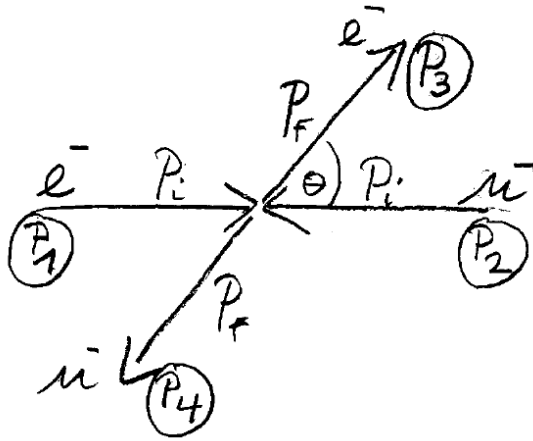


Von der $e^- \mu^-$ zur e^- Quark Streuung

9. Vorlesung, 7.5.2010

Vorbemerkung: Wir vernachlässigen in dieser Vorlesung durchgehend die Elektronmasse, d.h. $m_e = 0$



$$\frac{d\sigma}{d\Omega}_{|cms} = \frac{1}{(8\pi)^2 s} \frac{P_f}{P_i} \overline{|M|^2}$$

Herleitung s. Vorlesung 6

$$Q^2 \approx 2p_1 p_3 = E_1 E_3 - 2P_i P_f \cos \theta \Rightarrow dQ^2 = 2P_f P_i d(-\cos \theta) = \frac{P_i P_f}{\pi} d\Omega$$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma}{dQ^2} = \frac{1}{64\pi s P_i^2} \overline{|M|^2} \quad \text{lorentzinvariant!}$$

Es gilt:

$$P_i = \frac{s - \mathcal{M}^2}{2\sqrt{s}} \Rightarrow 4s P_i^2 = \bar{s}^2 \quad \text{mit } \bar{s} := s - \mathcal{M}^2 = 2p_1 p_2$$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma}{dQ^2} = \frac{1}{16\pi \bar{s}^2} \overline{|M|^2}$$

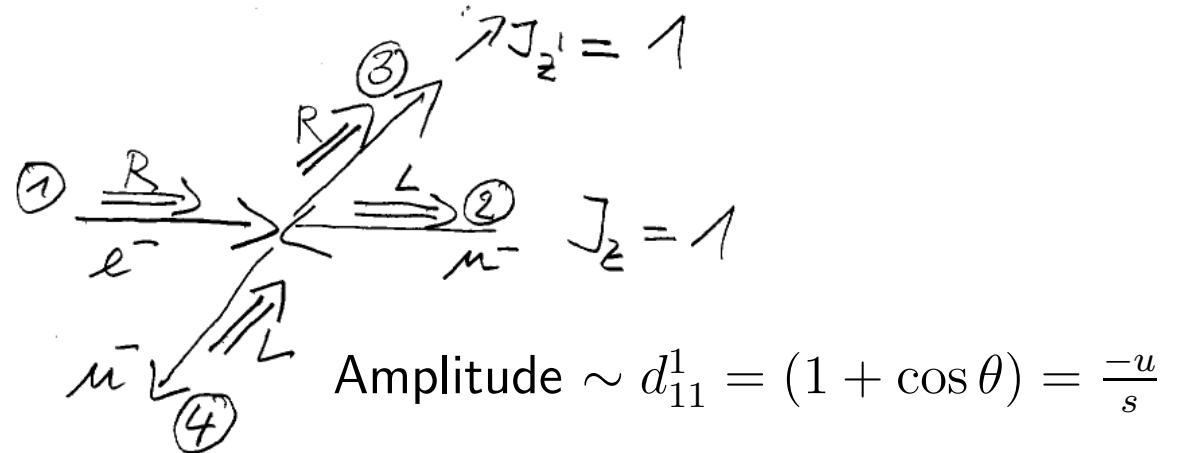
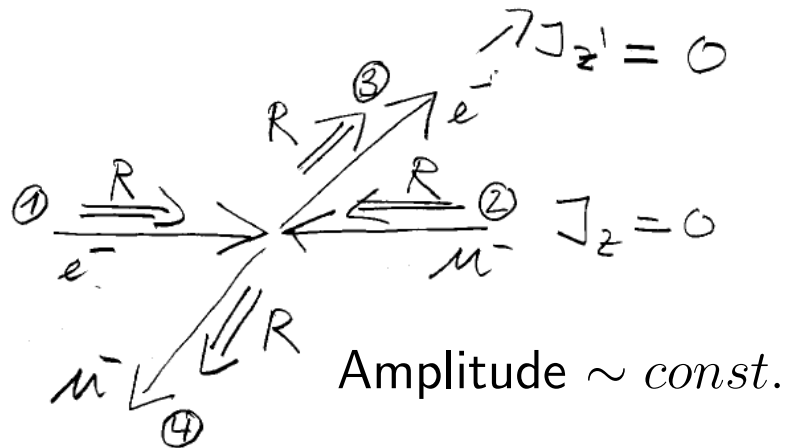
Beweis für P_i :

