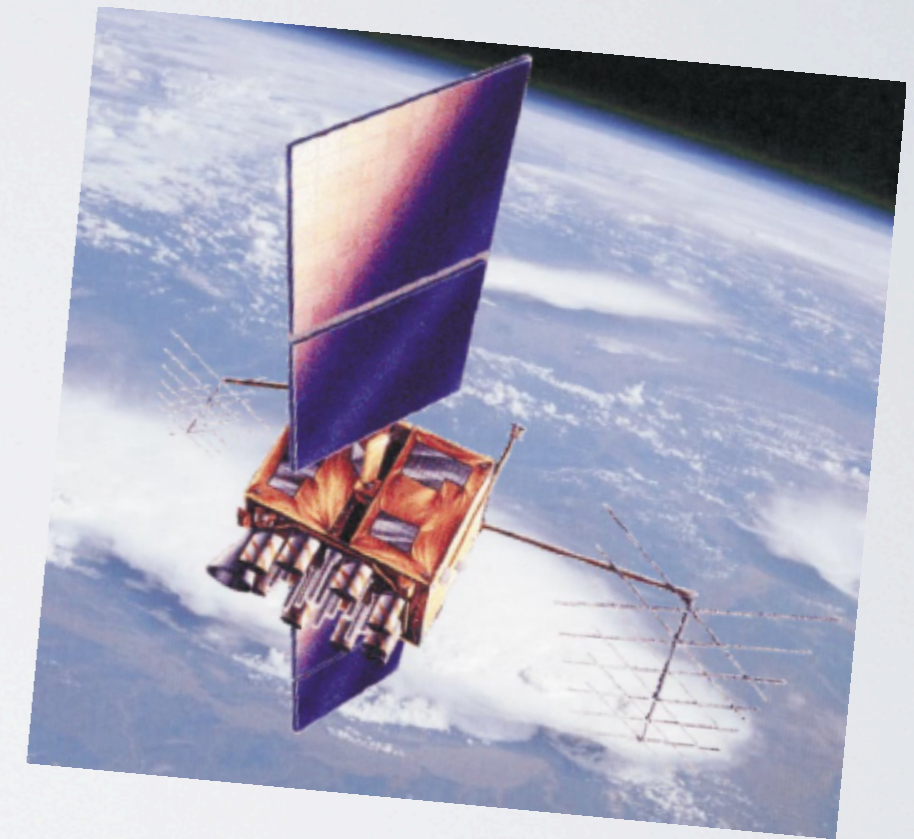
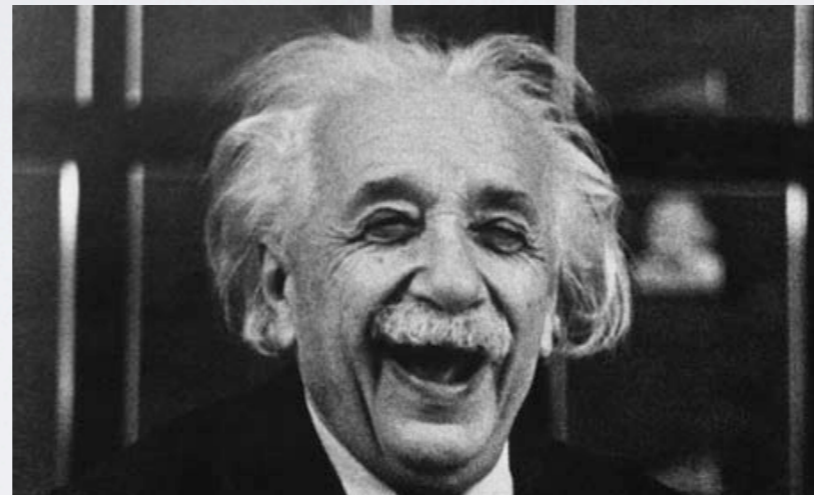


# Warum findet mein Smartphone ohne Einstein seinen Weg nicht!?



Jürgen R. Reuter, DESY





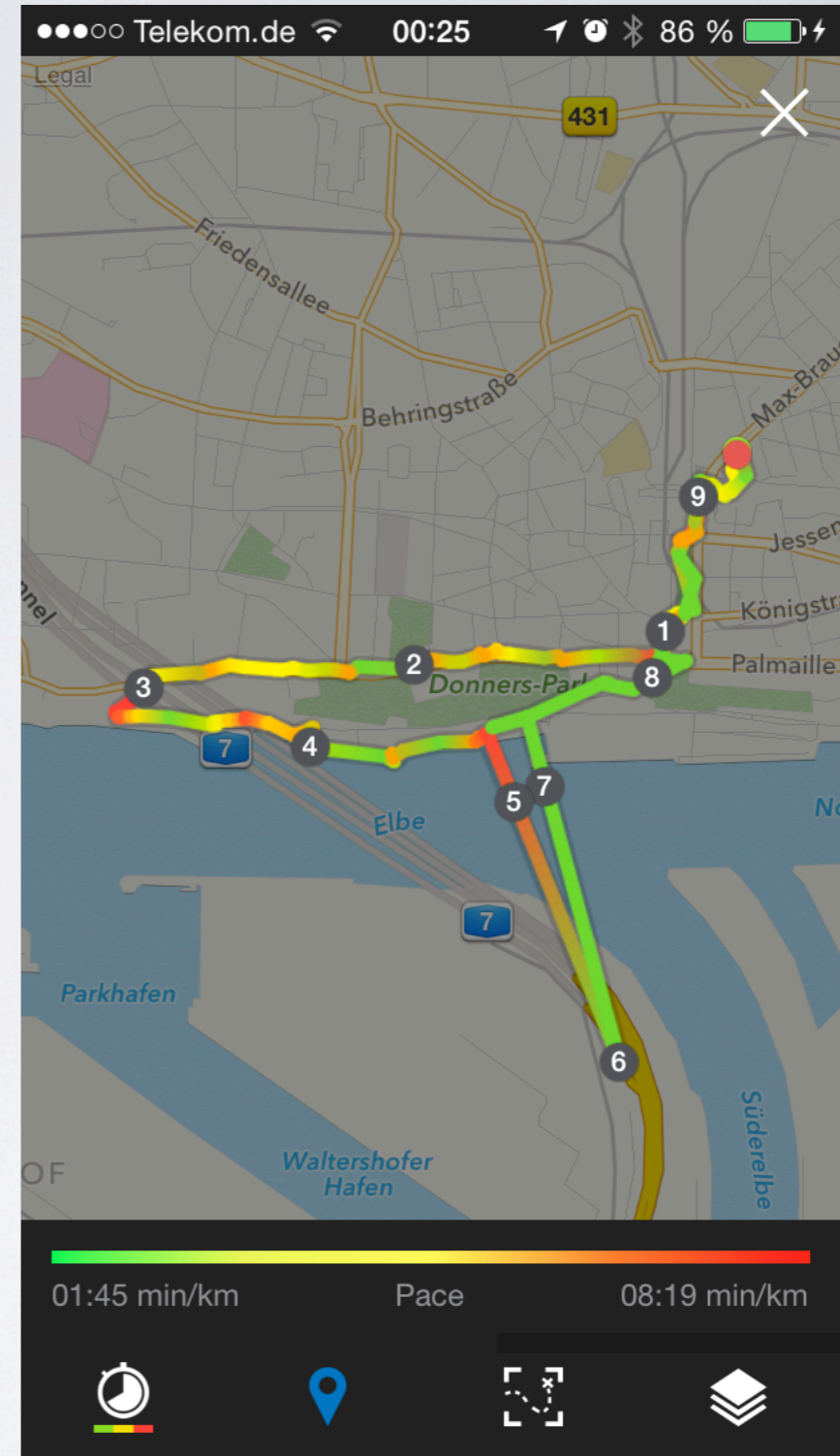
# ALLTAG: (GPS-)NAVIGATION MIT IPHONE

- Smartphone enthält GPS-Empfänger
- Positionsbestimmung meist auf 10-30 m genau
- Was ist eigentlich GPS?
- Wie funktioniert das?
- Wie kann das so exakt sein?
- Wieso Einstein?



# ALLTAG: (GPS-)NAVIGATION MIT IPHONE

- Smartphone enthält GPS-Empfänger
- Positionsbestimmung meist auf 10-30 m genau
- Was ist eigentlich GPS?
- Wie funktioniert das?
- Wie kann das so exakt sein?
- Wieso Einstein?





# SATELLITEN-NAVIGATION



# SATELLITEN-NAVIGATION

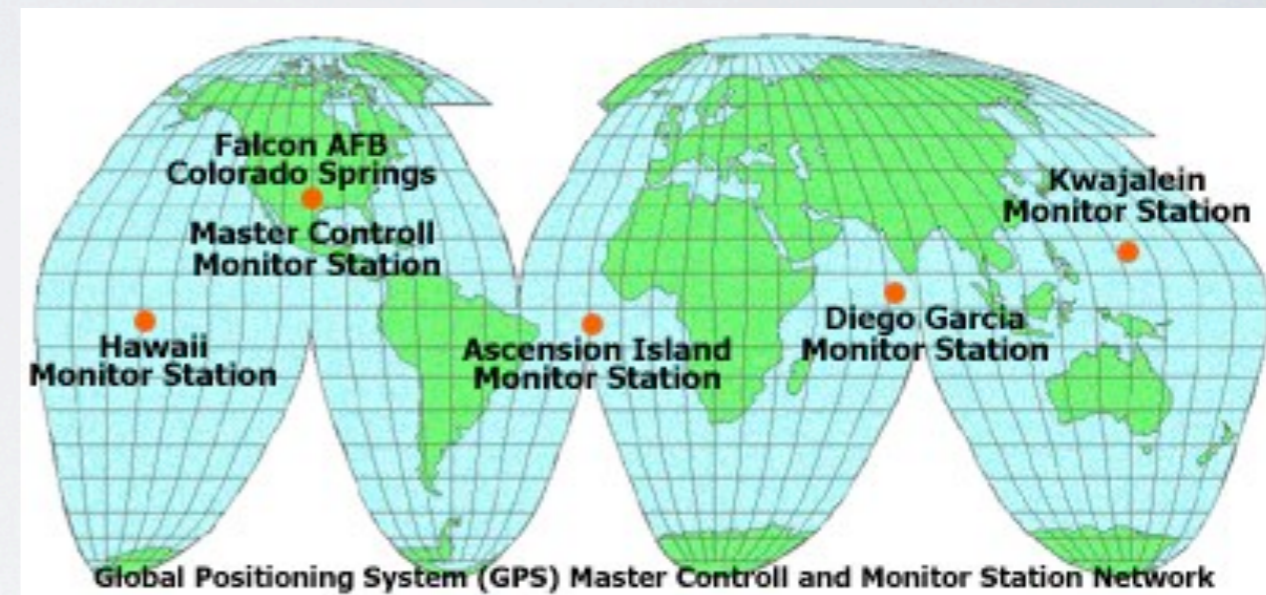
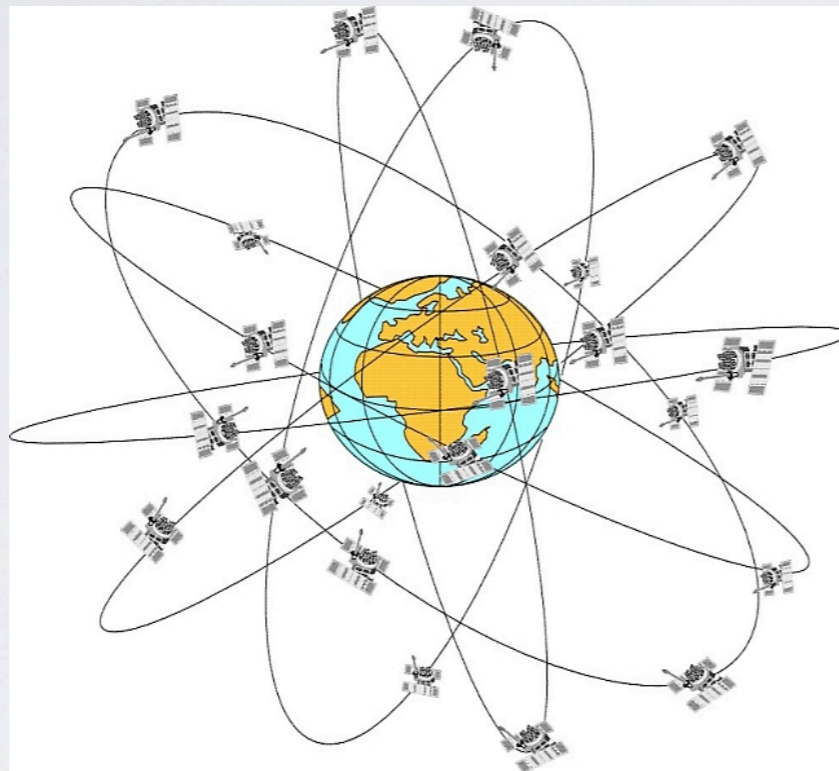
- 3(+1) funktionierende Systeme: GPS (1994), GLONASS (1995), Compass/Beidou (2010), Galilei (2020?)



