 1 - \frac{1}{2} \frac{\theta^2}{2!} + \frac{1}{2} \frac{\theta^4}{4!} + \dots$$

oder

$$d_{1,1}^1 = \frac{1}{2} (1 + \cos \theta)$$

B Nützliche Formeln

Metrischer Tensor: $g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

4-er Vektoren: $a^\mu = (a_0, \vec{a}) \quad a_\mu = g_{\mu\nu} a^\nu = (a_0, -\vec{a})$

Lorentz-invariant: $a \cdot b = a_\mu b^\mu = a^\mu b_\mu = a_0 b_0 - \vec{a} \vec{b}$
 $a^2 = a_\mu a^\mu = a_0^2 - \vec{a}^2$

4-er Impuls: $p^\mu = (E, \vec{p}), \quad p^2 = E^2 - \vec{p}^2 = m^2$

4-er Ableitung: $\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = (\partial_t, -\nabla)$

Impuls-Operator (Ortsdarstellung): $p^\mu = i\partial^\mu = (i\partial_t, -i\nabla)$
 $p_\mu p^\mu = -\partial_\mu \partial^\mu = -(\partial_t^2, -\nabla^2) = -\square$

Dirac Gleichung:

$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0$

γ - Matrizen (4x4): $\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$

$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Pauli Matrizen (Dirac Darstellung):

$\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$
 $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Anti-Kommutator:

$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$
 $\gamma^5 \gamma^\mu + \gamma^\mu \gamma^5 = 0$

wie 4-er Vektor:

$\gamma_\mu = g_{\mu\nu} \gamma^\nu$
 $\gamma^{0\dagger} = \gamma^0 \quad \gamma^{k\dagger} = -\gamma^k \quad k = 1, 2, 3$

hermitesch konjugiert:

$\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \quad \gamma^{5\dagger} = \gamma^5$

Quadrate:

$(\gamma^0)^2 = -(\gamma^k)^2 = (\gamma^5)^2 = \mathbb{1}$

Dagger:

$\not{x} \equiv \gamma^\mu a_\mu = \gamma^0 a^0 - \vec{\gamma} \vec{a}$
 $\gamma_\mu \not{x} \gamma^\mu = -2\not{x} \quad \gamma_\mu \not{x} \not{b} \gamma^\mu = 4a^\nu b_\nu$

Spur Theoreme

$$Tr(A) = \sum_i A_{ii} \quad \text{Diagonal-Elemente}$$

$$Tr(ABC) = Tr(BCA)$$

$$Tr \mathbb{1} = 4 \quad (\mathbb{1} = 4 \times 4 \text{ Matrix})$$

$$Tr \gamma_\mu = 0 \quad Tr \gamma_5 = 0$$

$$Tr(\text{ungerade} \cdot \gamma\text{- Matrizen}) = 0$$

$$Tr(\gamma_\mu \gamma_\nu) = 4g_{\mu\nu}$$

..... viele weitere Theoreme

(4 Komponenten)

$$(\not{p} - m)u_{(p,s)} = 0$$

$$\bar{u}_{(p,s)}(\not{p} - m) = 0$$

mit adjungiertem Spinor: $\bar{u} = u^\dagger \gamma^0$

$$(\not{p} + m)v_{(p,s)} = 0$$

$$\bar{v}_{(p,s)}(\not{p} + m) = 0$$

$$\vec{s} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$$

$$\lambda = \vec{s} \cdot \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \quad \text{Spin-Komponente parallel } \vec{p}$$

$$u_{\lambda(p)} \text{ mit } \lambda = \pm 1$$

$$\bar{u}_{\lambda(p)} u_{\sigma(p)} = 2m \delta_{\lambda\sigma}$$

$$\bar{v}_{\lambda(p)} v_{\sigma(p)} = -2m \delta_{\lambda\sigma}$$

$$\bar{u}_{\lambda(p)} v_{\sigma(p)} = 0 = \bar{v}_{\lambda(p)} u_{\sigma(p)}$$

Dirac Spinoren:

$E > 0$ Spinor: $u_{(p,s)}$

$E < 0$ Spinor: $v_{(p,s)}$

Spin-Operator:

Helizitätsoperator:

Helizitäts-Eigenzustände:

Normierung:

Vollständigkeits-Relationen: 4x4 Gleichungen

$$\sum_\lambda u_{\lambda(p)} \bar{u}_{\lambda(p)} = \not{p} + m$$

$$\sum_\lambda v_{\lambda(p)} \bar{v}_{\lambda(p)} = \not{p} - m$$

Spinordarstellung:

Sei \vec{p} entlang +z-Achse, Helizität = $\frac{\lambda}{2}$

$$u_{\lambda(p)} = \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} \chi_\lambda \\ \frac{2\lambda|\vec{p}|}{E+m} \chi_\lambda \end{pmatrix}$$

$$\text{mit } \chi_{+1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_{-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Anti-Teilchen:

$$v_{\lambda(p)} = -\lambda \gamma^5 u_{-\lambda(p)}$$