$$\begin{aligned} E_1 &\approx P_i, \quad E_2 = \sqrt{\mathcal{M}^2 + P_i^2} \\ \sqrt{s} &= P_i + \sqrt{\mathcal{M}^2 + P_i^2} \\ \Rightarrow s + P_i^2 - 2\sqrt{s}P_i &= P_i^2 + \mathcal{M}^2 \\ \Rightarrow P_i &= \frac{s - \mathcal{M}^2}{2\sqrt{s}} \end{aligned}$$

$e^- \mu^-$ Streuung in der Hochenergienäherung (Wiederholung)

$$\overline{|M|}^2 = \frac{e^4}{q^4} L_{\mu\nu} M^{\mu\nu} = \frac{8e^4}{q^4} \left[\underbrace{(p_1 p_2)}_{\bar{s}/2} \underbrace{(p_3 p_4)}_{\bar{s}/2} + \underbrace{(p_1 p_4)}_{\bar{u}/2} \underbrace{(p_2 p_3)}_{\bar{u}/2} - \mathcal{M}^2 \underbrace{(p_1 p_3)}_{-q^2/2} \right] \quad \text{mit } \bar{u} = u - \mathcal{M}^2$$

$$I := \frac{L_{\mu\nu} M^{\mu\nu}}{4\bar{s}^2} = \left[\frac{1}{2} + \frac{\bar{u}^2}{2\bar{s}^2} + \mathcal{M}^2 \frac{q^2}{\bar{s}^2} \right] \xrightarrow{\text{Hochenergienäherung } \mathcal{M} \approx 0} \left[\frac{1}{2} + \frac{\bar{u}^2}{2\bar{s}^2} \right]$$



Nützliche Umformungen:

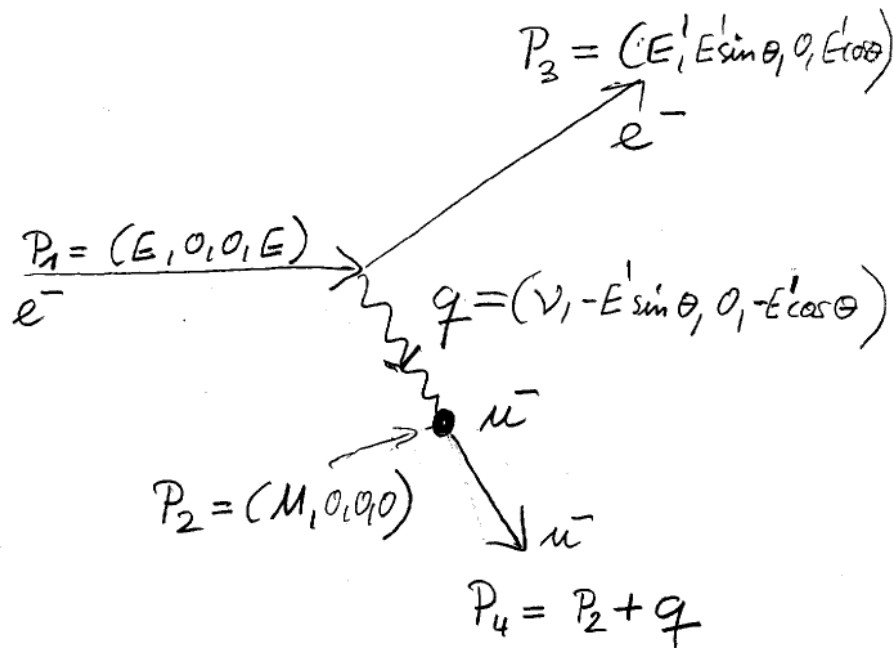
$$t + s + u \approx 2\mathcal{M}^2 \Rightarrow t = -\bar{s} - \bar{u} \quad \Rightarrow \quad \frac{t^2}{2\bar{s}^2} = \frac{(-\bar{s} - \bar{u})^2}{2\bar{s}^2} = \frac{1}{2} + \frac{\bar{u}^2}{2\bar{s}^2} + \frac{\bar{u}}{\bar{s}}$$

$$\Rightarrow I = \left[\frac{t^2}{2\bar{s}^2} - \frac{\bar{u}}{\bar{s}} + \mathcal{M}^2 \frac{q^2}{\bar{s}^2} \right]$$