# SATELLITEN-NAVIGATION

- 3(+1) funktionierende Systeme: GPS (1994), GLONASS (1995), Compass/Beidou (2010), Galilei (2020?)
- **3 wesentliche Komponenten:**

★ **Space Segment** 20-30 Satelliten, 6 Ebenen



★ **Control Segment** Satelliten-Kontrollstationen, Update Bahndaten, Synchronisation der Satelliten-Uhren

★ **User Segment** GPS-Empfänger erhält Navigations- und Zeitdaten  
⇒ Positions- und Zeitdaten auf der Erde







Ascension



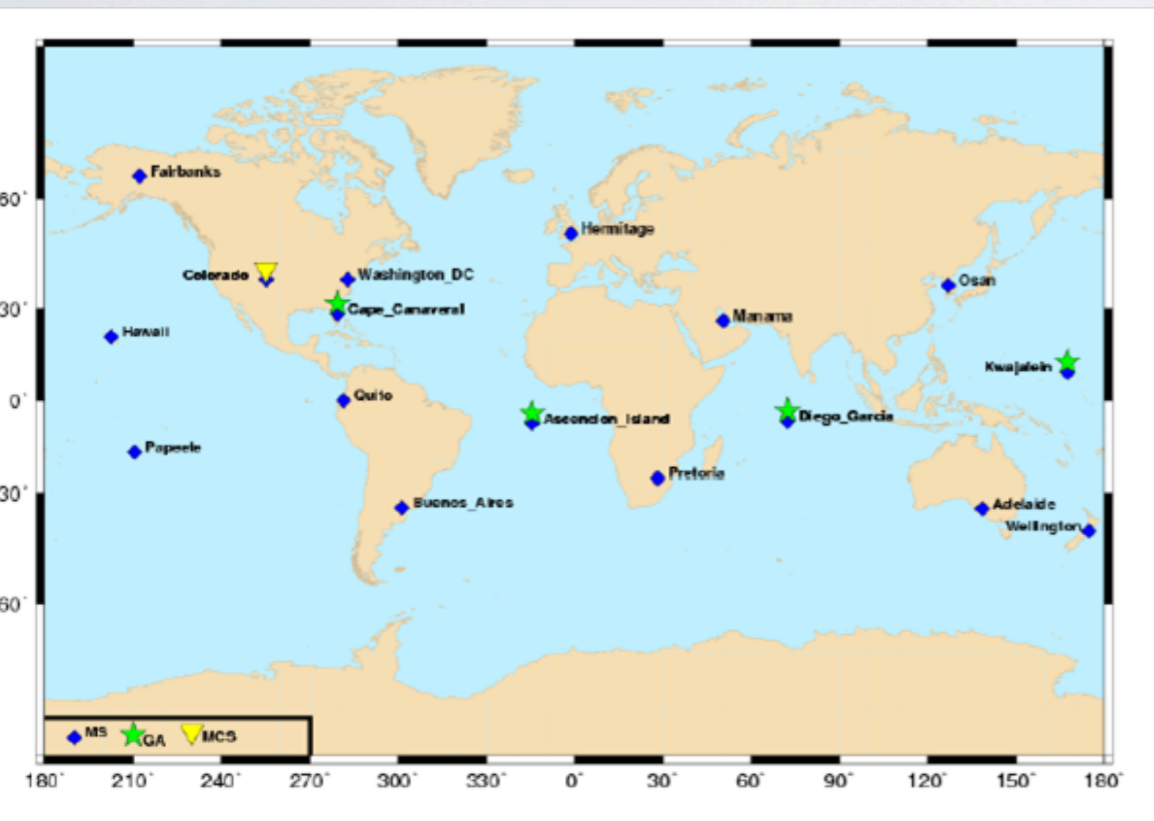
Diego Garcia



Kwajalein



Schriever  
AFB, Colorado







Ascension



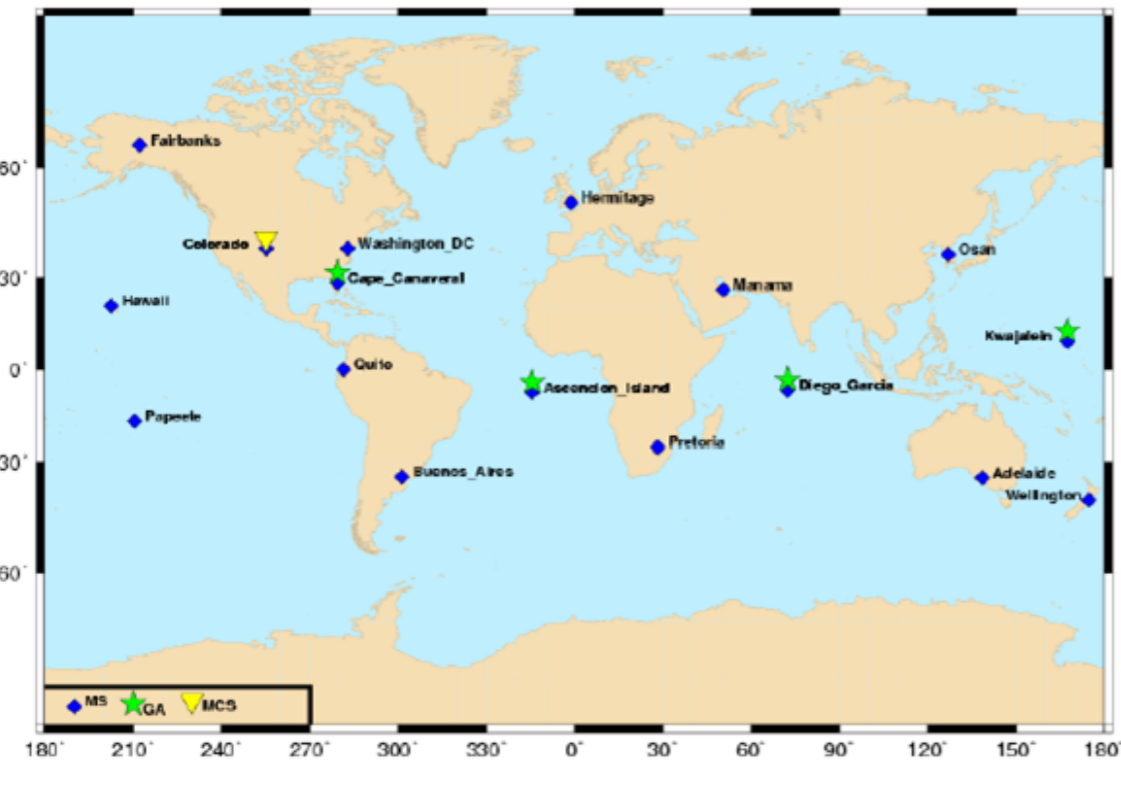
Diego Garcia



Kwajalein



12 new stations  
2001-2006



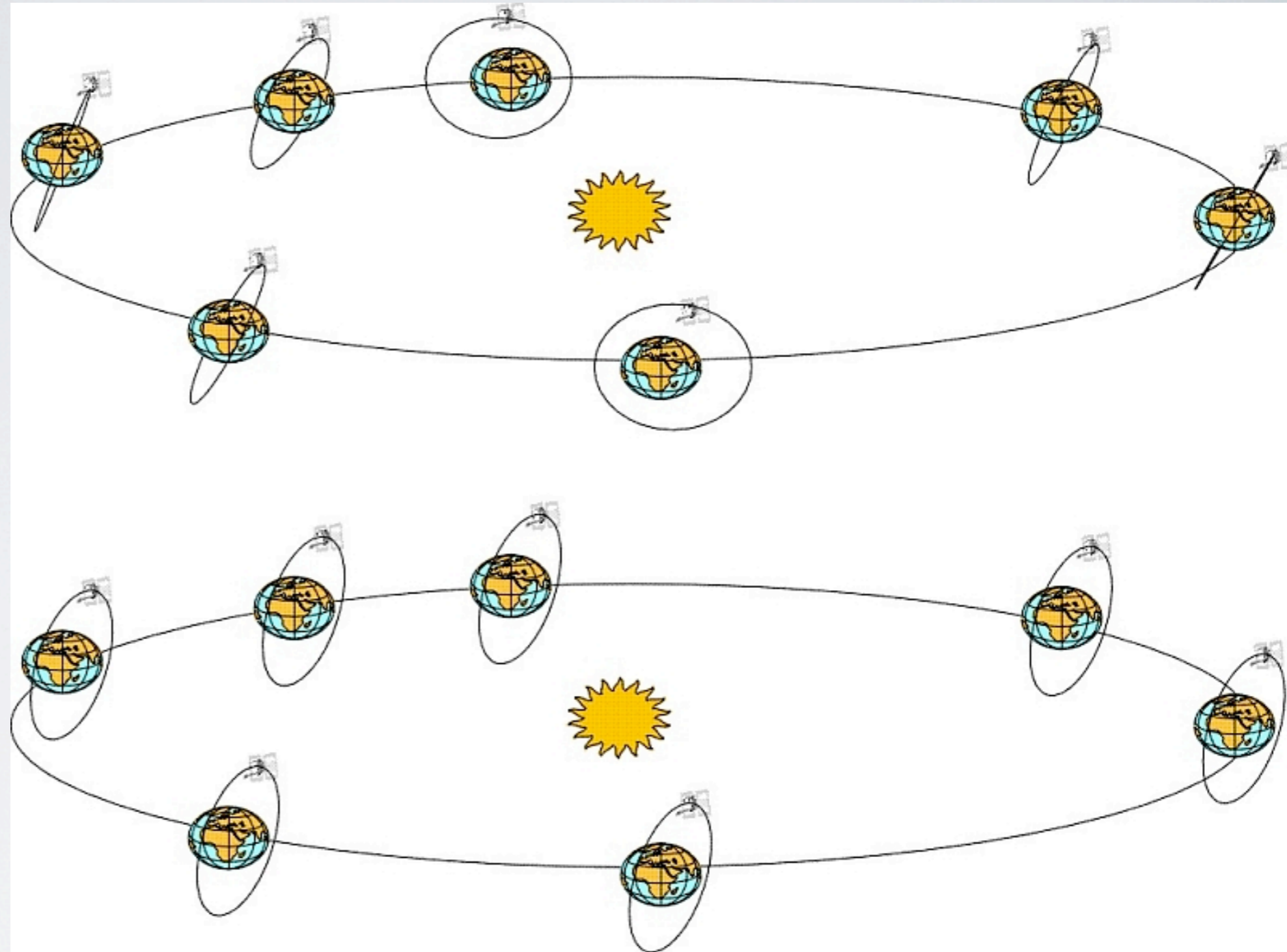
Schriever  
AFB, Colorado





# SATELLITEN-BAHN

- ★ Umlaufzeit: 11 hrs 58 min
- ★ korrigiert Drehung der Erde um die Sonne
- ★ 4 min / Tag  $\times$  365 Tage  
 $\Rightarrow$  Bahn bleibt fix zur Sonne
- ★ Nachteil: Resonanzen mit Erdgravitation
- ★ Neue Satelliten daher vermutlich 12 Stunden

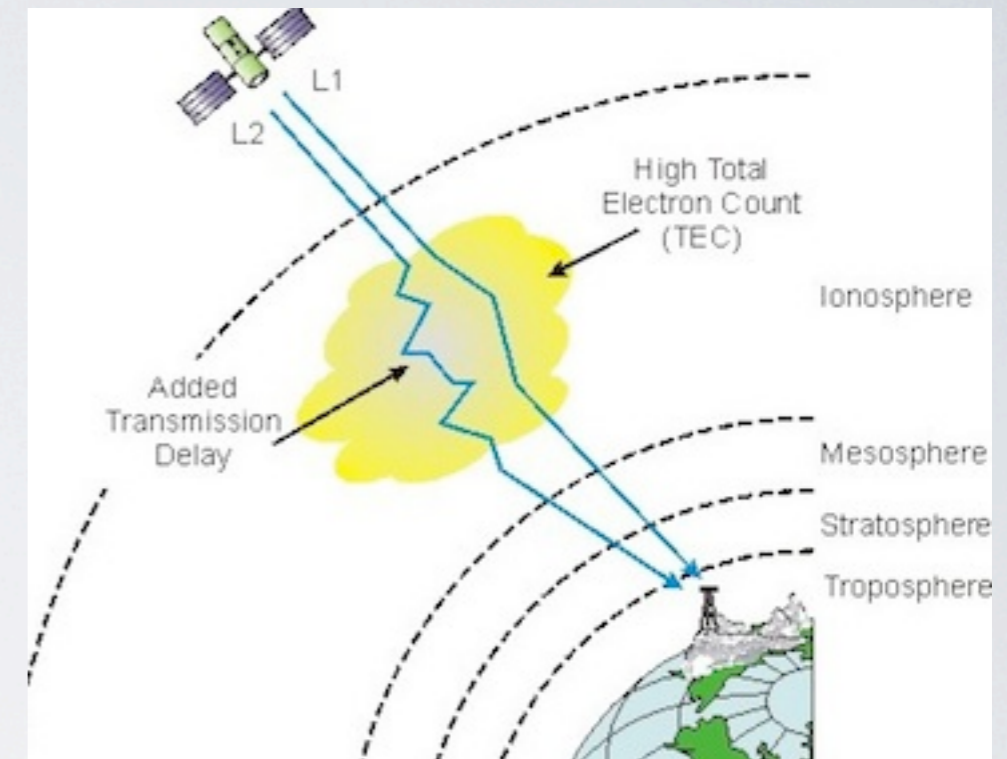




# SATELLITEN-KOMMUNIKATION

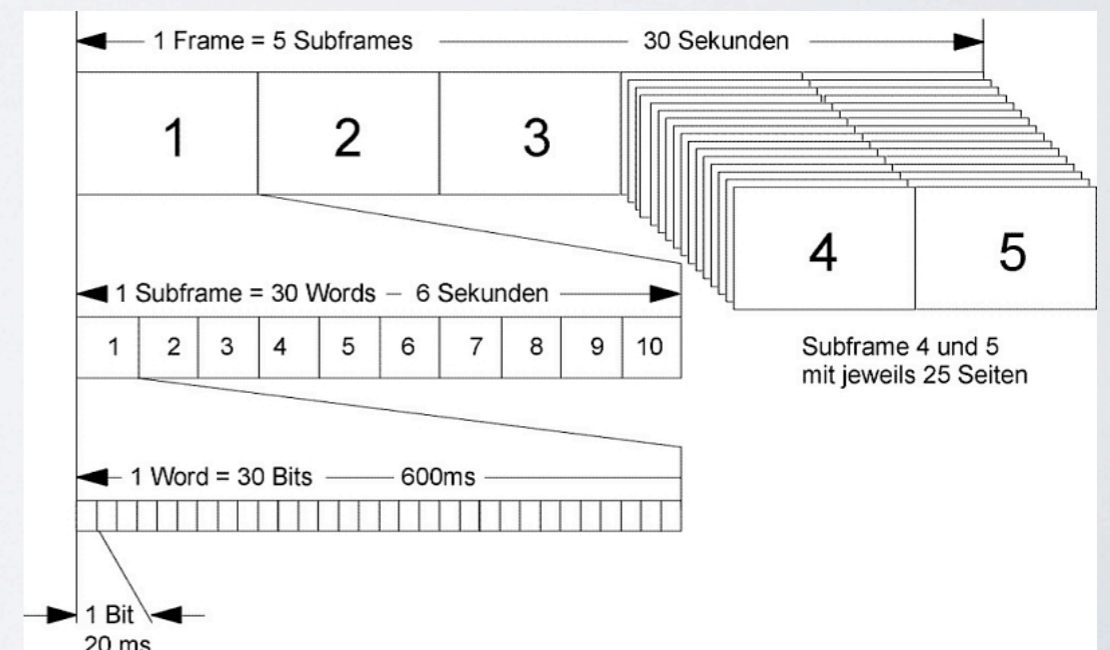
**Satelliten senden Daten:** 50 Hz-Rate, nur 1500 Bit pro Datensatz (!), auf 2 Frequenzen

