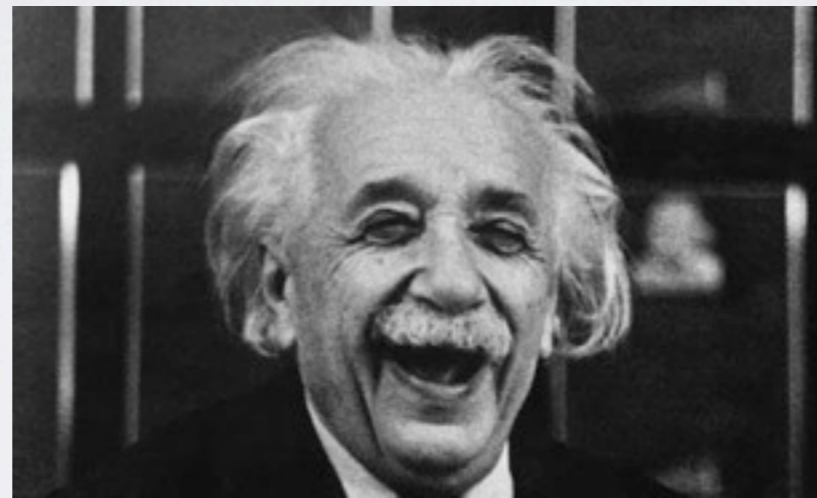


WARUM FINDET MEIN SMARTPHONE OHNE EINSTEIN SEINEN WEG NICHT?



Jürgen R. Reuter, DESY

Science Café, DESY

28.11.2012

Warum benötigt mein Smartphone Einstein?

Science Café 28.11.2012



J.R.Reuter

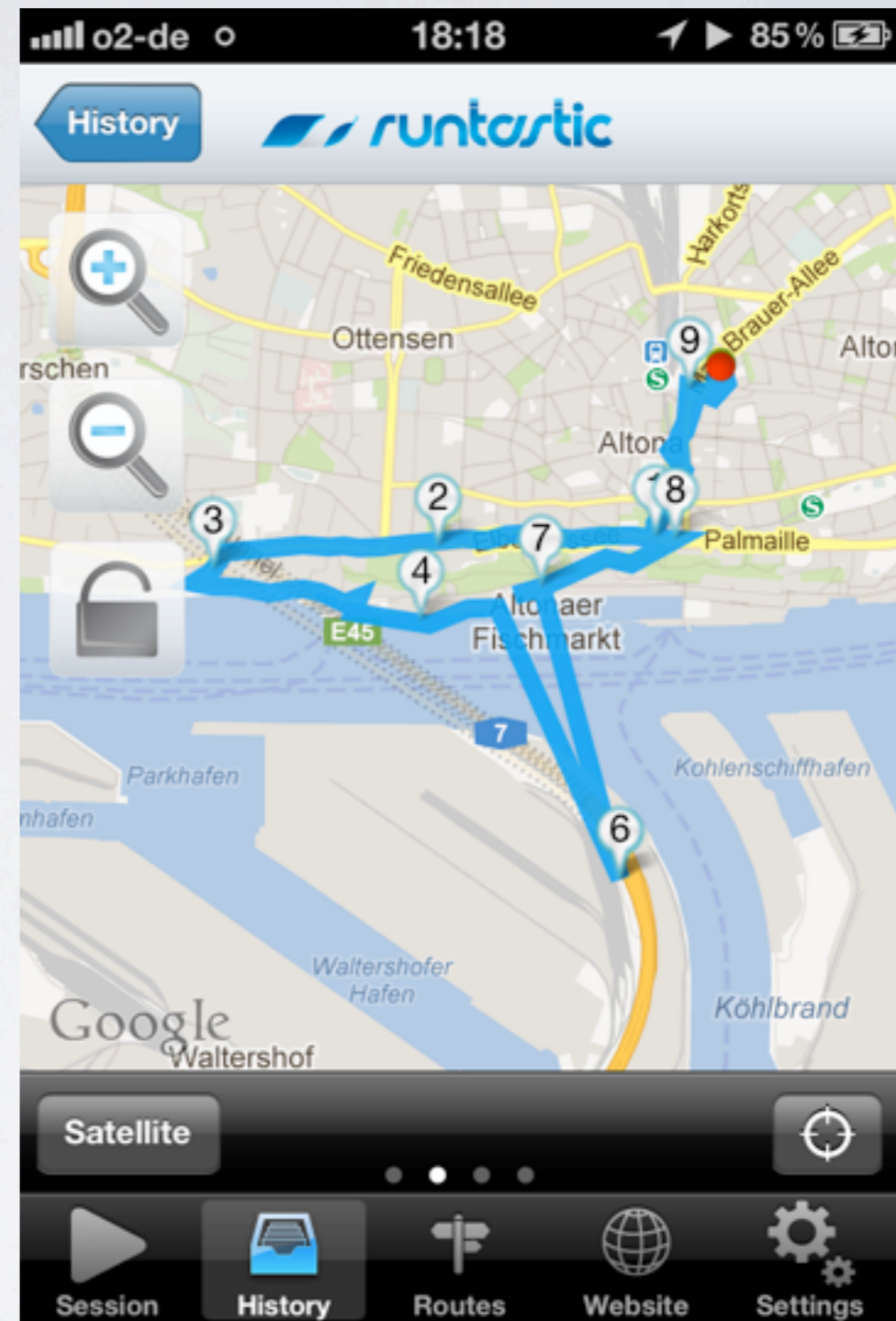
ALLTAG: (GPS-)NAVIGATION MIT IPHONE

- Smartphone enthält GPS-Empfänger
- Positionsbestimmung meist auf 10-30 m genau
- prinzipiell bis 0.2 m genau
- Was ist eigentlich GPS?
- Wie funktioniert das?
- Wie kann das so exakt sein?
- Wieso Einstein?



ALLTAG: (GPS-)NAVIGATION MIT IPHONE

- Smartphone enthält GPS-Empfänger
- Positionsbestimmung meist auf 10-30 m genau
- prinzipiell bis 0.2 m genau
- Was ist eigentlich GPS?
- Wie funktioniert das?
- Wie kann das so exakt sein?
- Wieso Einstein?

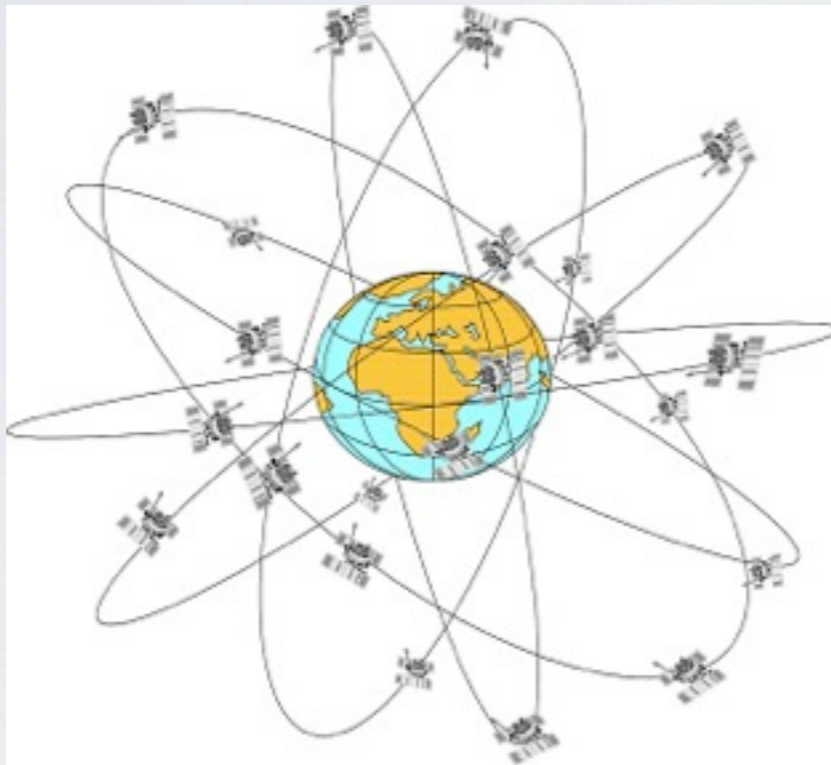


SATELLITEN-NAVIGATION

- 3(+1) funktionierende Systeme: GPS (1994), GLONASS (1995), Compass/Beidou (2010), Galilei (2020?)