$e^- \mu^-$ Streuung im Muonruhesystem

Azurechnen:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dQ^2} &= \frac{1}{16\pi \bar{s}^2} |\overline{M}|^2 = \frac{4\pi\alpha^2}{q^4} I \\ &= \frac{4\pi\alpha^2}{q^4} \left[\frac{t^2}{2\bar{s}^2} - \frac{\bar{u}}{\bar{s}} + \mathcal{M}^2 \frac{q^2}{\bar{s}^2} \right] \end{aligned}$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{s} = 2p_1 p_2 = 2ME \\ \bar{u} = -2p_2 p_3 = -2ME' \\ q^2 = -2p_1 p_3 = -4EE' \sin^2 \frac{\theta}{2} \\ q^2 = -2M \underbrace{(E - E')}_{=\nu} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \frac{t^2}{2\bar{s}^2} = q^2 \frac{q^2}{2\bar{s}^2} = -\frac{E'}{E} \frac{q^2}{2M^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \\ -\frac{\bar{u}}{\bar{s}} = \frac{E'}{E} \\ \mathcal{M}^2 \frac{q^2}{\bar{s}^2} = -\frac{E'}{E} \sin^2 \frac{\theta}{2} \end{array}$$

Beweis für zweite q^2 Formel: $\mathcal{M}^2 = (p_2 + q)^2 = \mathcal{M}^2 + 2p_2 q + q^2 \Rightarrow q^2 = -2M(E - E')$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\sigma}{dQ^2} = \frac{4\pi\alpha^2}{Q^4} \frac{E'}{E} \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} + \frac{Q^2}{2M^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)}$$

E' ausrechnen:

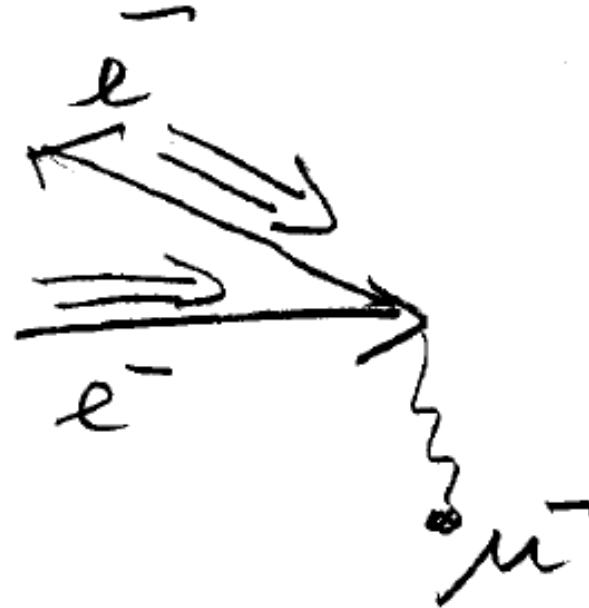
$$\begin{aligned} -4EE' \sin^2 \frac{\theta}{2} &= -2M(E - E') \\ E'(E \sin^2 \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2}M) &= \frac{1}{2}ME \\ E' &= \frac{E}{1 + \frac{2E}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2}} \end{aligned}$$

$e^- \mu^-$ Streuung im Muonruhesystem



Mottstreuung:

$$\text{Amplitude} \sim d_{1/2\ 1/2}^{1/2} = \cos \frac{\theta}{2}$$

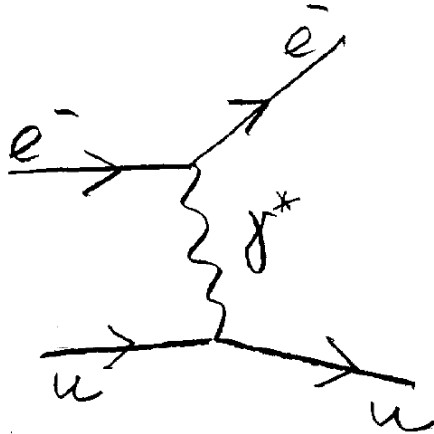


Modifikation durch Wechselwirkung mit magnetischem Moment des Muons $\rightarrow$ Helizität des Elektrons wechselt!

$$\text{Amplitude: } \sim d_{1/2\ -1/2}^{1/2} = \sin \frac{\theta}{2}$$

e^-u Quark Streuung

Wenn es freie Quarks gäbe...