1. Transmissionszeit von Satelliten-Atomuhren (!)
2. Momentanes Bahnsegment (“satellite ephemeris data”)
3. Satelliten-Uhr-Synchronisation (“clock offset”)
4. Bahndaten anderer Satelliten
5. Information zur Signalübertragung (Ionosphären-Effekt)
6. Kontrollinformation (“signal health status”)



**2 Sendefrequenzen (Redundanz!)**  
1575,42 MHz (L1-Band), 1227,60 MHz (L2-Band)

**2 Modulationen:**  
1,023 MHz (C/A-Band) und 10,23 MHz (P(Y)-Code)  
C/A = Coarse Acquisition, P = Precise, Y → verschlüsselt





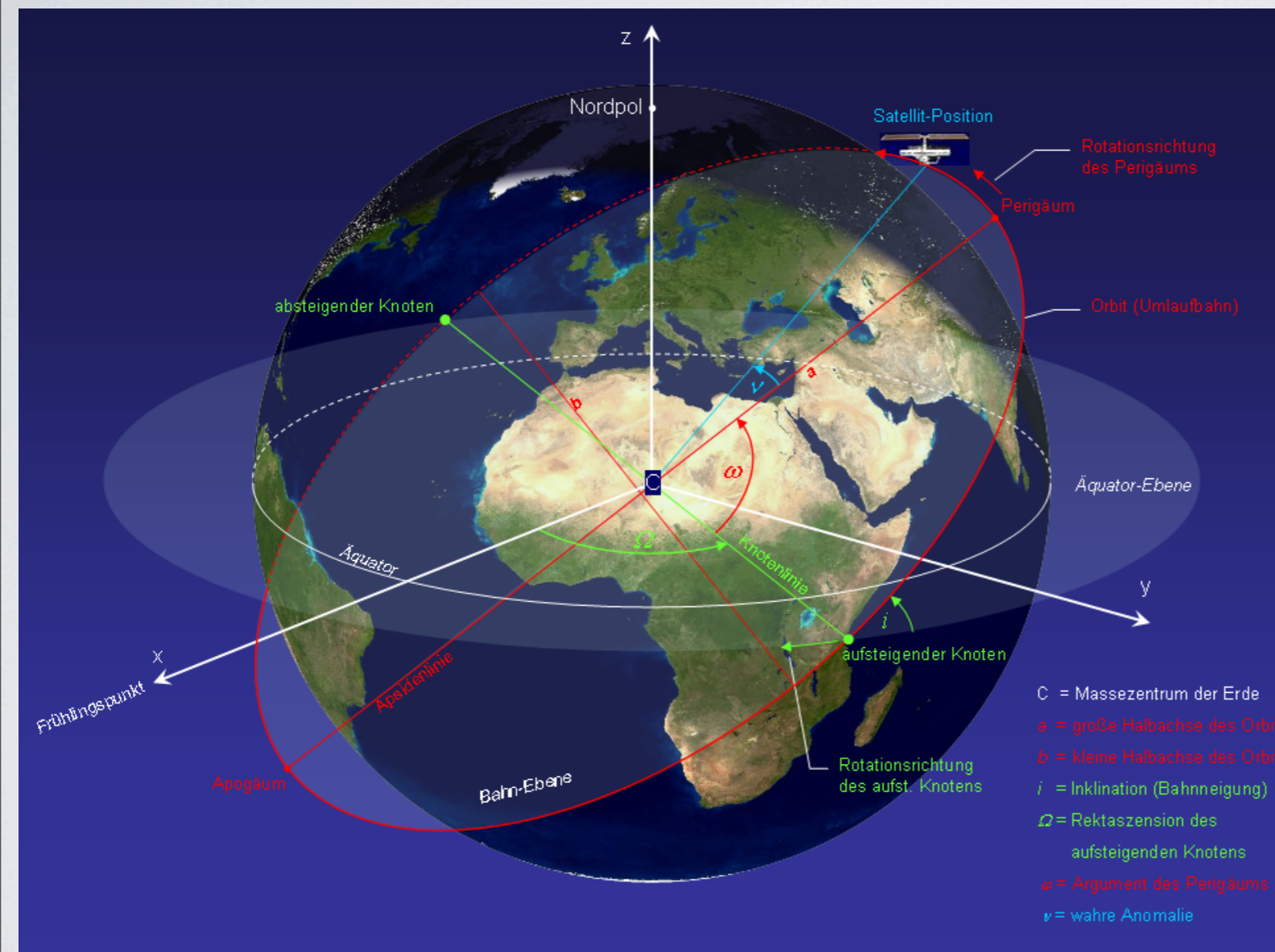
# SATELLITEN-BAHNDATEN

## Newton-Ellipse: 6 Parameter

- große Ellipsenhalbachse  $a$
- Exzentrizität der Ellipse

$$\varepsilon = \frac{r_{max} - r_{min}}{r_{max} + r_{min}}$$

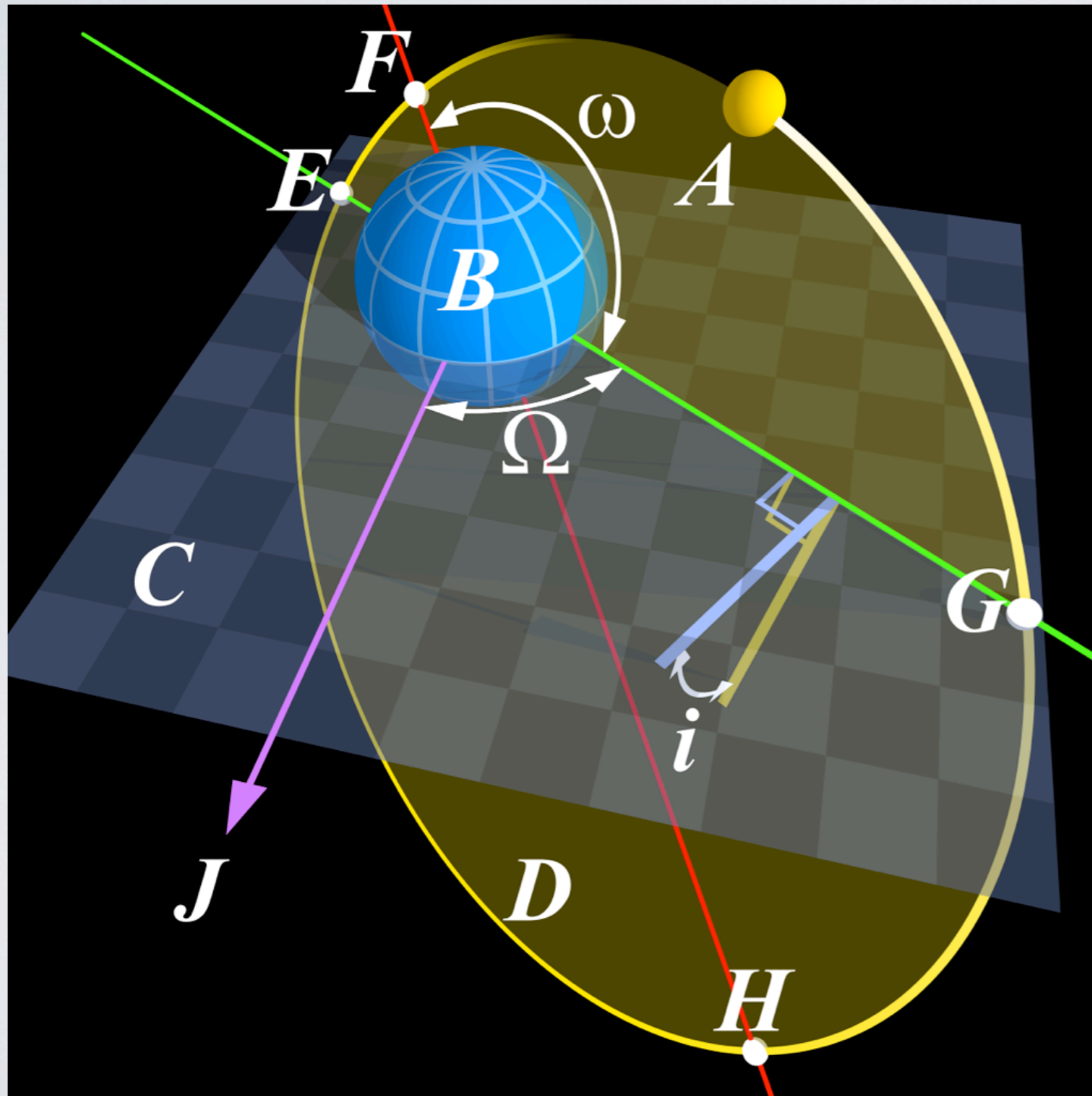
- Periapsiswinkel  $\omega$
- Neigung (Inklination)  $i$  zur Äquatorebene
- Winkel zur Knotenlinie  $\Omega$
- wahre Anomalie zum Zeitnullpunkt  $v$





# SATELLITEN-BAHNDATEN

## Newton-Ellipse: 6 Parameter



- große Ellipsenhalbachse  $a$
- Exzentrizität der Ellipse

$$\varepsilon = \frac{r_{max} - r_{min}}{r_{max} + r_{min}}$$

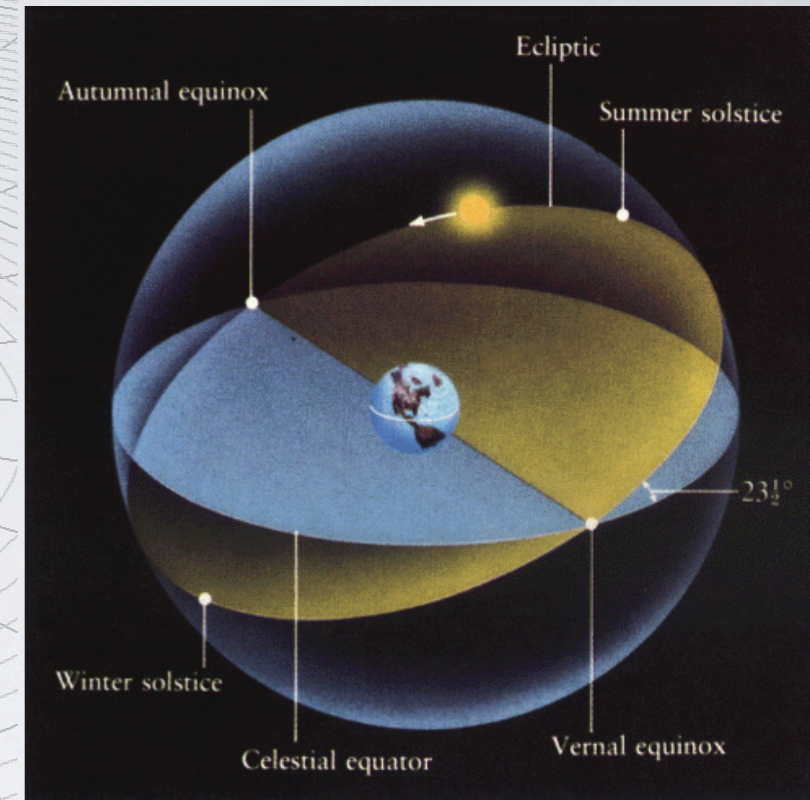
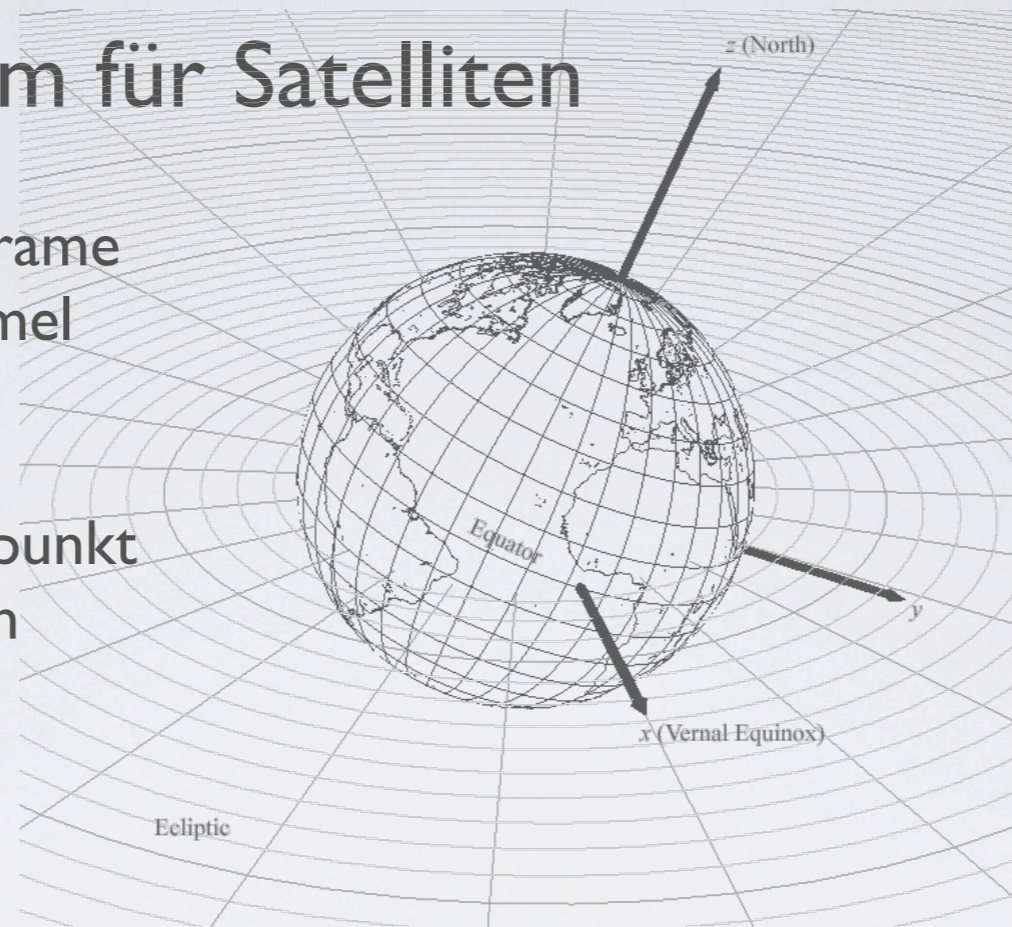
- Periapsiswinkel  $\omega$
- Neigung (Inklination)  $i$  zur Äquatorebene
- Winkel zur Knotenlinie  $\Omega$
- wahre Anomalie zum Zeitnullpunkt  $v$