- **3 wesentliche Komponenten:**

- ★ **Space Segment** 20-30 Satelliten, 6 Ebenen



- ★ **Control Segment** Satelliten-Kontrollstationen, Update Bahndaten, Synchronisation der Satellitenuhren

- ★ **User Segment** GPS-Empfänger erhält Navigations- und Zeitdaten
=> Positions- und Zeitdaten auf der Erde

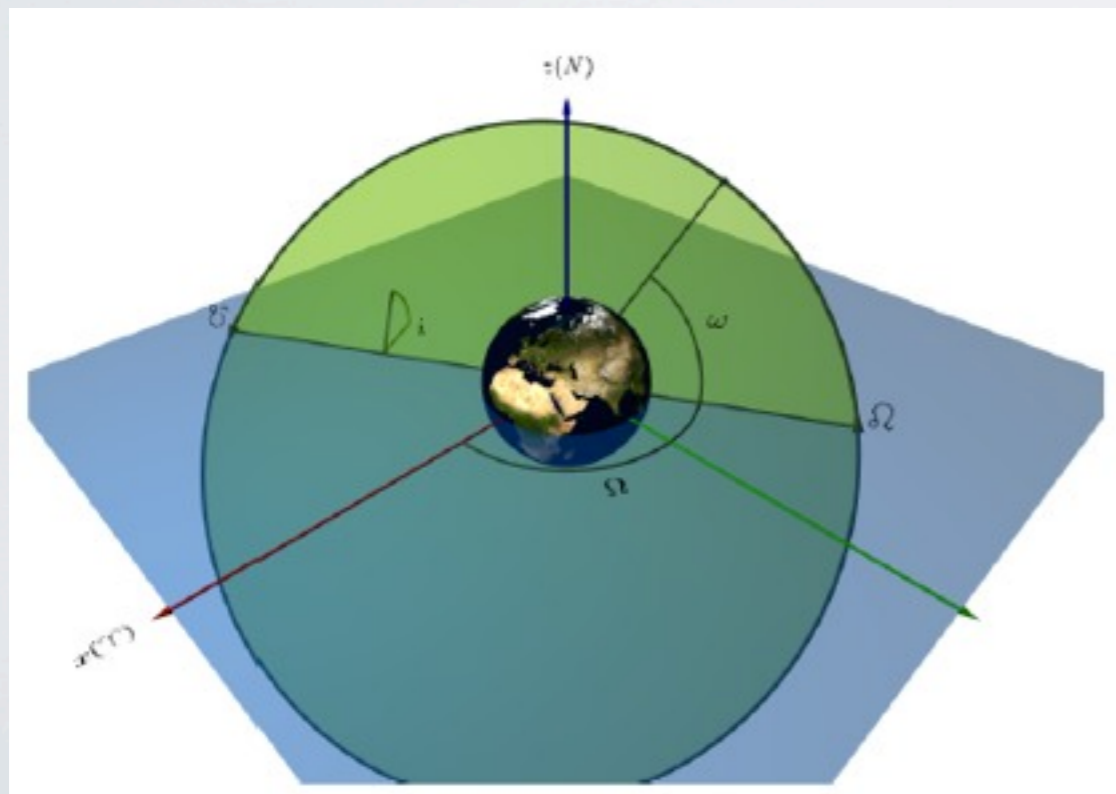
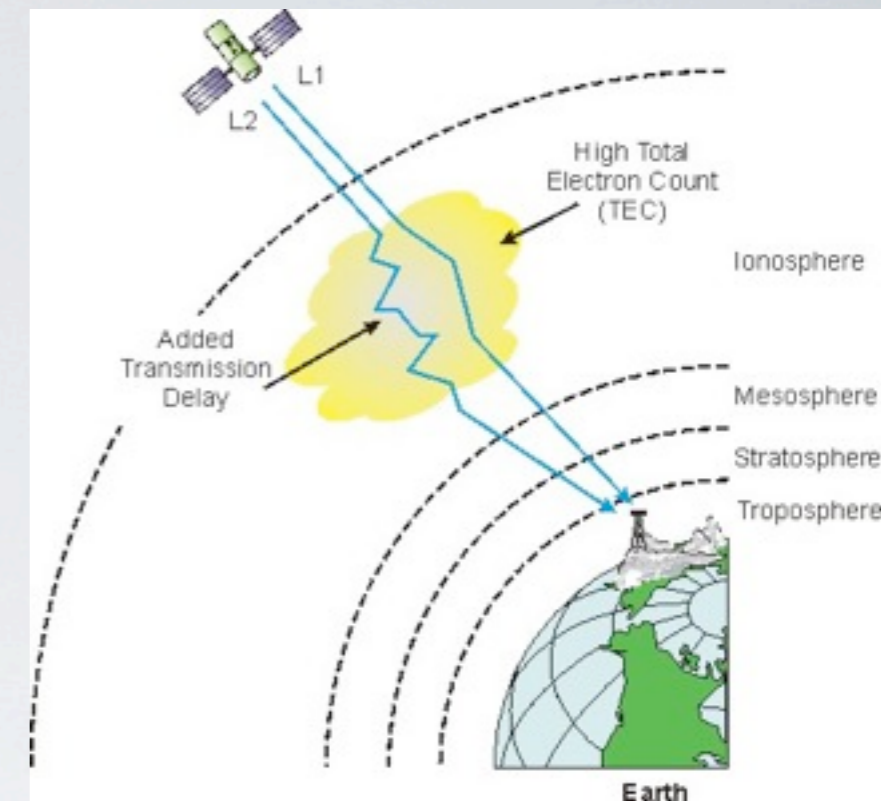


SATELLITEN-KOMMUNIKATION

Satelliten senden Daten: 50 Hz-Rate, nur 1500 Bit pro Datensatz (!), auf 2 Frequenzen

1. Transmissionszeit von Satelliten-Atomuhren (!)
2. Momentanes Bahnsegment ("satellite ephemeris data")
3. Satelliten-Uhr-Synchronisation ("clock offset")
4. Bahndaten anderer Satelliten
5. Information zur Signalübertragung (Ionosphären-Effekt)
6. Kontrollinformation ("signal health status")

2 Sendefrequenzen (Redundanz!), 1575.42 MHz (L1-Band), 1227.60 MHz (L2-Band)
2 Modulationen: 1,023 MHz (C/A-Band) und 10.23 MHz (P(Y)-Code)



Satellitenbahn: Ellipse (Newton!) 6 Param.

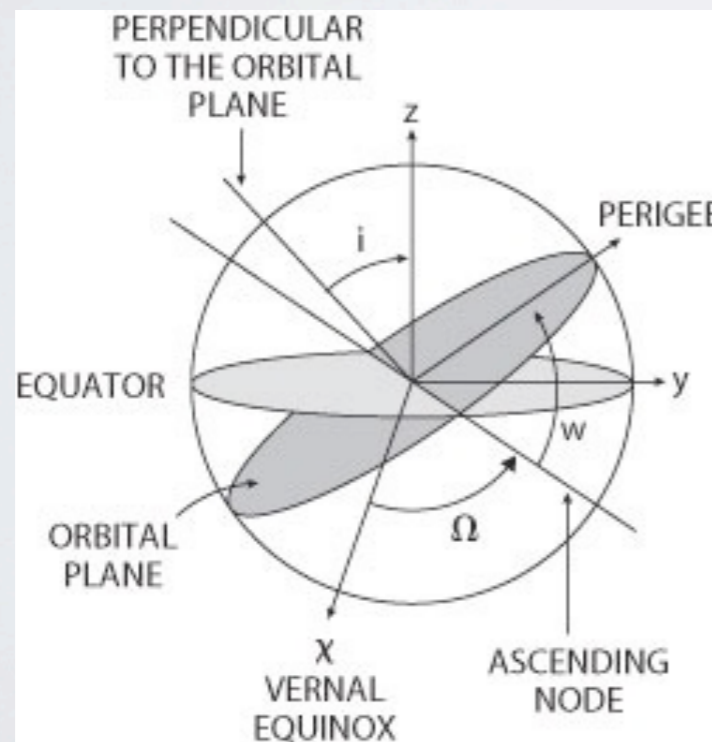
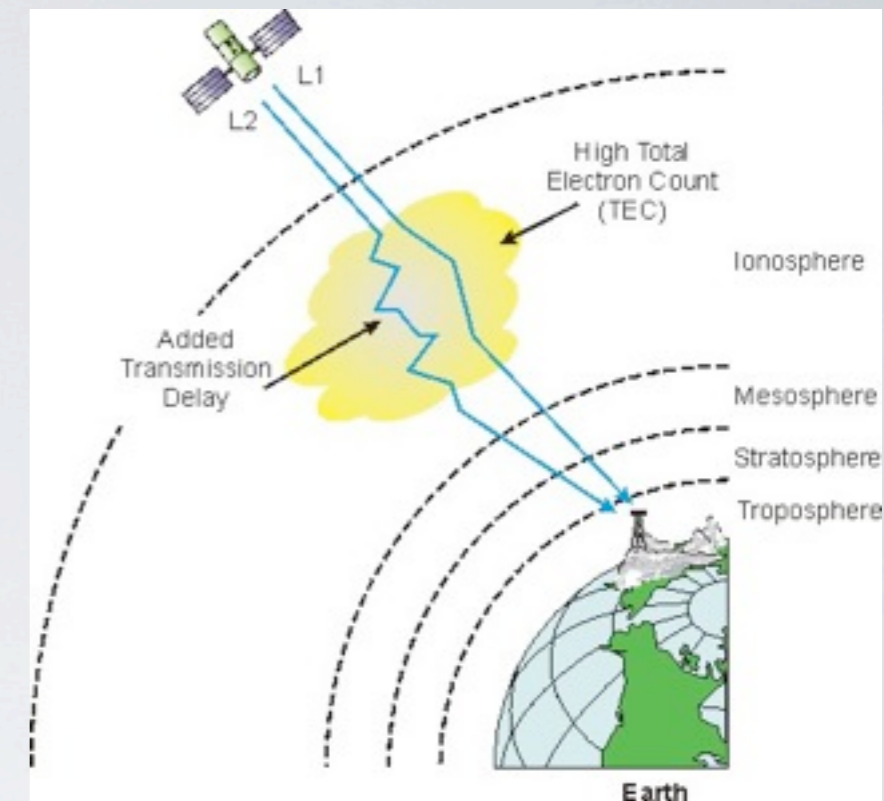
- große Ellipsen-Halbachse a
- Exzentrizität der Ellipse $\epsilon = \frac{r_{min} - r_{max}}{r_{min} + r_{max}}$
- Periapsiswinkel ω
- Neigung (Inklination) i zur Äquatorebene
- Winkel zur Knotenlinie Ω
- wahre Anomalie zum Zeitnullpunkt ν

SATELLITEN-KOMMUNIKATION

Satelliten senden Daten: 50 Hz-Rate, nur 1500 Bit pro Datensatz (!), auf 2 Frequenzen

1. Transmissionszeit von Satelliten-Atomuhren (!)
2. Momentanes Bahnsegment ("satellite ephemeris data")
3. Satelliten-Uhr-Synchronisation ("clock offset")
4. Bahndaten anderer Satelliten
5. Information zur Signalübertragung (Ionosphären-Effekt)
6. Kontrollinformation ("signal health status")

2 Sendefrequenzen (Redundanz!), 1575.42 MHz (L1-Band), 1227.60 MHz (L2-Band)
2 Modulationen: 1,023 MHz (C/A-Band) und 10.23 MHz (P(Y)-Code)



Satellitenbahn: Ellipse (Newton!) 6 Param.