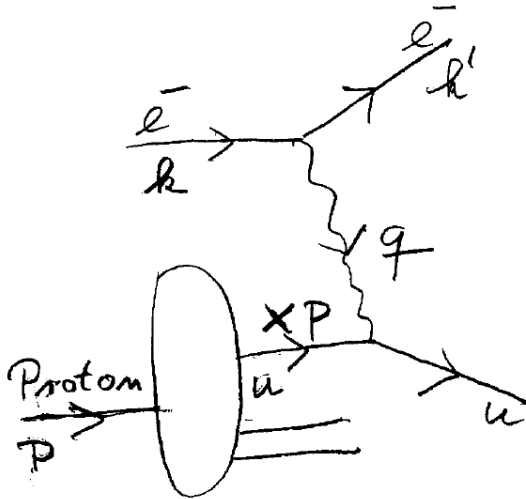


Mit $s_q = (p_e + p_u)^2$, Quarkmasse m_u und Ladung $Q_u = 2/3$:

$$\frac{d\sigma}{dQ^2} = \frac{4\pi\alpha^2 Q_u^2}{q^4} I = \frac{4\pi\alpha^2 Q_u^2}{q^4} \left[\frac{t^2}{2\bar{s}_q^2} - \frac{\bar{u}}{\bar{s}_q} + \frac{m_u^2 q^2}{\bar{s}_q^2} \right]$$

$$\underbrace{\approx}_{m_u \sim 0} \frac{4\pi\alpha^2 Q_u^2}{q^4} \left[\frac{t^2}{2s_q^2} - \frac{u}{s_q} \right] = \frac{4\pi\alpha^2}{q^4} \left[\frac{t^2}{2s_q^2} + 1 + \frac{t}{s_q} \right]$$

Inelastische Elektronprotonstreuung bei HERA im Quark Parton Modell:



$$s = (p + k)^2 \approx 2pk$$

xp = Viererimpuls des einlaufenden u Quarks, ($x \equiv$ Impulsbruchteil)

$$s_q = (xp + k)^2 \approx 2xpk = xs$$

$q = (k - k')$ Photonviererimpuls

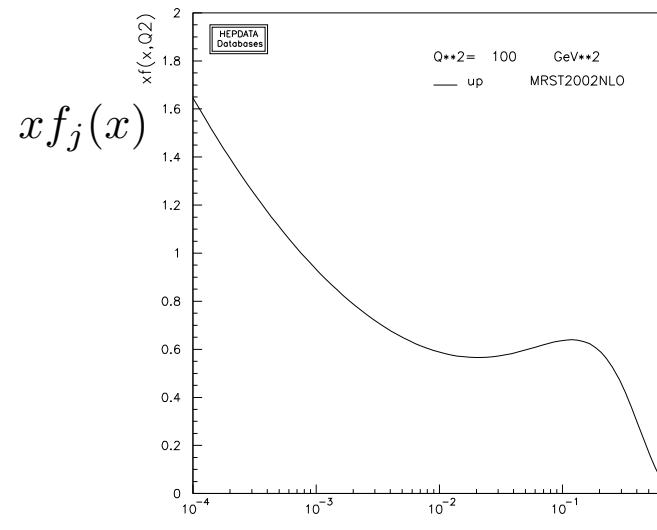
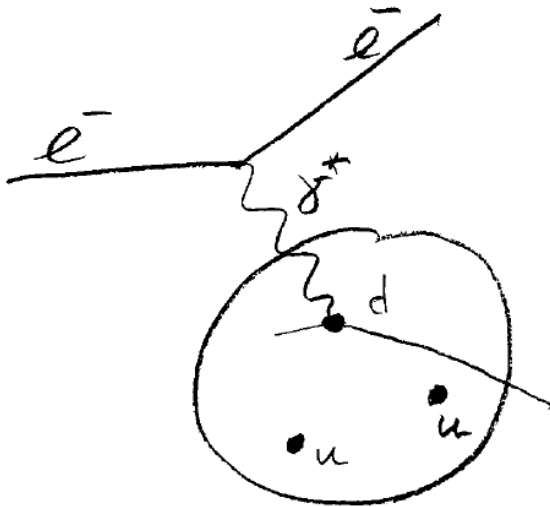
$$Q^2 = -q^2 \approx -2kk' \quad (\equiv \text{Auflösung des Photons})$$