# KOORDINATEN-BESCHREIBUNG

## GPS-Koordinatensystem für Satelliten

- ◆ ECI: Earth-Centered Inertial Frame
- ◆ fixiert gegenüber Fixsternhimmel
- ◆ nicht-rotierend
- ◆ z-Achse: Erddrehachse
- ◆ x-Achse: Richtung Äquinoktialpunkt
- ◆ zeitinvariant (leichte Störungen durch Mond, Sonne, Jupiter)

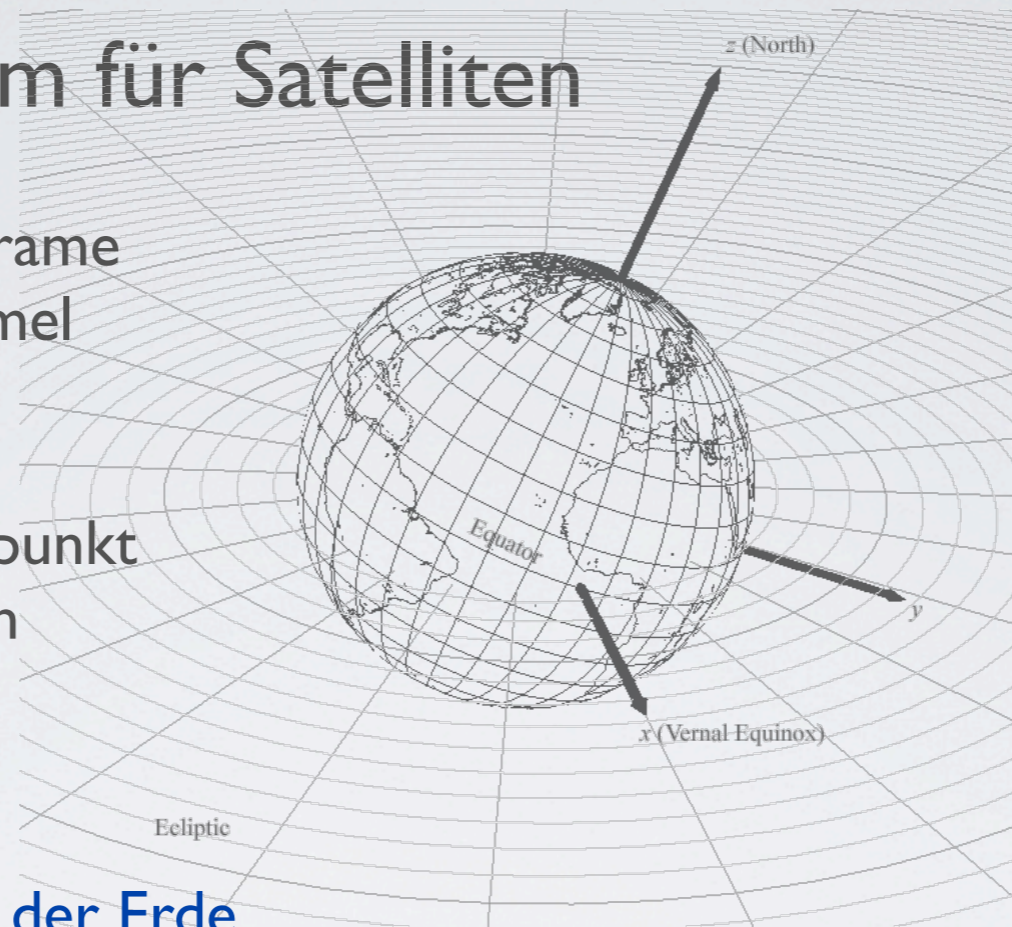




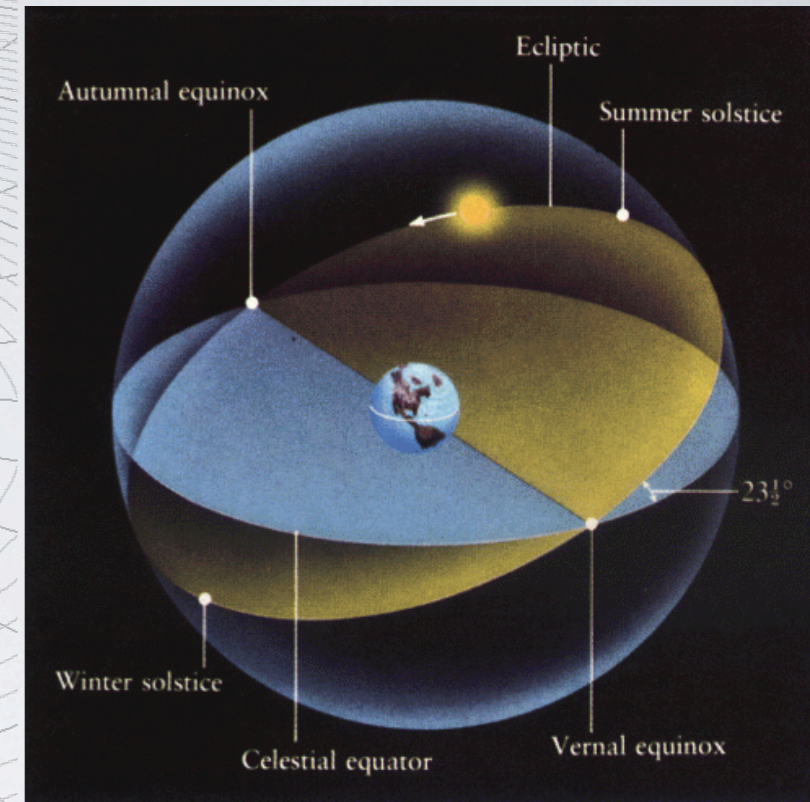
# KOORDINATEN-BESCHREIBUNG

## GPS-Koordinatensystem für Satelliten

- ◆ ECI: Earth-Centered Inertial Frame
- ◆ fixiert gegenüber Fixsternhimmel
- ◆ nicht-rotierend
- ◆ z-Achse: Erddrehachse
- ◆ x-Achse: Richtung Äquinoktialpunkt
- ◆ zeitinvariant (leichte Störungen durch Mond, Sonne, Jupiter)



ungeeignet zur Beschreibung auf der Erde

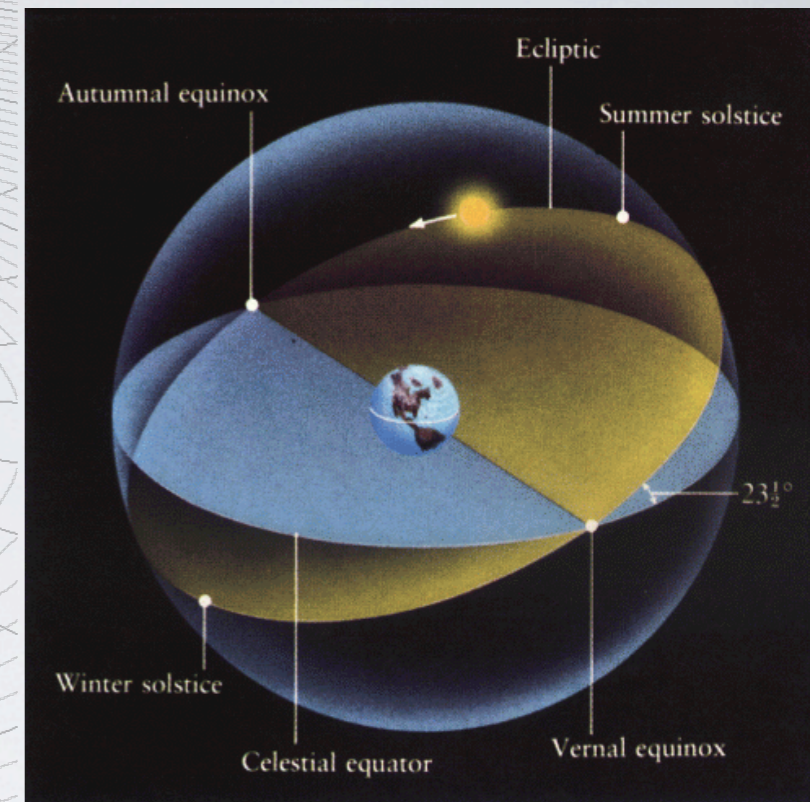
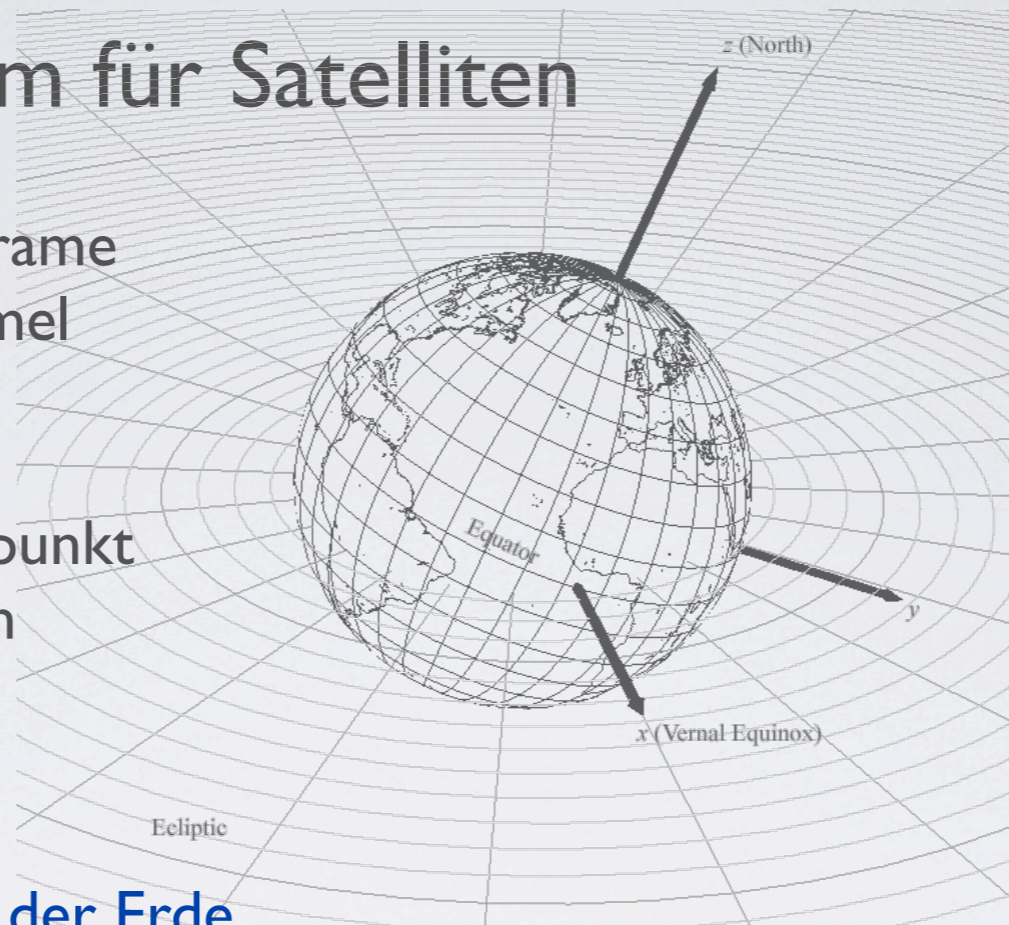