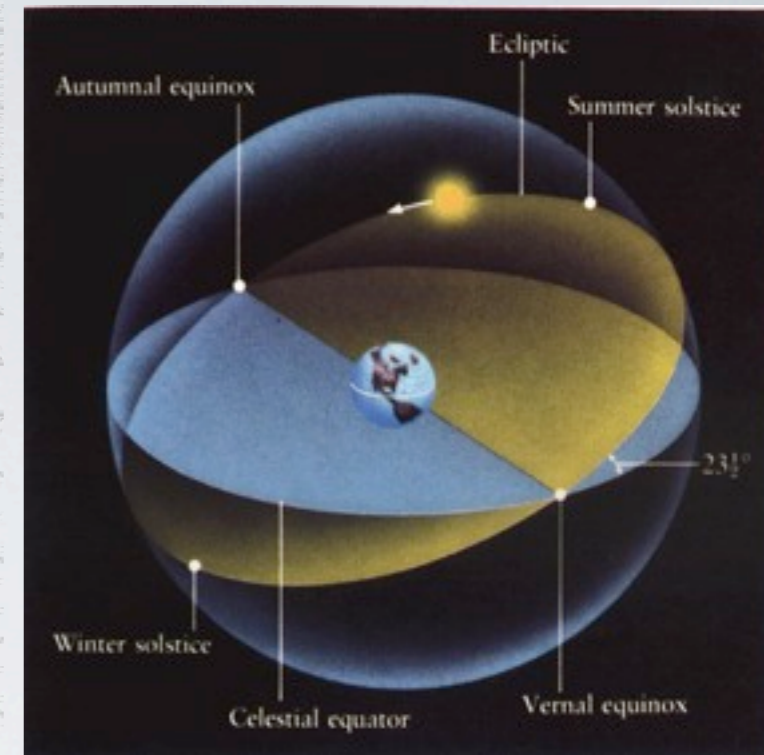
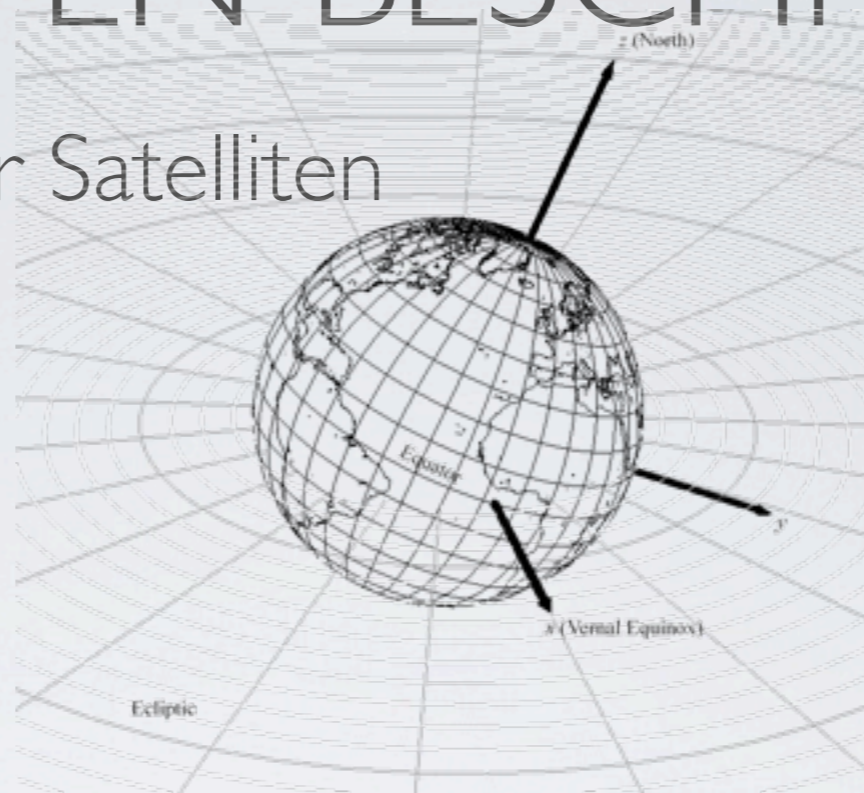
- große Ellipsen-Halbachse a
- Exzentrizität der Ellipse $\epsilon = \frac{r_{min} - r_{max}}{r_{min} + r_{max}}$
- Periapsiswinkel ω
- Neigung (Inklination) i zur Äquatorebene
- Winkel zur Knotenlinie Ω
- wahre Anomalie zum Zeitnullpunkt v

KOORDINATEN-BESCHREIBUNG

GPS-Koordinatensystem für Satelliten

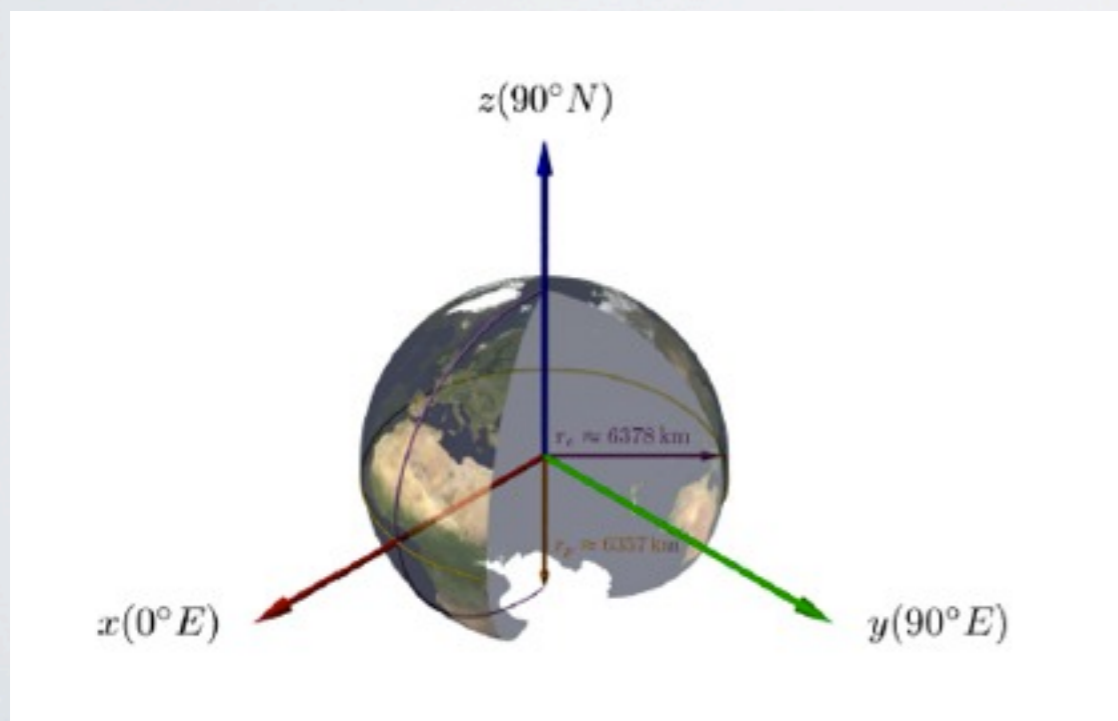
- ◆ ECI: Earth-Centered Inertial Frame
- ◆ fixiert gegenüber Fixsternhimmel
- ◆ nicht-rotierend
- ◆ z-Achse: Erddrehachse
- ◆ x-Achse: Richtung Äquinoktialpunkt
- ◆ zeitinvariant (leichte Störungen durch Mond, Sonne, Jupiter)