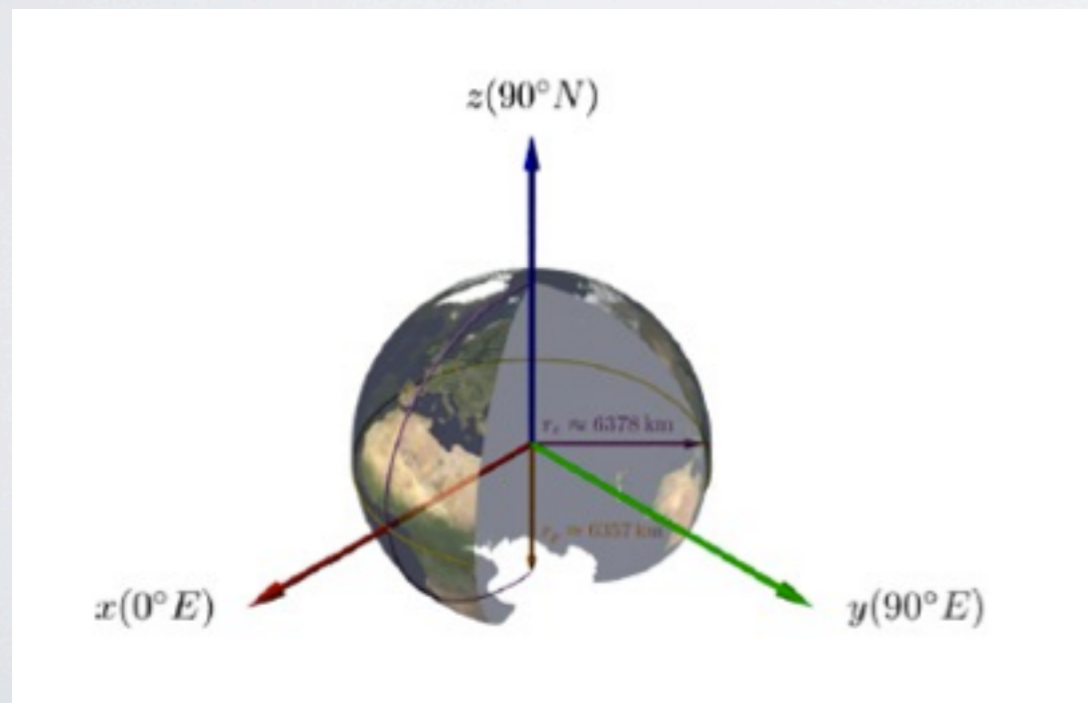
# KOORDINATEN-BESCHREIBUNG

## GPS-Koordinatensystem für Satelliten

- ◆ ECI: Earth-Centered Inertial Frame
- ◆ fixiert gegenüber Fixsternhimmel
- ◆ nicht-rotierend
- ◆ z-Achse: Erddrehachse
- ◆ x-Achse: Richtung Äquinoktialpunkt
- ◆ zeitinvariant (leichte Störungen durch Mond, Sonne, Jupiter)



ungeeignet zur Beschreibung auf der Erde



## Koordinatensystem auf der Erde

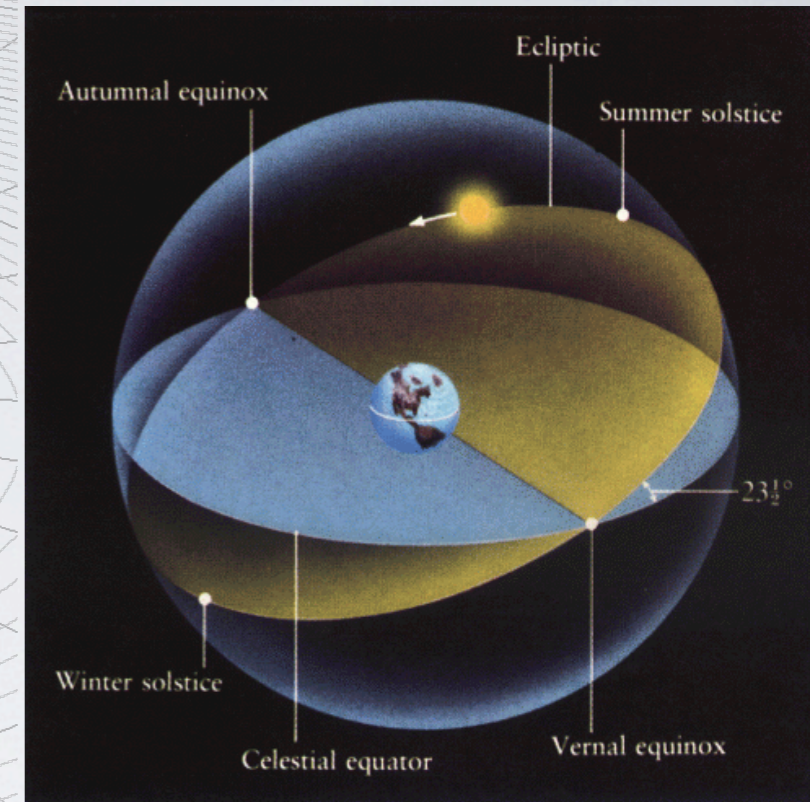
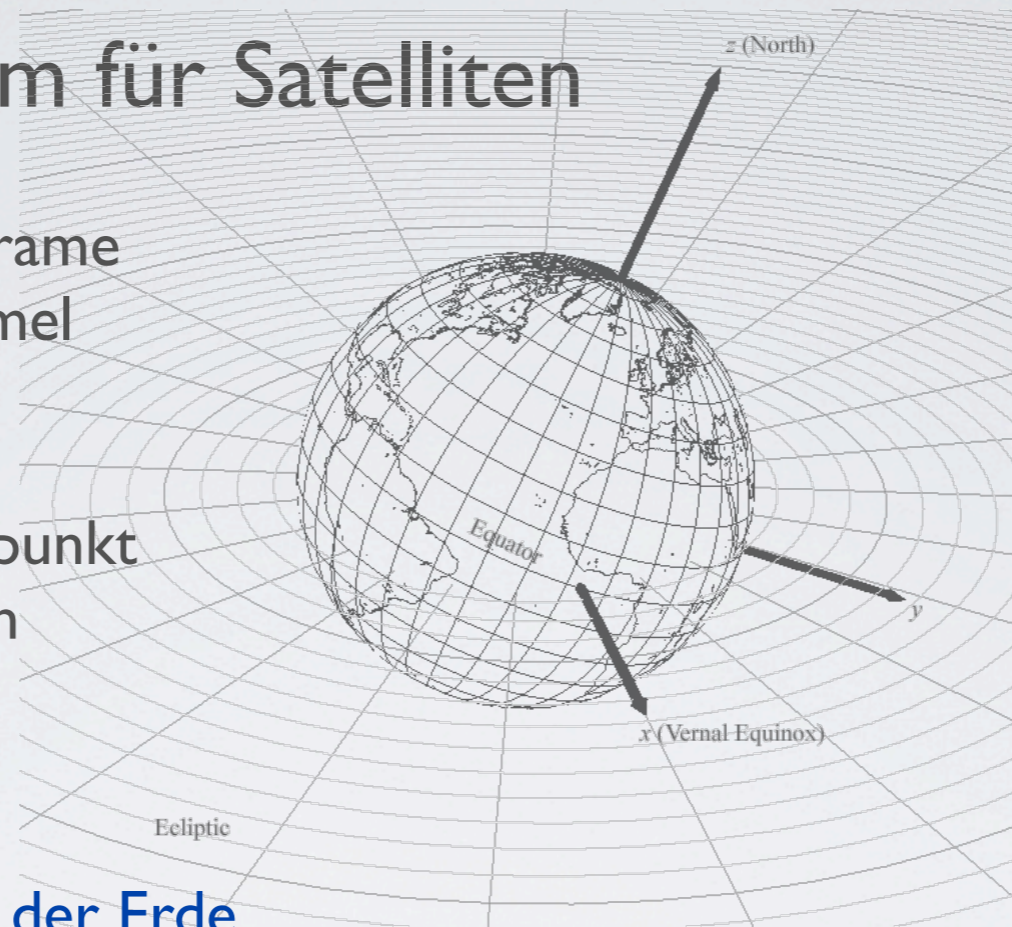
- \* ECEF: Earth-Centered Earth-Fixed Frame
- \* Beobachter auf der Erde hat feste Koordinaten
- \* WGS84: Definition des Erd-"Geoids"
- \* ECEF rotiert um ECI:  $\omega_{\oplus} = 0.004178^{\circ}/s$
- \* GPS-Gerät rechnet ECI in ECEF um !



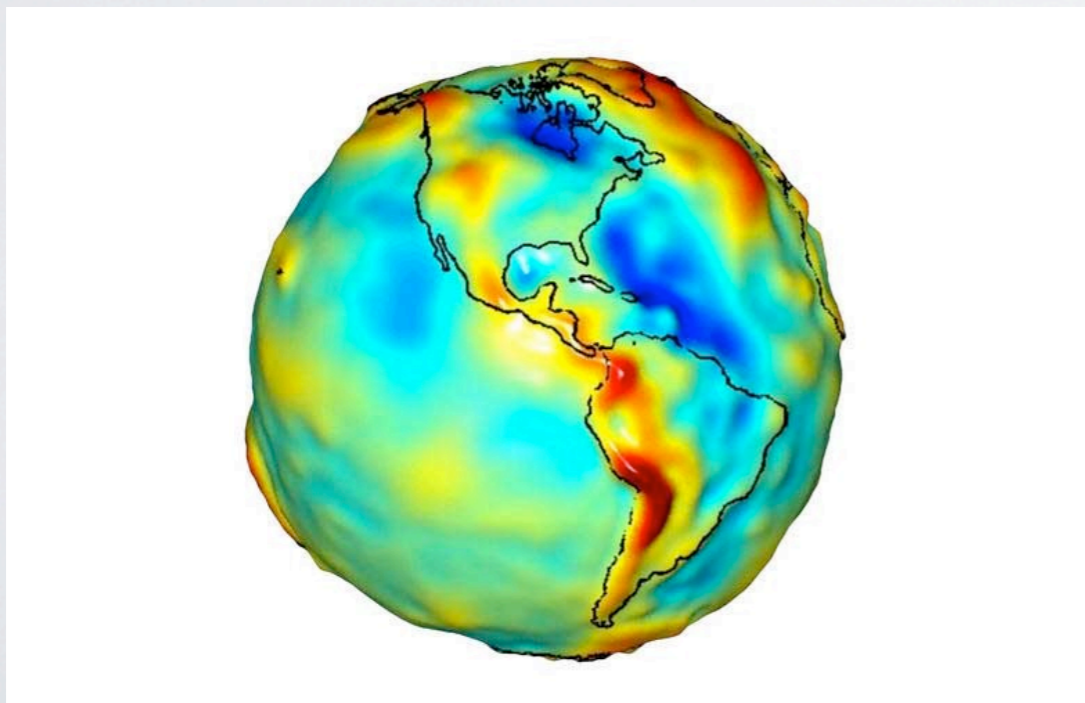
# KOORDINATEN-BESCHREIBUNG

## GPS-Koordinatensystem für Satelliten

- ◆ ECI: Earth-Centered Inertial Frame
- ◆ fixiert gegenüber Fixsternhimmel
- ◆ nicht-rotierend
- ◆ z-Achse: Erddrehachse
- ◆ x-Achse: Richtung Äquinoktialpunkt
- ◆ zeitinvariant (leichte Störungen durch Mond, Sonne, Jupiter)



ungeeignet zur Beschreibung auf der Erde



## Koordinatensystem auf der Erde

- \* ECEF: Earth-Centered Earth-Fixed Frame
- \* Beobachter auf der Erde hat feste Koordinaten
- \* WGS84: Definition des Erd-"Geoids"
- \* ECEF rotiert um ECI:  $\omega_{\oplus} = 0.004178^{\circ}/s$
- \* GPS-Gerät rechnet ECI in ECEF um !



# POSITIONSBERECHNUNG?

Abstandsmessung durch Messung von Zeitdifferenzen und Laufzeiten

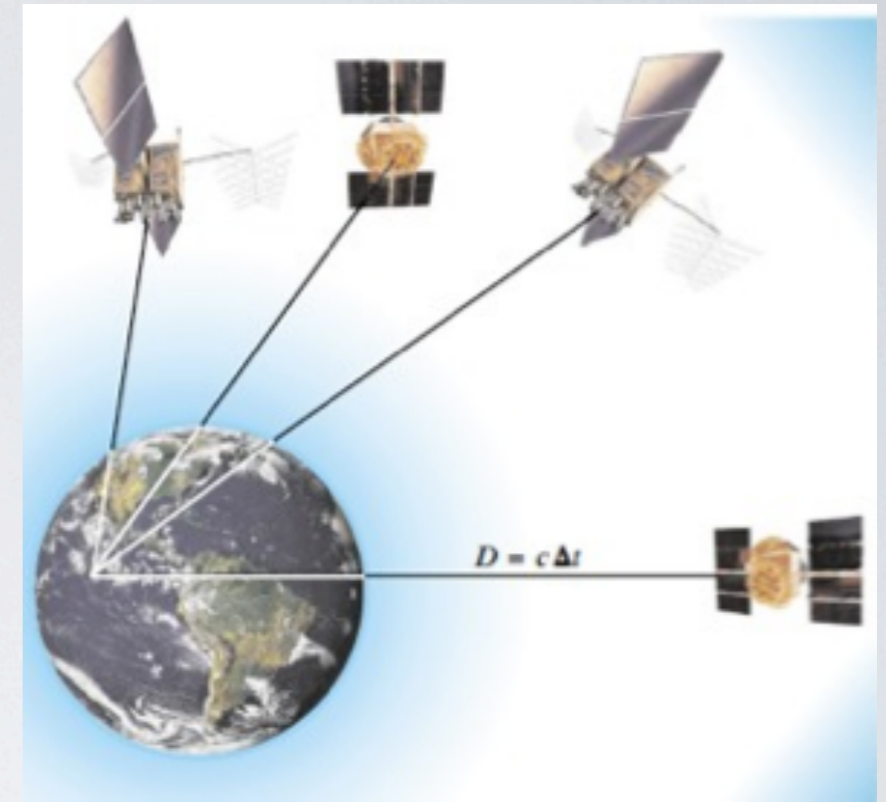
Lichtgeschwindigkeit

$$\|\vec{r} - \vec{r}_i\| = d_i = c \cdot (t - t_i)$$

**3 Unbekannte:  
GPS-Koordinaten**

Satellitenort: aus  
Satelliten-Bahndaten

Satellitenzeit: aus  
Signal





# POSITIONSBERECHNUNG?

Abstandsmessung durch Messung von Zeitdifferenzen und Laufzeiten

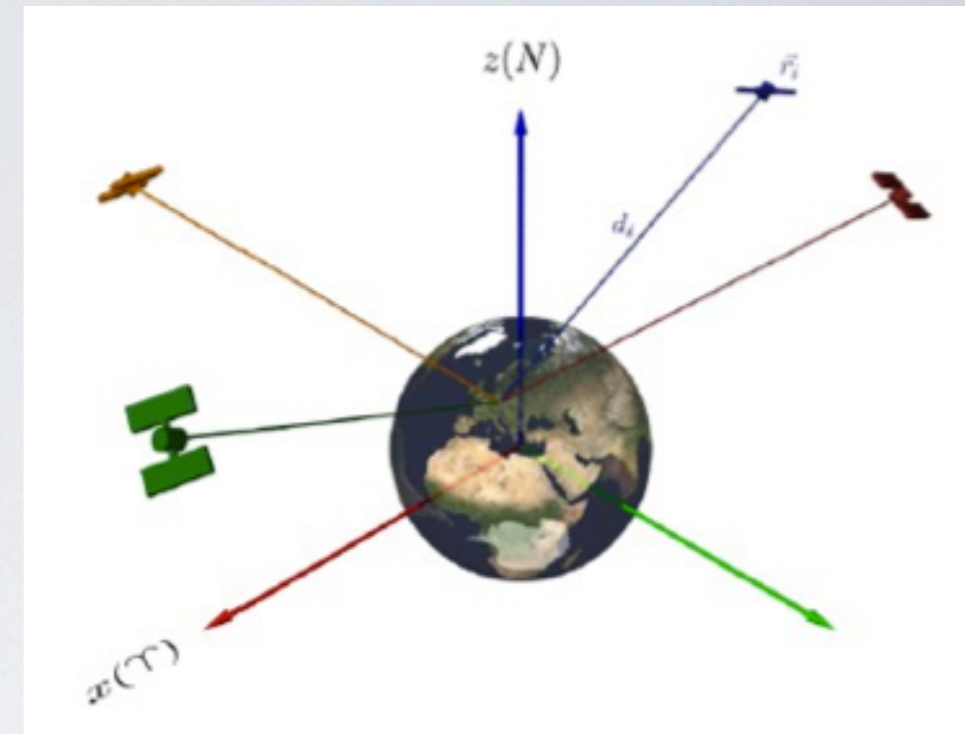
Lichtgeschwindigkeit

$$\|\vec{r} - \vec{r}_i\| = d_i = c \cdot (t - t_i)$$

**3 Unbekannte:  
GPS-Koordinaten**

Satellitenort: aus  
Satelliten-Bahndaten

Satellitenzeit: aus  
Signal



## Problem: Synchronisation GPS-/Satellitenuhr

**Offset GPS-/Satellitenuhr:**  $t = \tau + \Delta$

4 Unbekannte (3 Koord. + Offset)  $\Rightarrow$  4 Satelliten



# POSITIONSBERECHNUNG?

Abstandsmessung durch Messung von Zeitdifferenzen und Laufzeiten

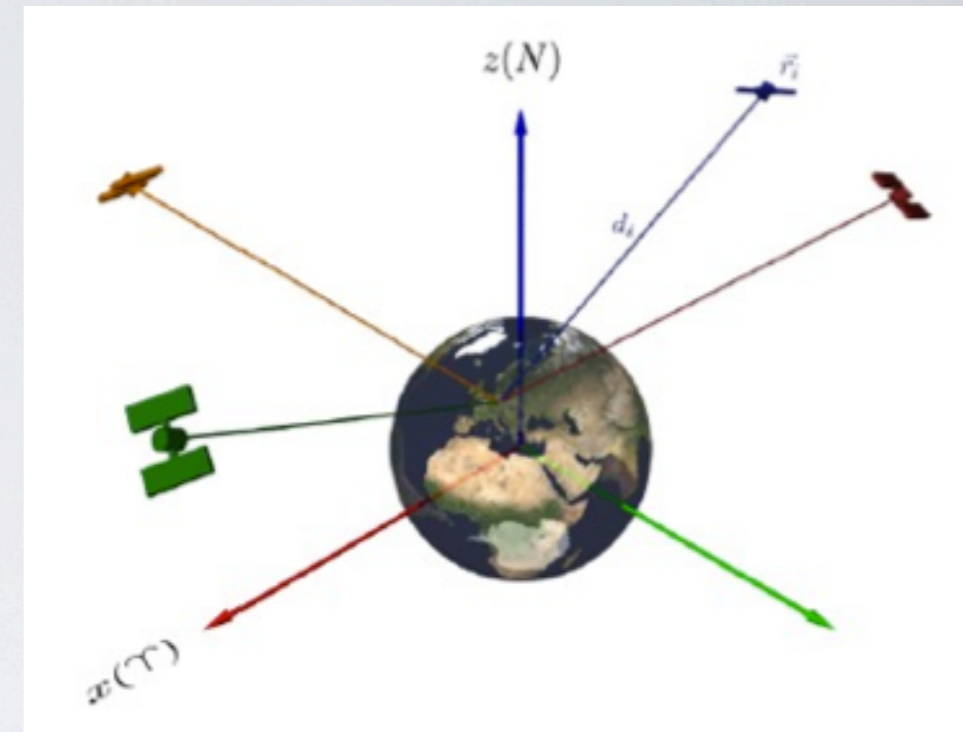
Lichtgeschwindigkeit

$$\|\vec{r} - \vec{r}_i\| = d_i = c \cdot (t - t_i)$$

**3 Unbekannte:  
GPS-Koordinaten**

Satellitenort: aus  
Satelliten-Bahndaten

Satellitenzeit: aus  
Signal



## Problem: Synchronisation GPS-/Satellitenuhr

**Offset GPS-/Satellitenuhr:**  $t = \tau + \Delta$

4 Unbekannte (3 Koord. + Offset)  $\Rightarrow$  4 Satelliten

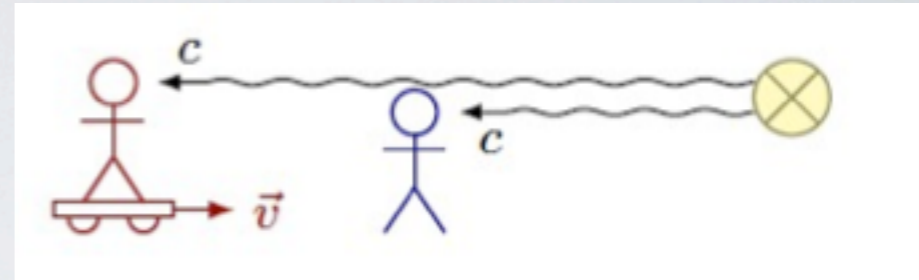
1. Messe bei fester Zeit Abstände
2. Korrekturen: Satellitenuhren-Offset, Ionosphären- und Exzentrizitätskorrektur
3. GPS berechnet ECEF-Satellitenposition
4. Wähle ECI, konvertiere Satellitenposition
5. Löse die Gleichungen
6. Konvertiere GPS-Position zurück nach ECEF
7. Umrechnung in Länge, Breite, Höhe



# SPEZIELLE RELATIVITÄTSTHEORIE

**Prinzip I:** Lichtgeschwindigkeit  $c$  ist konstant, unabhängig vom Bewegungszustand des Beobachters

Albert Einstein, 1905



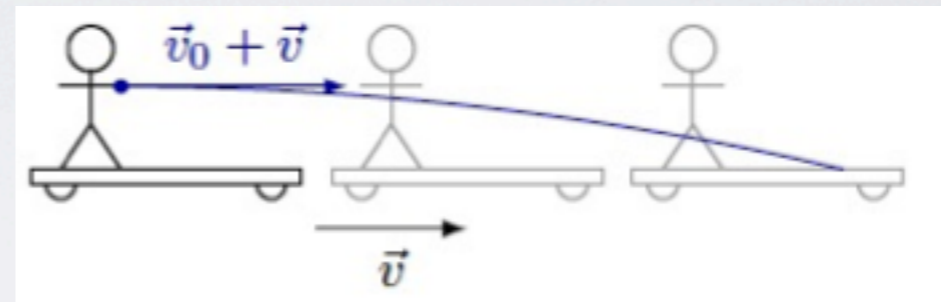
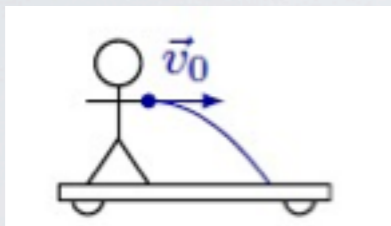
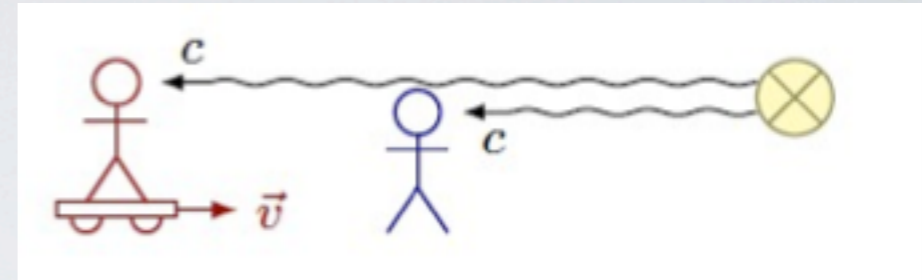


# SPEZIELLE RELATIVITÄTSTHEORIE

**Prinzip 1:** Lichtgeschwindigkeit  $c$  ist konstant, unabhängig vom Bewegungszustand des Beobachters

Albert Einstein, 1905

**Prinzip 2:** Physikalische Gesetze sind identisch für Beobachter, die sich gegeneinander mit konstanter Geschwindigkeit bewegen



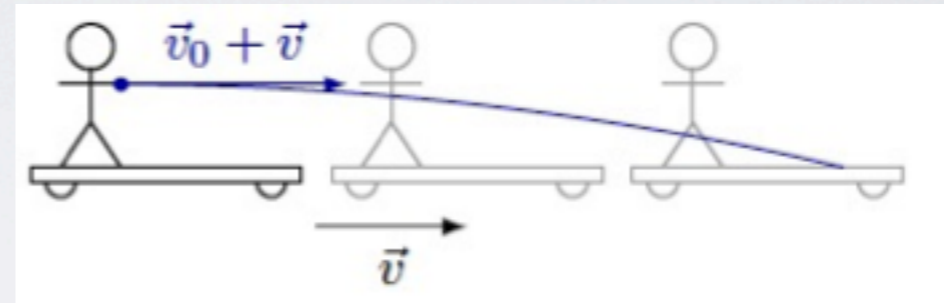
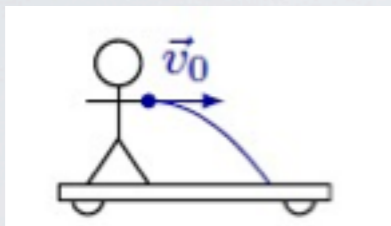
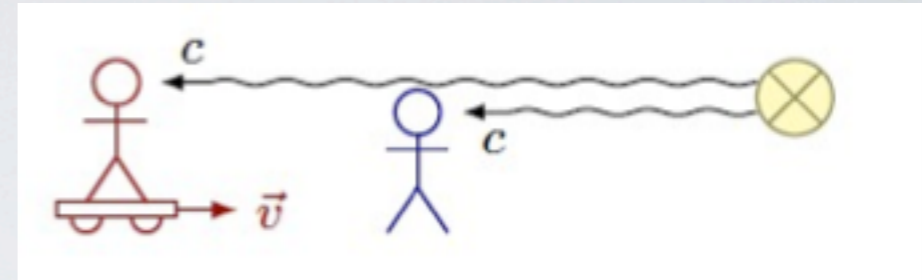


# SPEZIELLE RELATIVITÄTSTHEORIE

**Prinzip 1:** Lichtgeschwindigkeit  $c$  ist konstant, unabhängig vom Bewegungszustand des Beobachters

Albert Einstein, 1905

**Prinzip 2:** Physikalische Gesetze sind identisch für Beobachter, die sich gegeneinander mit konstanter Geschwindigkeit bewegen



Synchronisation von Uhren: keine globale Gleichzeitigkeit

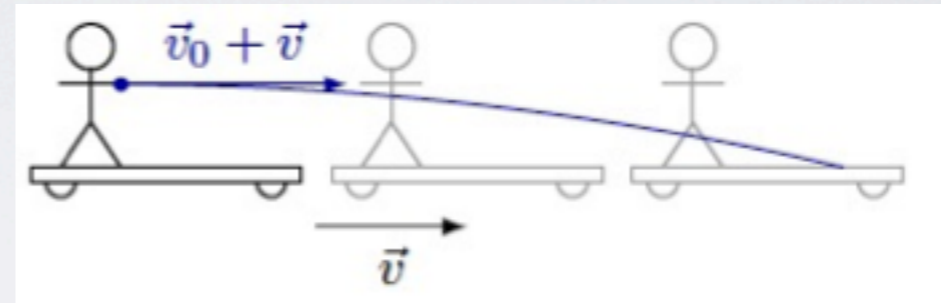
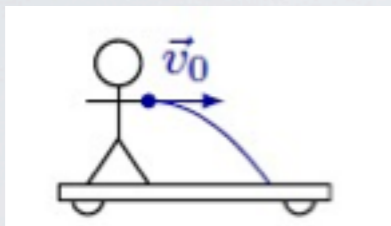
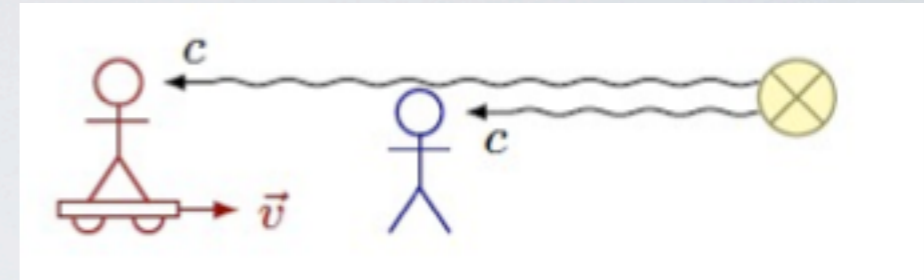