ungeeignet zur Beschreibung auf der Erde



Koordinatensystem auf der Erde

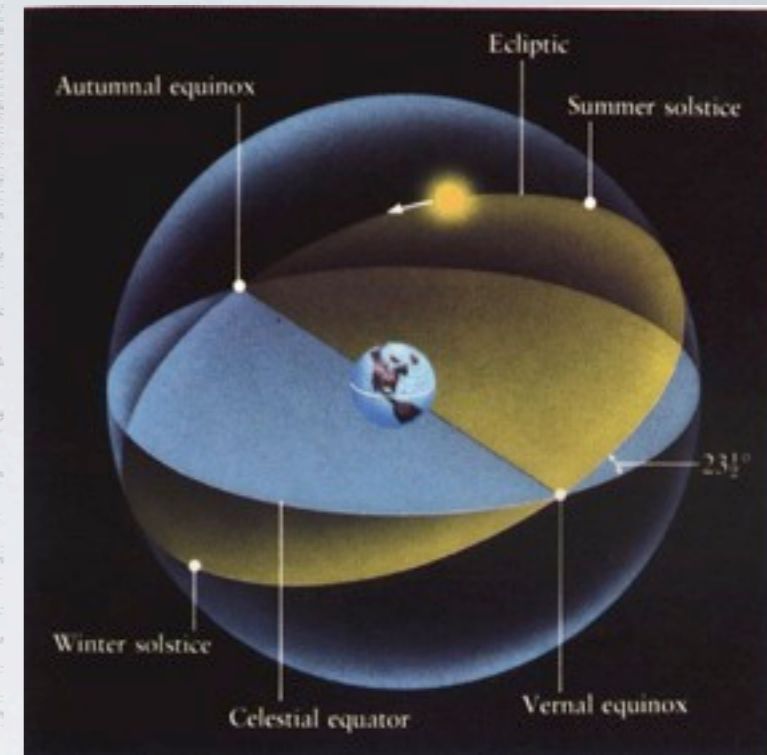
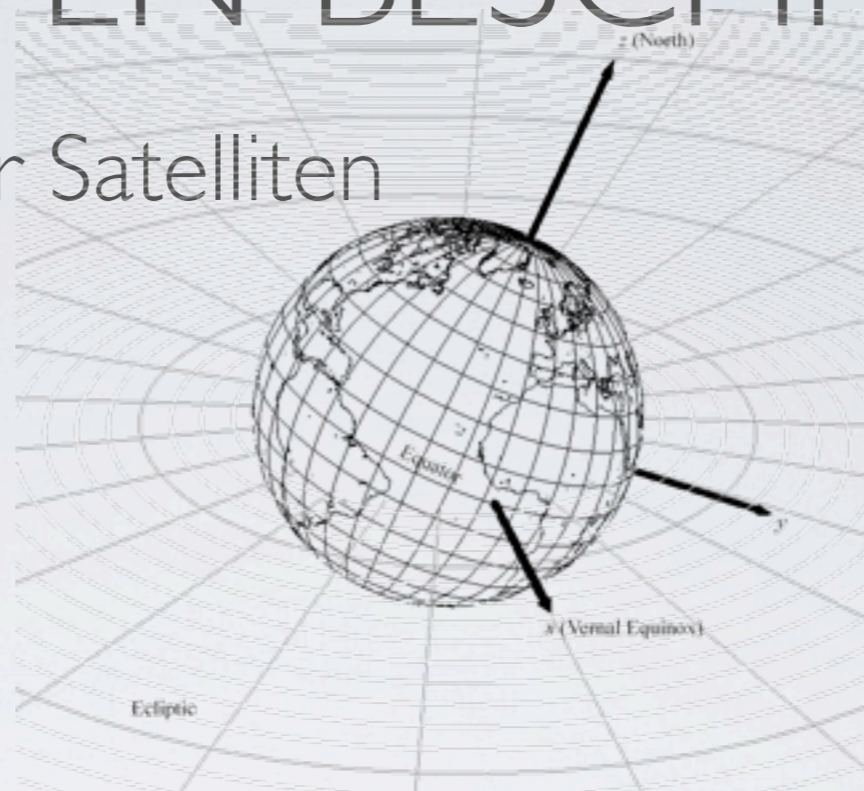
- * ECEF: Earth-Centered Earth-Fixed Frame
- * Beobachter auf der Erde hat feste Koordinaten
- * WGS84: Definition des Erd-"Geoid"s
- * ECEF rotiert um ECI: $\omega_{\oplus} = 0.004178^\circ/s$
- * GPS-Gerät rechnet ECI in ECEF um!



KOORDINATEN-BESCHREIBUNG

GPS-Koordinatensystem für Satelliten

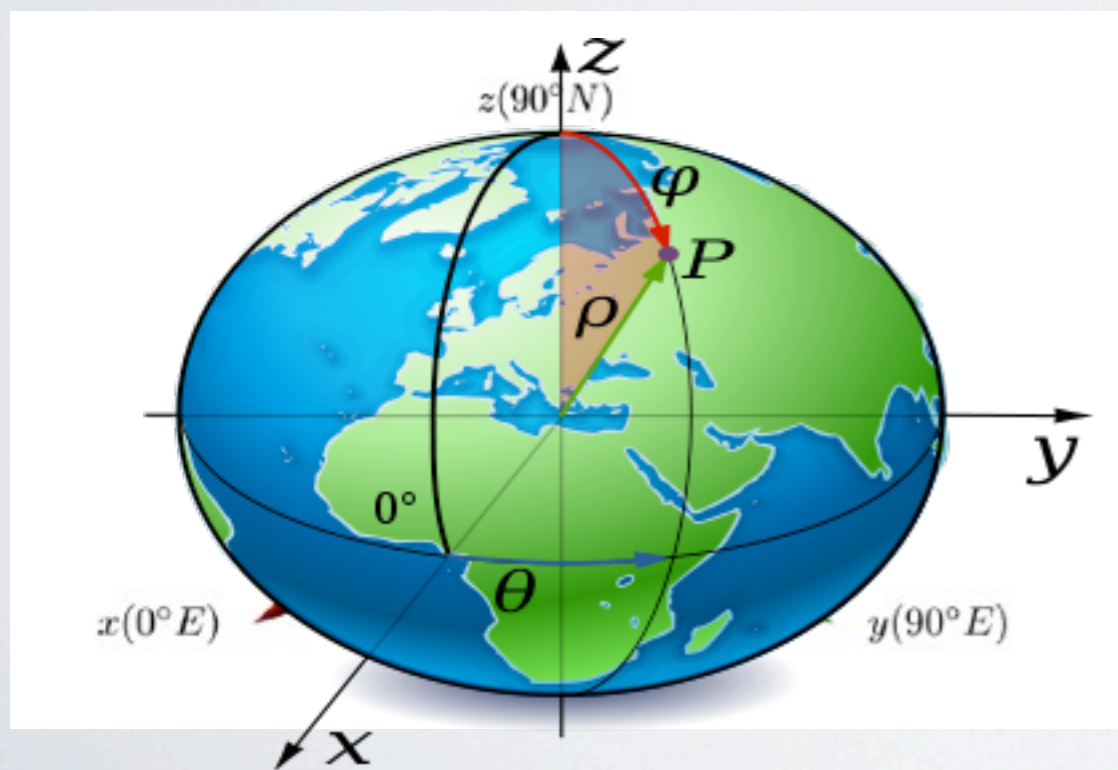
- ◆ ECI: Earth-Centered Inertial Frame
- ◆ fixiert gegenüber Fixsternhimmel
- ◆ nicht-rotierend
- ◆ z-Achse: Erddrehachse
- ◆ x-Achse: Richtung Äquinoktialpunkt
- ◆ zeitinvariant (leichte Störungen durch Mond, Sonne, Jupiter)



ungeeignet zur Beschreibung auf der Erde

Koordinatensystem auf der Erde

- * ECEF: Earth-Centered Earth-Fixed Frame
- * Beobachter auf der Erde hat feste Koordinaten
- * WGS84: Definition des Erd-"Geoid"s
- * ECEF rotiert um ECI: $\omega_{\oplus} = 0.004178^\circ/s$
- * GPS-Gerät rechnet ECI in ECEF um!



WIE FUNKTIONIERT DIE POSITIONSBERECHNUNG?

Abstandsmessung durch Messung von Zeitdifferenzen und Laufzeiten

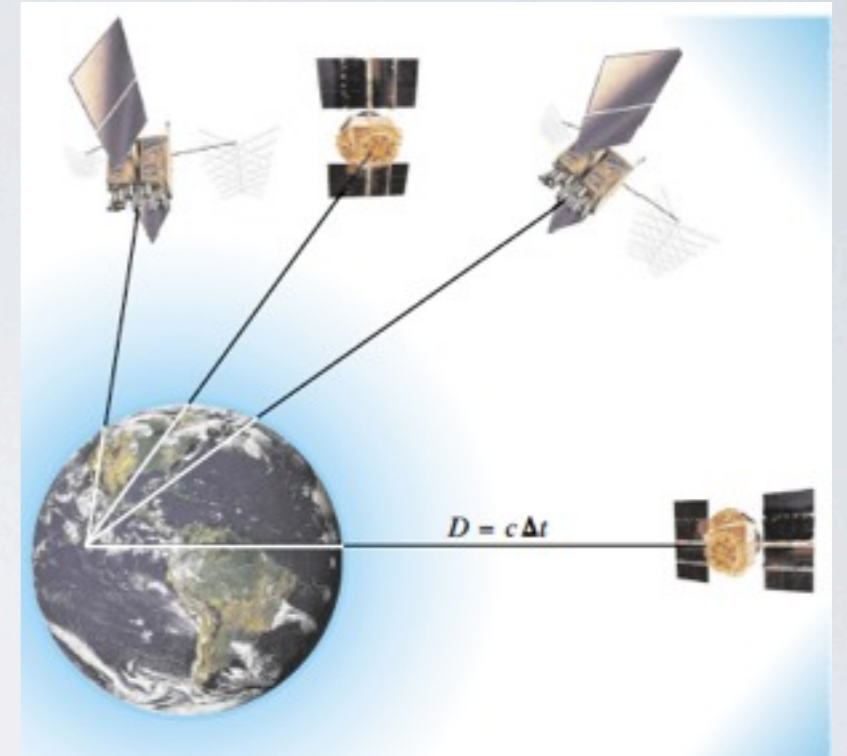
Lichtgeschwindigkeit

$$\|\vec{r} - \vec{r}_i\| = d_i = c \cdot (t - t_i)$$

**3 Unbekannte:
GPS-Koordinaten**

Satellitenort: aus
Satellitenbahndaten

Satellitenzeit: aus
Signal



Problem: Synchronisation GPS-/Satellitenuhr

Offset GPS-/Satellitenuhr:

$$t = \tau + \Delta$$

4 Unbekannte (3 Koord., Offset) => 4 Satelliten!!!

WIE FUNKTIONIERT DIE POSITIONSBERECHNUNG?

Abstandsmessung durch Messung von Zeitdifferenzen und Laufzeiten

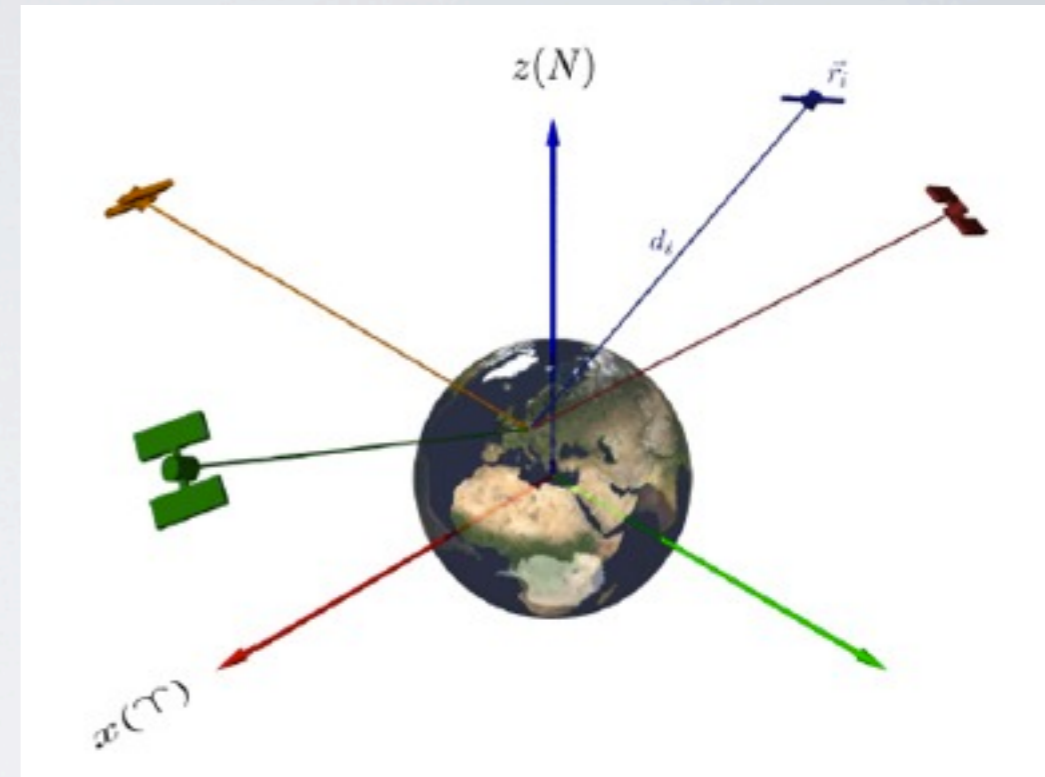
Lichtgeschwindigkeit

$$\|\vec{r} - \vec{r}_i\| = d_i = c \cdot (t - t_i)$$

**3 Unbekannte:
GPS-Koordinaten**

Satellitenort: aus
Satellitenbahndaten

Satellitenzeit: aus
Signal



Problem: Synchronisation GPS-/Satellitenuhr

Offset GPS-/Satellitenuhr:

$$t = \tau + \Delta$$

4 Unbekannte (3 Koord., Offset) => 4 Satelliten!!!

WIE FUNKTIONIERT DIE POSITIONSBERECHNUNG?

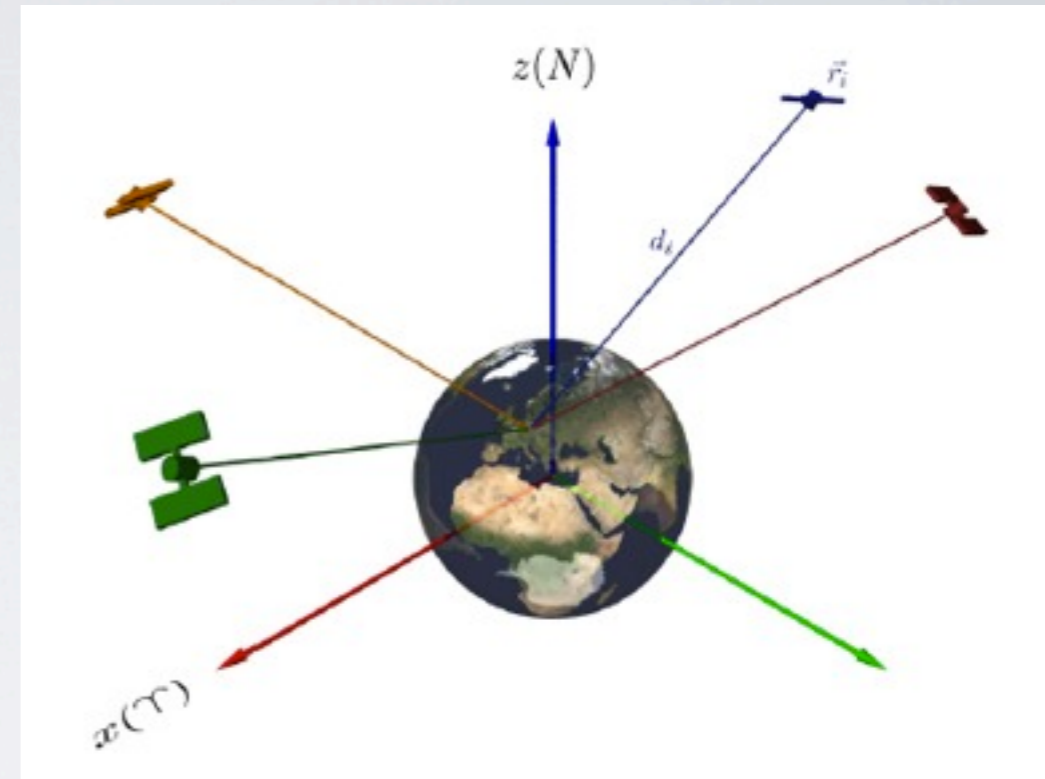
Abstandsmessung durch Messung von Zeitdifferenzen und Laufzeiten

Lichtgeschwindigkeit

**3 Unbekannte:
GPS-Koordinaten**

Satellitenort: aus
Satellitenbahndaten

Satellitenzeit: aus
Signal



Problem: Synchronisation GPS-/Satellitenuhr

Offset GPS-/Satellitenuhr:

$$t = \tau + \Delta$$

4 Unbekannte (3 Koord., Offset) => 4 Satelliten!!!

WIE FUNKTIONIERT DIE POSITIONSBERECHNUNG?

Abstandsmessung durch Messung von Zeitdifferenzen und Laufzeiten

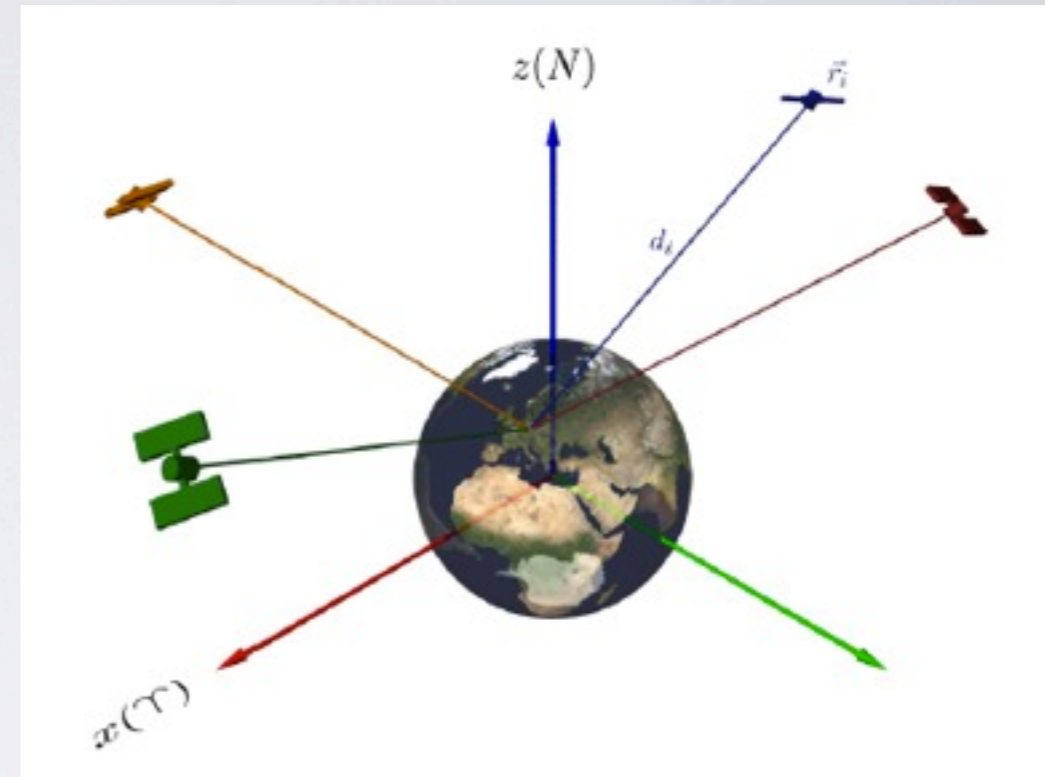
Lichtgeschwindigkeit

$$\|\vec{r} - \vec{r}_i\| - c\Delta = c \cdot (\tau - t_i)$$

3 Unbekannte: GPS-Koordinaten

Satellitenort: aus Satellitenbahndaten

Satellitenzeit: aus Signal



Problem: Synchronisation GPS-/Satellitenuhr

Offset GPS-/Satellitenuhr:

$$t = \tau + \Delta$$

4 Unbekannte (3 Koord., Offset) => 4 Satelliten!!!

WIE FUNKTIONIERT DIE POSITIONSBERECHNUNG?