# SPEZIELLE RELATIVITÄTSTHEORIE

**Prinzip 1:** Lichtgeschwindigkeit  $c$  ist konstant, unabhängig vom Bewegungszustand des Beobachters

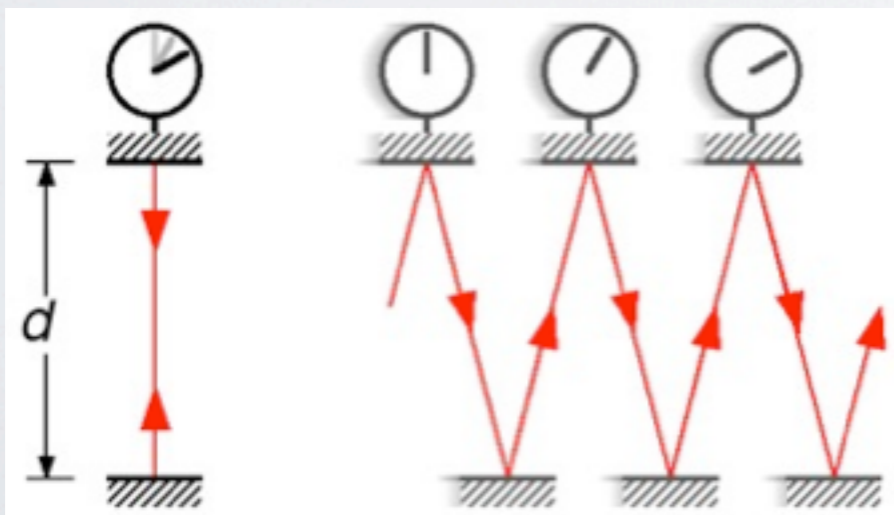
Albert Einstein, 1905

**Prinzip 2:** Physikalische Gesetze sind identisch für Beobachter, die sich gegeneinander mit konstanter Geschwindigkeit bewegen



Synchronisation von Uhren: keine globale Gleichzeitigkeit

## Zeitdilatation

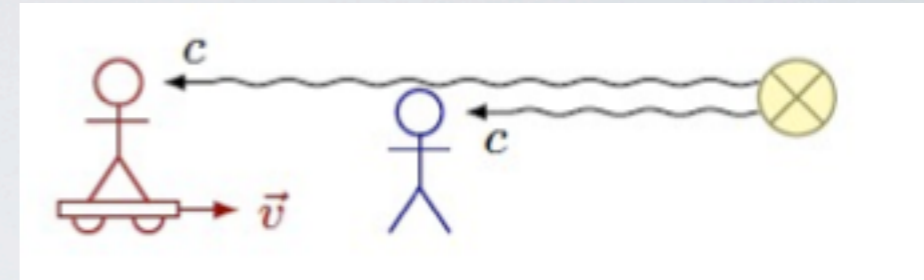




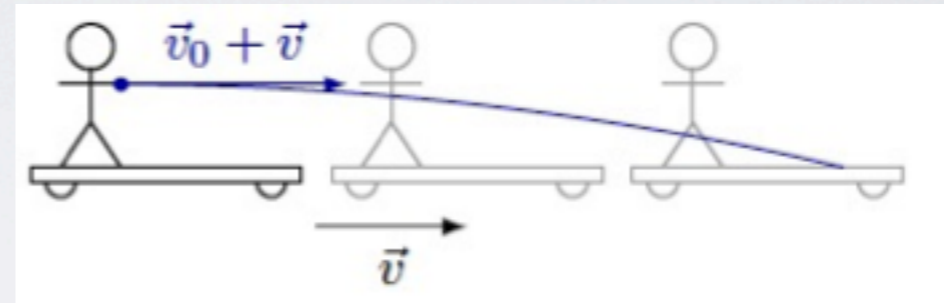
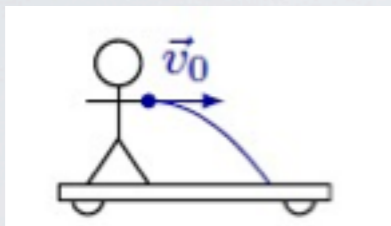
# SPEZIELLE RELATIVITÄTSTHEORIE

Albert Einstein, 1905

**Prinzip 1:** Lichtgeschwindigkeit  $c$  ist konstant, unabhängig vom Bewegungszustand des Beobachters

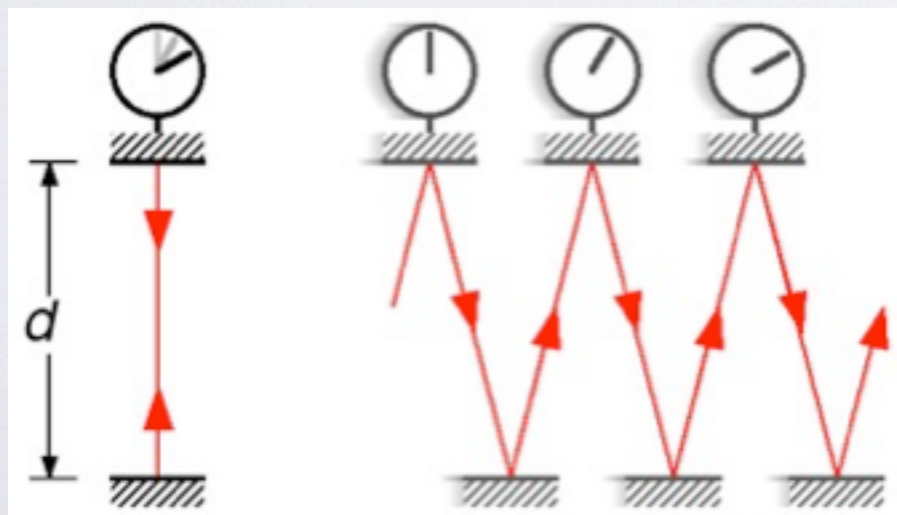


**Prinzip 2:** Physikalische Gesetze sind identisch für Beobachter, die sich gegeneinander mit konstanter Geschwindigkeit bewegen

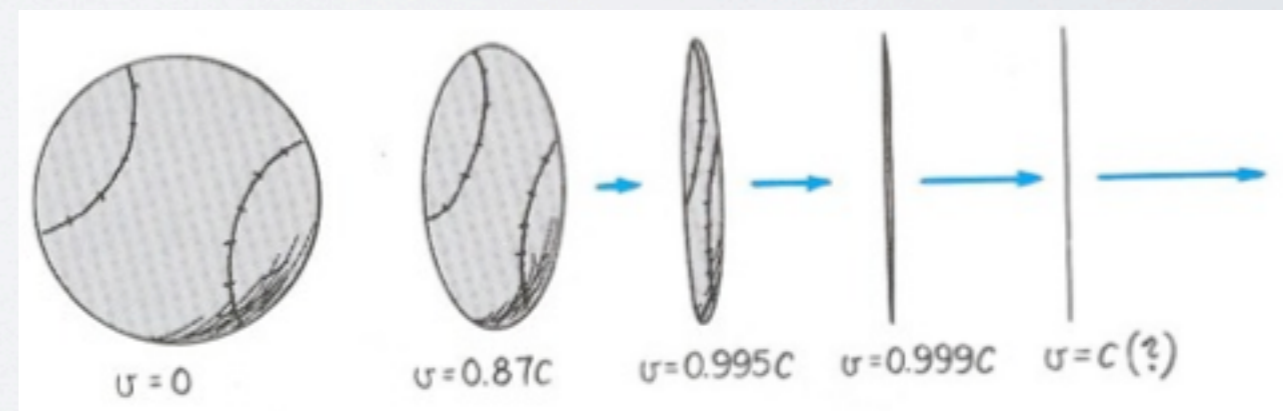


Synchronisation von Uhren: keine globale Gleichzeitigkeit

## Zeitdilatation



## Längenkontraktion





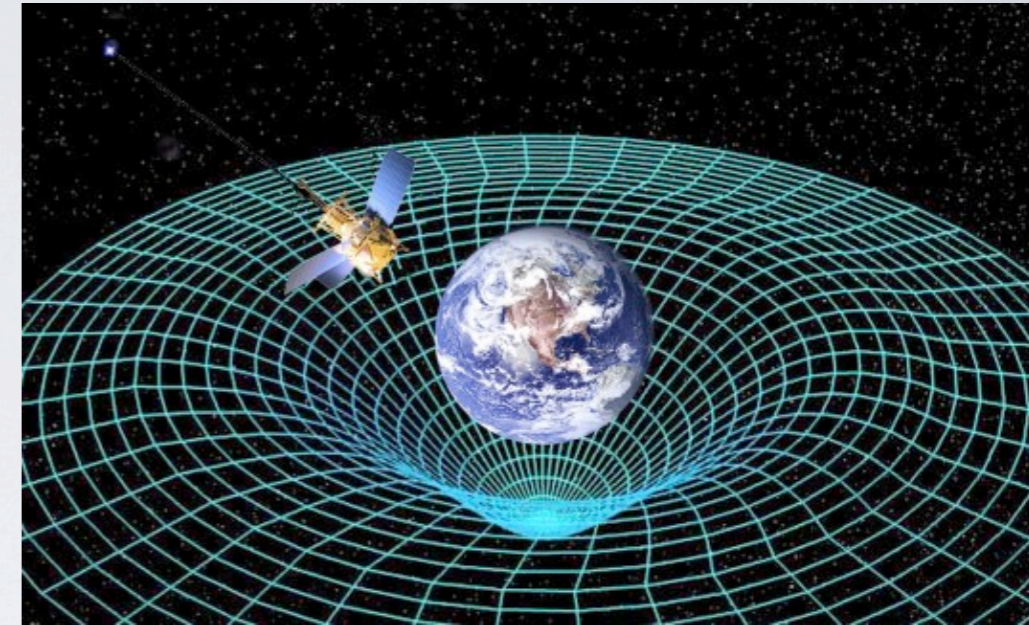
# ALLGEMEINE RELATIVITÄTSTHEORIE

**Prinzip 1:** Alle Formen von Energie krümmen (lokal) das Raumzeitkontinuum (nicht-euklidisch)

Albert Einstein, 1915/16

**Prinzip 2:** Gravitative Anziehung ist (freie) Bewegung aller Körper auf den kürzesten Kurven (Geodäten) innerhalb der Raumzeit (Bettuch)

ART: geometrische Beschreibung der Raumzeit





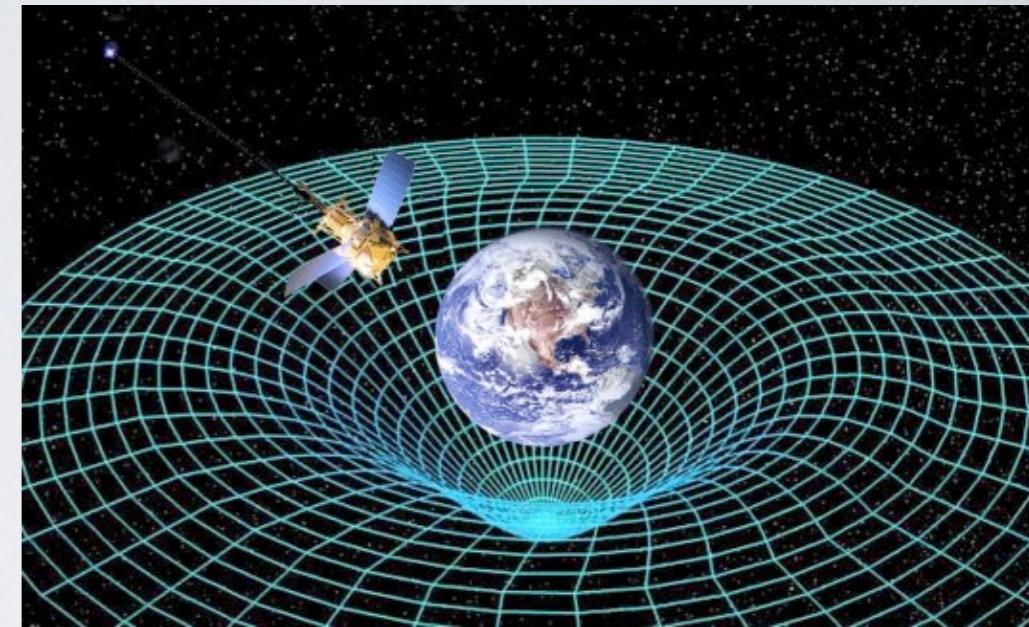
# ALLGEMEINE RELATIVITÄTSTHEORIE

Albert Einstein, 1915/16

**Prinzip 1:** Alle Formen von Energie krümmen (lokal) das Raumzeitkontinuum (nicht-euklidisch)

**Prinzip 2:** Gravitative Anziehung ist (freie) Bewegung aller Körper auf den kürzesten Kurven (Geodäten) innerhalb der Raumzeit (Bettuch)