Abstandsmessung durch Messung von Zeitdifferenzen und Laufzeiten

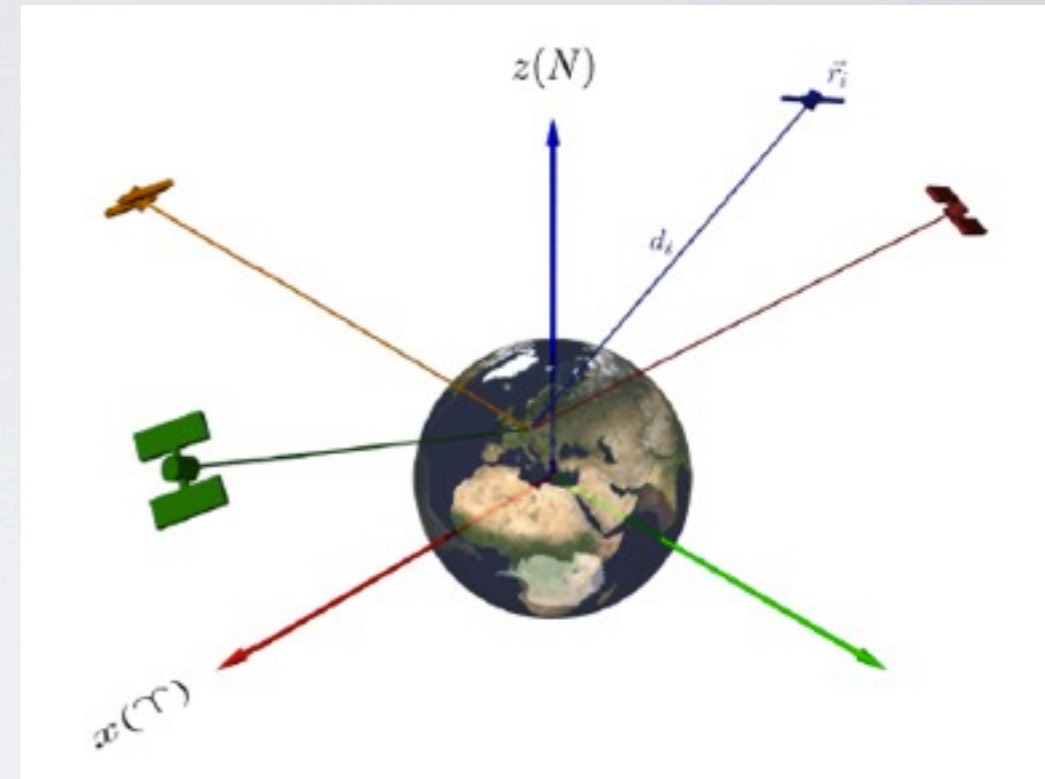
Lichtgeschwindigkeit

$$\|\vec{r} - \vec{r}_i\| - c\Delta = c \cdot (\tau - t_i)$$

**3 Unbekannte:
GPS-Koordinaten**

Satellitenort: aus
Satellitenbahndaten

Satellitenzeit: aus
Signal



Problem: Synchronisation GPS-/Satellitenuhr

Offset GPS-/Satellitenuhr:

$$t = \tau + \Delta$$

4 Unbekannte (3 Koord., Offset) => 4 Satelliten!!!

1. Messe bei fester Zeit Abstände
2. Korrekturen: Satellitenuhrenoffset, Ionosphären- und Exzentrizitätskorrektur
3. GPS berechnet ECEF-Satellitenposition
4. Wähle ECI, konvertierte Satellitenposition

WIE FUNKTIONIERT DIE POSITIONSBERECHNUNG?

Abstandsmessung durch Messung von Zeitdifferenzen und Laufzeiten

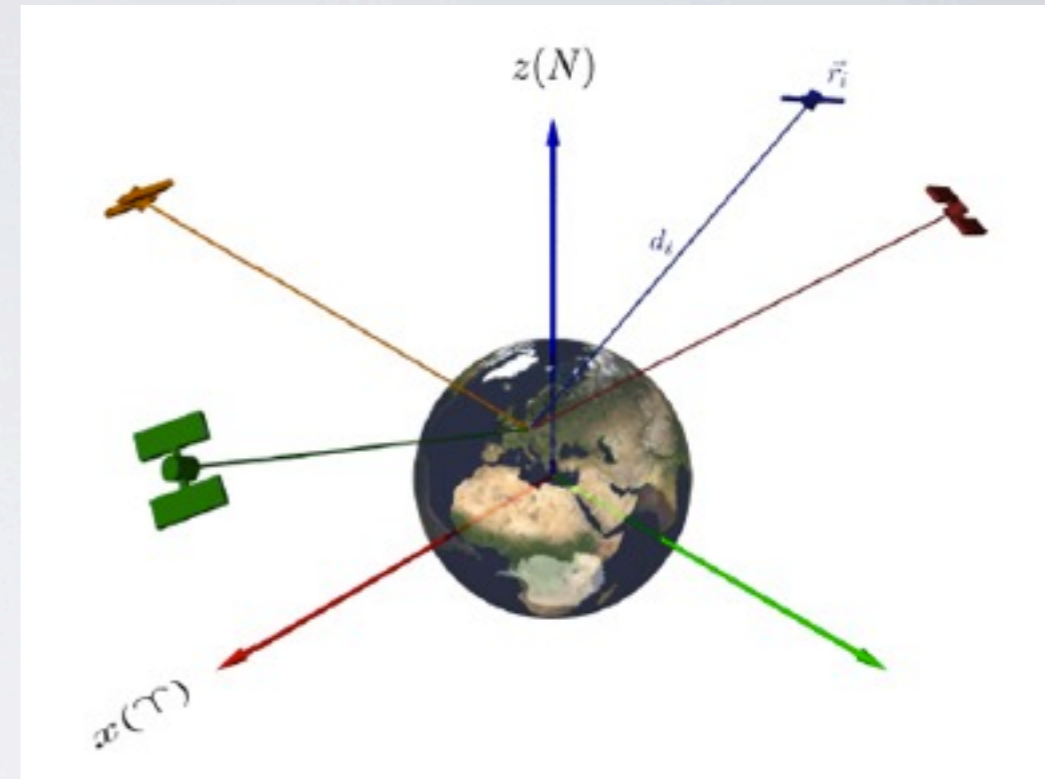
Lichtgeschwindigkeit

$$\|\vec{r} - \vec{r}_i\| - c\Delta = c \cdot (\tau - t_i)$$

3 Unbekannte: GPS-Koordinaten

Satellitenort: aus Satellitenbahndaten

Satellitenzeit: aus Signal



Problem: Synchronisation GPS-/Satellitenuhr

Offset GPS-/Satellitenuhr:

$$t = \tau + \Delta$$

4 Unbekannte (3 Koord., Offset) => 4 Satelliten!!!

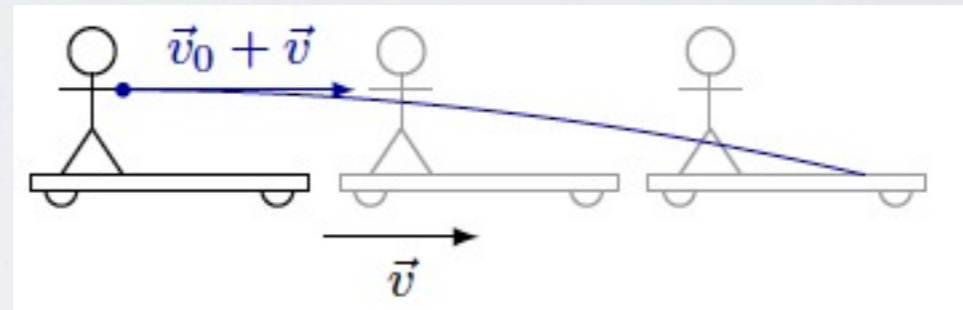
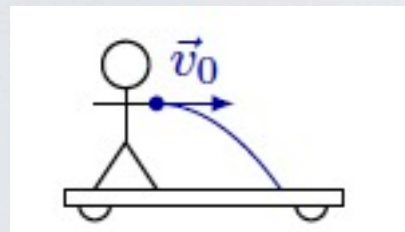
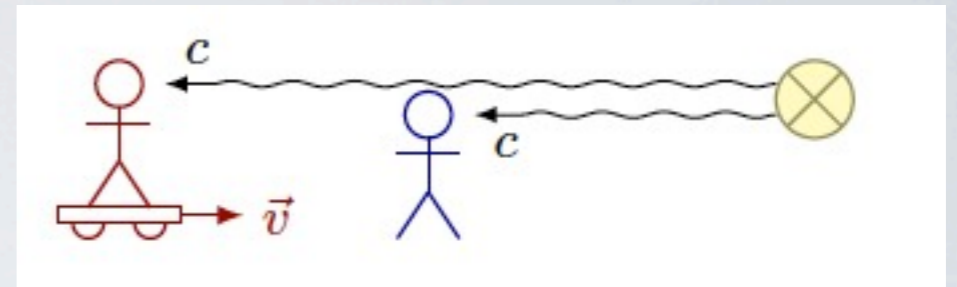
1. Messe bei fester Zeit Abstände
2. Korrekturen: Satellitenuhrenoffset, Ionosphären- und Exzentrizitätskorrektur
3. GPS berechnet ECEF-Satellitenposition
4. Wähle ECI, konvertierte Satellitenposition
5. Löse die Gleichungen
6. Konvertiere GPS-Position zurück nach ECEF
7. Umrechnung in Länge, Breite, Höhe

SPEZIELLE RELATIVITÄTSTHEORIE

Postulat 1: Lichtgeschwindigkeit c ist konstant, unabhängig vom Bewegungszustand des Beobachters

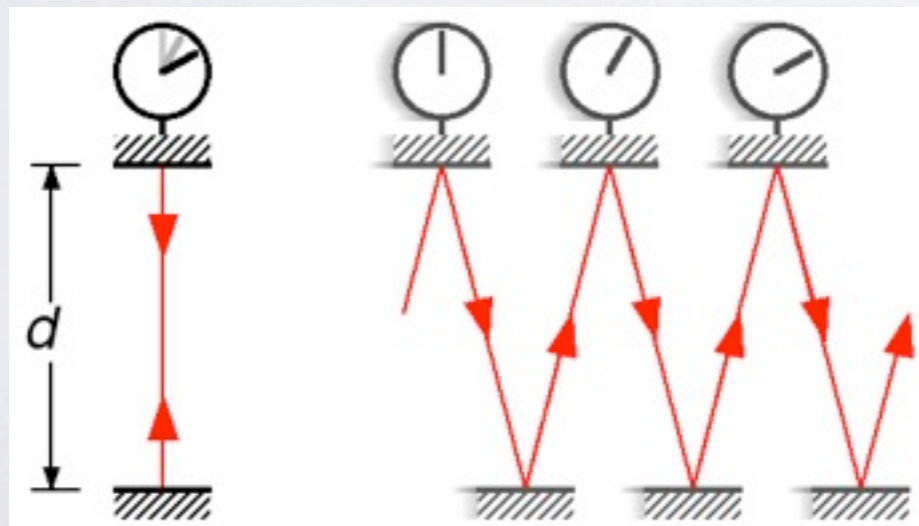
Albert Einstein, 1905

Postulat 2: Physikalische Gesetze sind identisch für Beobachter, die sich gegeneinander mit konstanter Geschwindigkeit bewegen

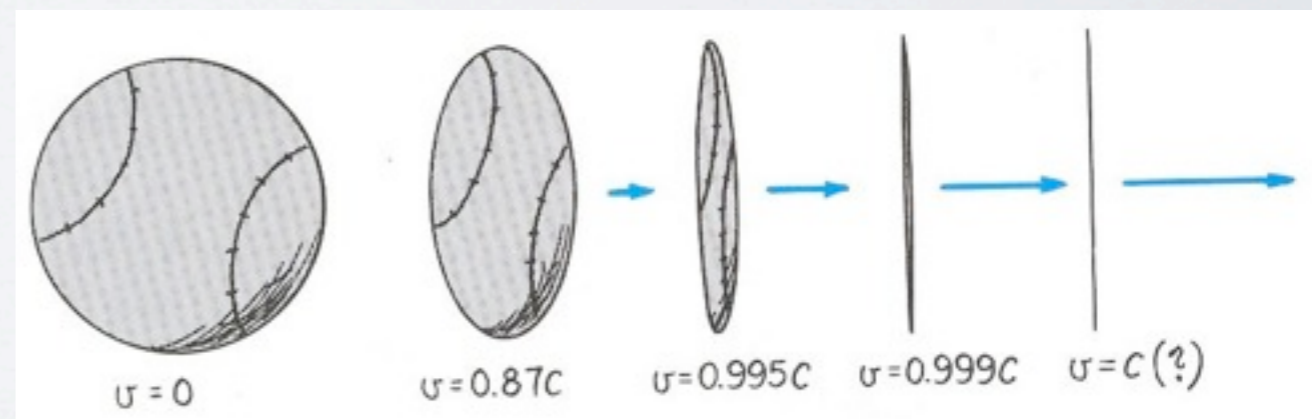


Synchronisation von Uhren: keine globale Gleichzeitigkeit

Zeitdilatation



Längenkontraktion

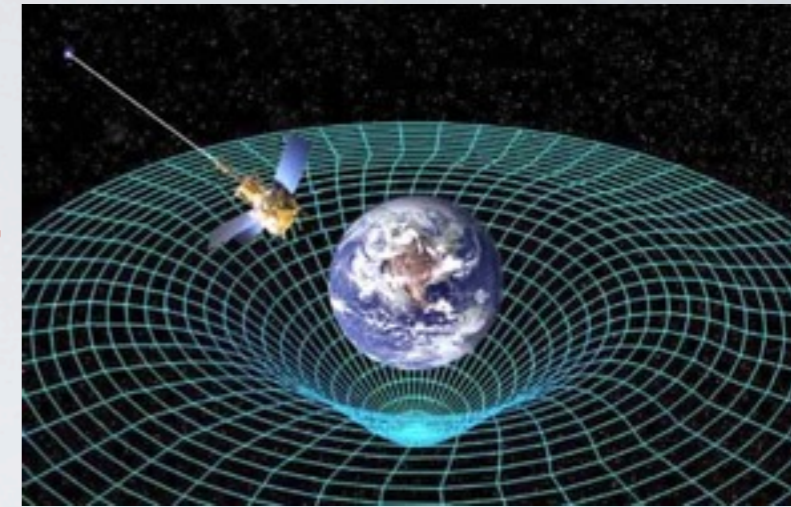


ALLGEMEINE RELATIVITÄTSTHEORIE

Albert Einstein, 1916

Prinzip 1: Alle Formen von Energie krümmen (lokal) das Raumzeitkontinuum (nicht-euklidisch)

Prinzip 2: Gravitative Anziehung ist (freie) Bewegung aller Körper auf den kürzesten Kurven innerhalb der Raumzeit ("Geodäten", Bettuch)

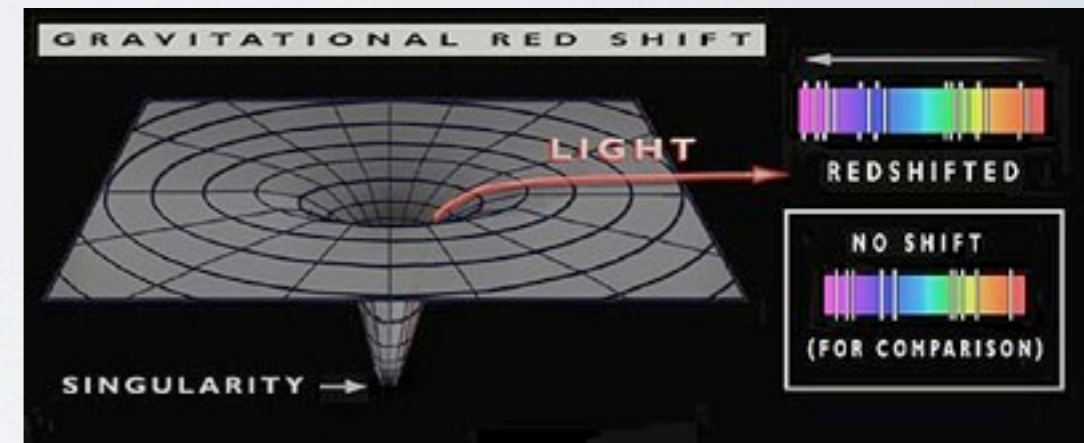


ART: geometrische Beschreibung der Raumzeit / Gravitation

Gravitationsrotverschiebung

Lichtstrahl Richtung stärkeres Gravitationsfeld gewinnt Energie => höhere Frequenz => Blauverschiebung

Lichtstrahl Richtung schwächeres Gravitationsfeld verliert Energie => niedrigere Frequenz => Rotverschiebung



Uhren gehen langsamer in Gravitationsfeldern !!!

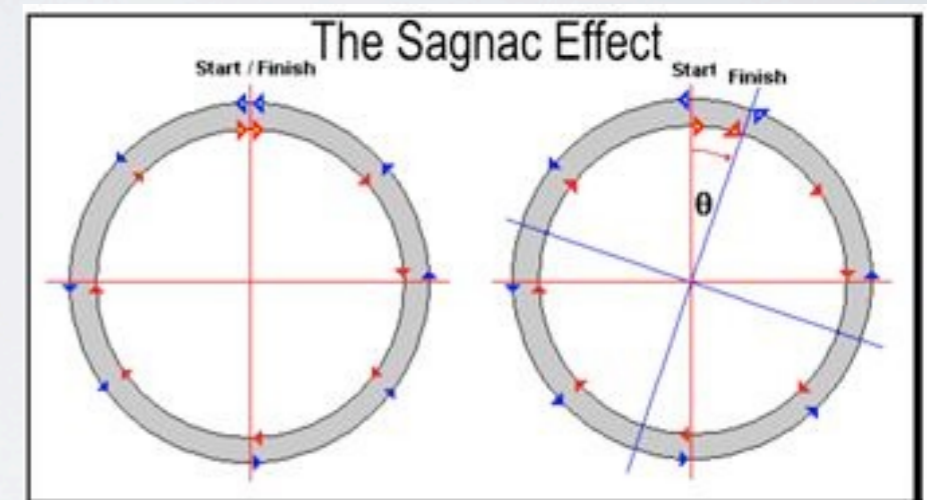
$$\Delta t = \frac{\Phi - \Phi_0}{c^2} \cdot t$$

RELATIVISTISCHE EFFEKTE

- SRT, Satellitenbewegung: ($v = 12734 \text{ km/h}$) $\Delta t = - 0.000\ 000\ 000\ 083\ 49$
- SRT, Zeitdilatation Erdrotation (ECEF vs. ECI) $\Delta t = - 0.000\ 000\ 000\ 001\ 20$
- ART, grav. Uhrenunterschied durch Zentripetalkraft $\Delta t = +0.000\ 000\ 000\ 001\ 20$
- ART, grav. Uhrenunterschied durch Erdgravitation
(mit Quadrupolmoment der Erde) $\Delta t = +0.000\ 000\ 000\ 052\ 88$
 $= 45,685 \mu\text{s} / \text{Tag}$

SAGNAC-/EXZENTRIZITÄTSEFFEKT

- Sagnac-Effekt: Laufzeitunterscheide durch rotierende Systeme: 1984 Satellitenmessung: 350 ns
- Exzentrizitätskorrektur: Satellitenbahn "eiert"
(Gravitationspotential variiert) $\Rightarrow 46 \text{ ns}$