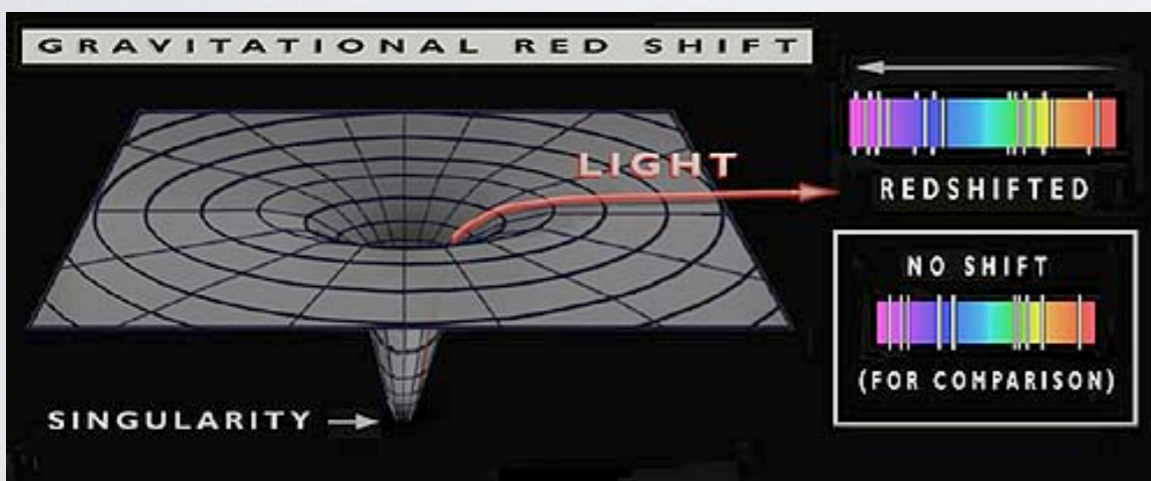
ART: geometrische Beschreibung der Raumzeit



## Gravitationsrotverschiebung

Lichtstrahl Richtung stärkeres Gravitationsfeld gewinnt Energie  $\Rightarrow$  höhere Frequenz  $\Rightarrow$  Blauverschiebung

Lichtstrahl Richtung schwächeres Gravitationsfeld verliert Energie  $\Rightarrow$  niedrigere Frequenz  $\Rightarrow$  Rotverschiebung





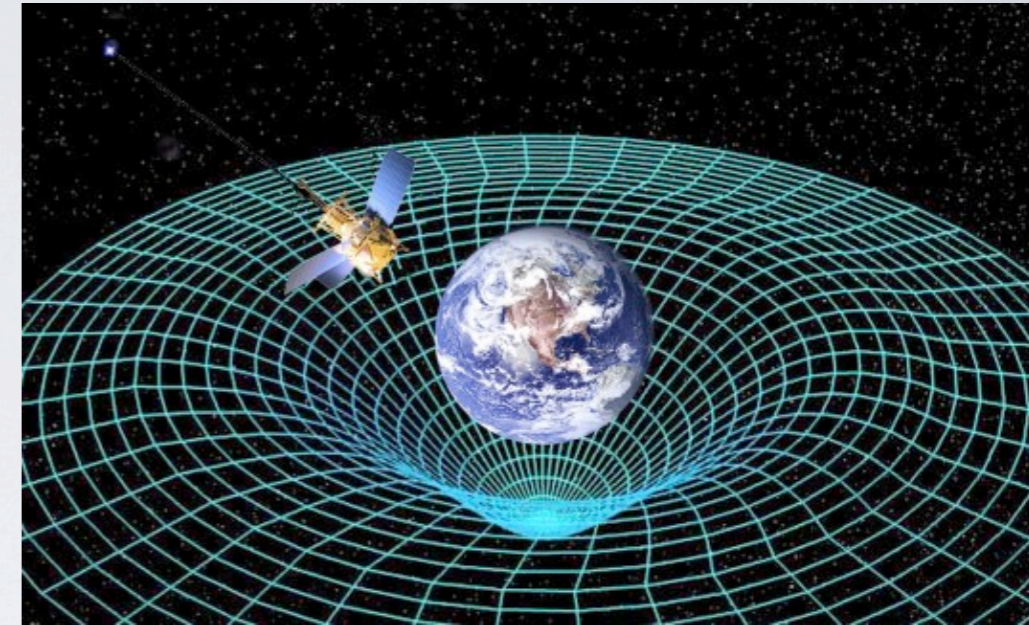
# ALLGEMEINE RELATIVITÄTSTHEORIE

Albert Einstein, 1915/16

**Prinzip 1:** Alle Formen von Energie krümmen (lokal) das Raumzeitkontinuum (nicht-euklidisch)

**Prinzip 2:** Gravitative Anziehung ist (freie) Bewegung aller Körper auf den kürzesten Kurven (Geodäten) innerhalb der Raumzeit (Bettuch)

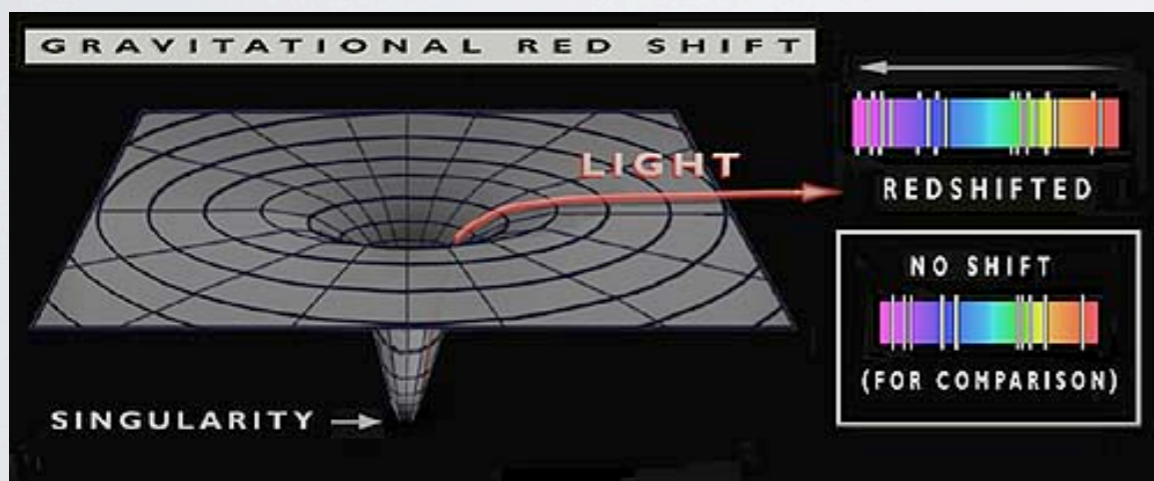
ART: geometrische Beschreibung der Raumzeit



## Gravitationsrotverschiebung

Lichtstrahl Richtung stärkeres Gravitationsfeld gewinnt Energie  $\Rightarrow$  höhere Frequenz  $\Rightarrow$  Blauverschiebung

Lichtstrahl Richtung schwächeres Gravitationsfeld verliert Energie  $\Rightarrow$  niedrigere Frequenz  $\Rightarrow$  Rotverschiebung



Uhren gehen langsamer in Gravitationsfeldern !!!

$$\Delta t = \frac{\Phi - \Phi_0}{c^2} \cdot t$$



# RELATIVISTISCHE EFFEKTE

• SRT, Satellitenbewegung ( $v = 12.374 \text{ km/h}$ )	$\Delta t/t = - 0.000\ 000\ 000\ 083\ 49$
• SRT, Zeitdilatation durch Erdrotation (ECEF vs. ECI)	$\Delta t/t = - 0.000\ 000\ 000\ 001\ 20$
• ART, gravit. Uhrenunterschied durch Zentripetalkraft	$\Delta t/t = + 0.000\ 000\ 000\ 001\ 20$
• ART, gravit. Uhrenunterschied durch Erdgravitation (mit Quadrupolmoment der Erde)	$\Delta t/t = + 0.000\ 000\ 000\ 528\ 88$
	<hr/>
	= 45,685 $\mu\text{s}$ / Tag

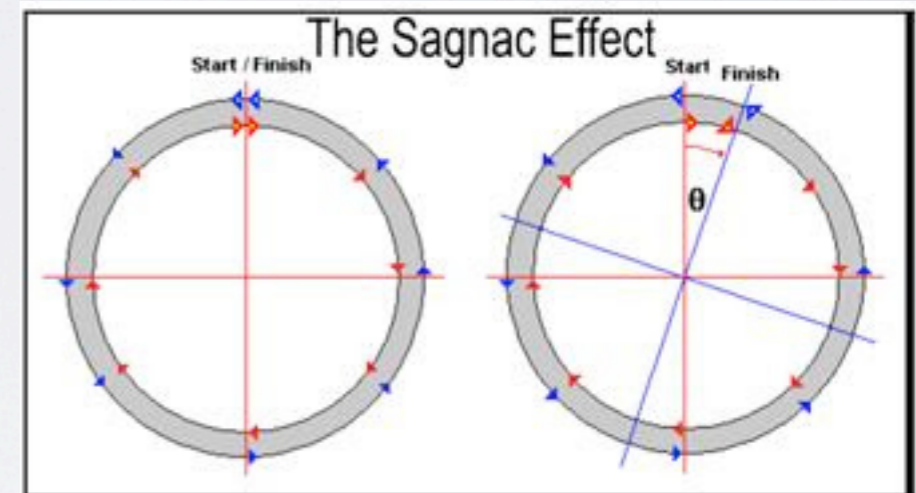


# RELATIVISTISCHE EFFEKTE

- SRT, Satellitenbewegung ( $v = 12.374 \text{ km/h}$ )  $\Delta t/t = - 0.000\ 000\ 000\ 083\ 49$
  - SRT, Zeitdilatation durch Erdrotation (ECEF vs. ECI)  $\Delta t/t = - 0.000\ 000\ 000\ 001\ 20$
  - ART, gravit. Uhrenunterschied durch Zentripetalkraft  $\Delta t/t = + 0.000\ 000\ 000\ 001\ 20$
  - ART, gravit. Uhrenunterschied durch Erdgravitation  
(mit Quadrupolmoment der Erde)  $\Delta t/t = + 0.000\ 000\ 000\ 528\ 88$
- 
- = 45,685  $\mu\text{s}$  / Tag

## SAGNAC/EXZENTRIZITÄTSEFFEKT

- Sagnac-Effekt: Laufzeitunterschiede durch rotierende Systeme: 1984 Satellitenmessung 0,35  $\mu\text{s}$
- Exzentrizitätskorrektur: Satellitenbahn "eiert"  
(Gravitationspotential variiert)  $\implies 0,046 \mu\text{s}$



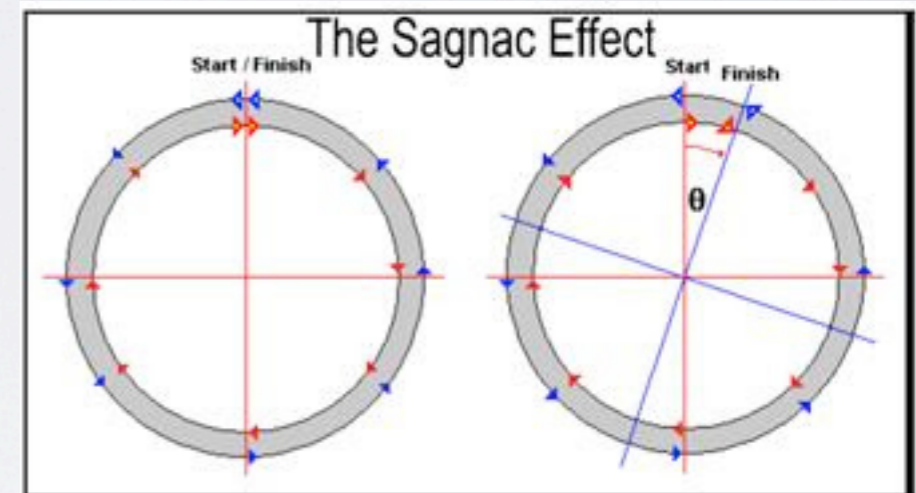


# RELATIVISTISCHE EFFEKTE

- SRT, Satellitenbewegung ( $v = 12.374 \text{ km/h}$ )  $\Delta t/t = - 0.000\,000\,000\,083\,49$
  - SRT, Zeitdilatation durch Erdrotation (ECEF vs. ECI)  $\Delta t/t = - 0.000\,000\,000\,001\,20$
  - ART, gravit. Uhrenunterschied durch Zentripetalkraft  $\Delta t/t = + 0.000\,000\,000\,001\,20$
  - ART, gravit. Uhrenunterschied durch Erdgravitation  
(mit Quadrupolmoment der Erde)  $\Delta t/t = + 0.000\,000\,000\,528\,88$
- 
- $= 45,685 \mu\text{s} / \text{Tag}$

## SAGNAC/EXZENTRIZITÄTSEFFEKT

- Sagnac-Effekt: Laufzeitunterschiede durch rotierende Systeme: 1984 Satellitenmessung  $0,35 \mu\text{s}$
- Exzentrizitätskorrektur: Satellitenbahn "eiert"  
(Gravitationspotential variiert)  $\implies 0,046 \mu\text{s}$



## TOTALKORREKTUR

**Haupteffekt: ART** Korrektur:  $\Delta t = 39 \mu\text{s} / \text{Tag} \implies 12 \text{ km (!!!) 3-Satellitenmessung}$   
(Korrektur durch Frequenzkorrektur von 10.23 nach 10.229999999543 MHz)



# VIELEN DANK!!!





VIELEN DANK!!!

... and don't get lost!





# VIELEN DANK!!!

... and don't get lost!





# VIELEN DANK!!!

... and don't get lost!