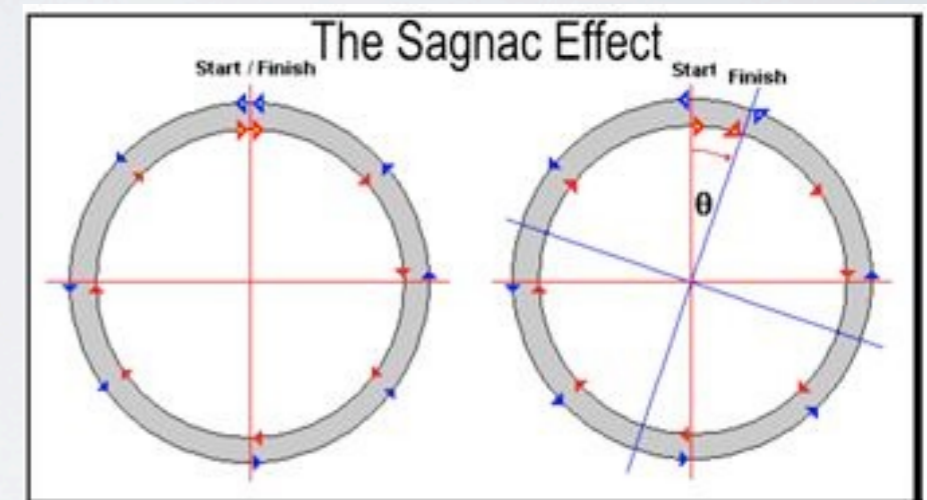
RELATIVISTISCHE EFFEKTE

- SRT, Satellitenbewegung: ($v = 12734 \text{ km/h}$) $\Delta t = - 0.000\ 000\ 000\ 083\ 49$
- SRT, Zeitdilatation Erdrotation (ECEF vs. ECI) $\Delta t = - 0.000\ 000\ 000\ 001\ 20$
- ART, grav. Uhrenunterschied durch Zentripetalkraft $\Delta t = +0.000\ 000\ 000\ 001\ 20$
- ART, grav. Uhrenunterschied durch Erdgravitation
(mit Quadrupolmoment der Erde) $\Delta t = +0.000\ 000\ 000\ 052\ 88$
 $= 45,685 \mu\text{s} / \text{Tag}$

SAGNAC-/EXZENTRIZITÄTSEFFEKT

- Sagnac-Effekt: Laufzeitunterscheide durch rotierende rotierende Systeme: 1984 Satellitenmessung: 350 ns
- Exzentrizitätskorrektur: Satellitenbahn "eiert"
(Gravitationspotential variiert) $\Rightarrow 46 \text{ ns}$

TOTALKORREKTUR

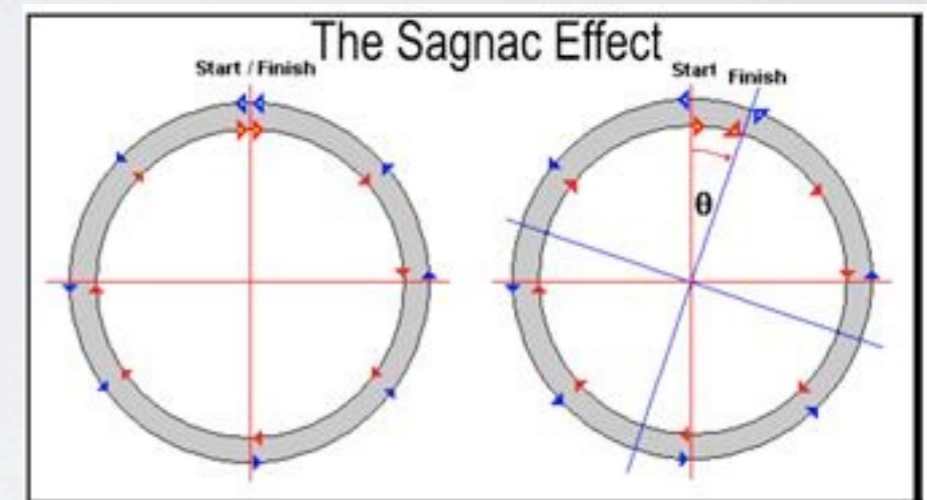


RELATIVISTISCHE EFFEKTE

- SRT, Satellitenbewegung: ($v = 12734 \text{ km/h}$) $\Delta t = -0.000\,000\,000\,083\,49$
- SRT, Zeitdilatation Erdrotation (ECEF vs. ECI) $\Delta t = -0.000\,000\,000\,001\,20$
- ART, grav. Uhrenunterschied durch Zentripetalkraft $\Delta t = +0.000\,000\,000\,001\,20$
- ART, grav. Uhrenunterschied durch Erdgravitation
(mit Quadrupolmoment der Erde) $\Delta t = +0.000\,000\,000\,052\,88$
 $= 45,685 \mu\text{s} / \text{Tag}$

SAGNAC-/EXZENTRIZITÄTSEFFEKT

- Sagnac-Effekt: Laufzeitunterscheide durch rotierende rotierende Systeme: 1984 Satellitenmessung: 350 ns
- Exzentrizitätskorrektur: Satellitenbahn "eiert" (Gravitationspotential variiert) $\Rightarrow 46 \text{ ns}$



TOTALKORREKTUR

Haupteffekt: ART Korrektur: $\Delta t = 39 \mu\text{s} / \text{Tag} \Rightarrow 12 \text{ km} (!!!!)$ 3-Satellitenmessung
(Korrektur durch Frequenzkorrektur von 10.23 nach 10.22999999543 MHz)

VIELEN DANK!



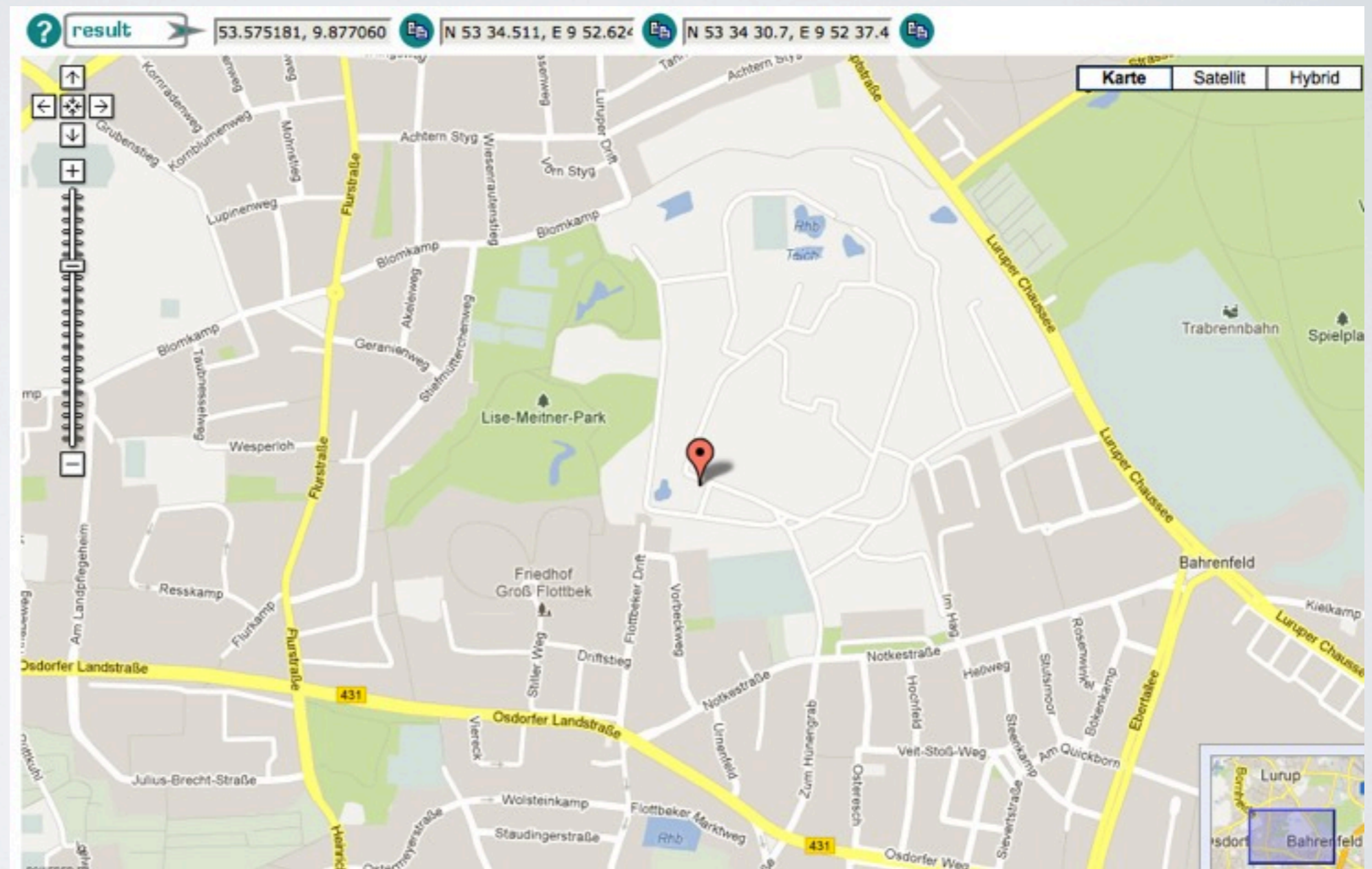
VIELEN DANK!

... and don't get lost!!!



VIELEN DANK!

... and don't get lost!!!



VIELEN DANK!

... and don't get lost!!!