$$y = \frac{pq}{pk} \quad (\equiv \text{Energie des Photons})$$

$$(xp + q)^2 = 2xpq + q^2 \approx 0 \Rightarrow x = \frac{Q^2}{2pq}$$

$$Q^2 = 2kp \frac{pq}{pk} \frac{Q^2}{2pq} = syx \Rightarrow y = \frac{Q^2}{sx} = \frac{Q^2}{s_q} = \frac{-t}{s_q}$$

Inelastische Elektronprotonstreuung und Formfaktoren



Annahme: inkohärente Streuung an verschiedenen Partonen

f_j : Wahrscheinlichkeit Parton j mit Impulsanteil zwischen x und $x+dx$ zu finden

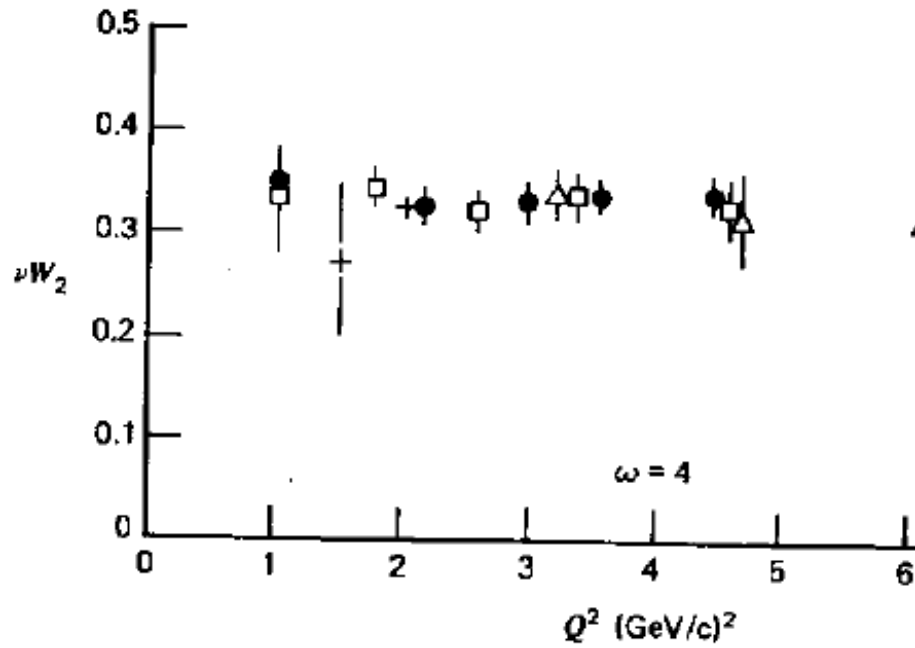
$$\frac{d^2\sigma}{dQ^2 dx} = \frac{4\pi\alpha^2}{q^4} \left(1 - y + \frac{1}{2}y^2\right) \sum_j Q_j^2 f_j(x)$$

Definiere Strukturfunktion: $F_2 := x \sum_j Q_j^2 f_j(x) \Rightarrow \frac{d\sigma}{dQ^2 dx} = \frac{4\pi\alpha^2}{Q^4 x} (1 - y + \frac{1}{2}y^2) F_2(x)$

Allgemeinerer Ansatz:
$$\frac{d^2\sigma}{dQ^2 dx} = \frac{4\pi\alpha^2}{Q^4 x} \left[\underbrace{(1-y)}_{\sim \cos^2 \frac{\theta}{2}} \overbrace{F_2(x)}^{\text{elektr. Formfaktor}} + \underbrace{xy^2}_{\sim \sin^2 \frac{\theta}{2}} \overbrace{F_1(x)}^{\text{magn. Formfaktor}} \right]$$

Wären Quarks Bosonen: $F_1 = 0$, Spin 1/2: $2xF_1 = F_2$ (Callan Gross Relation, experimentell bestätigt!)

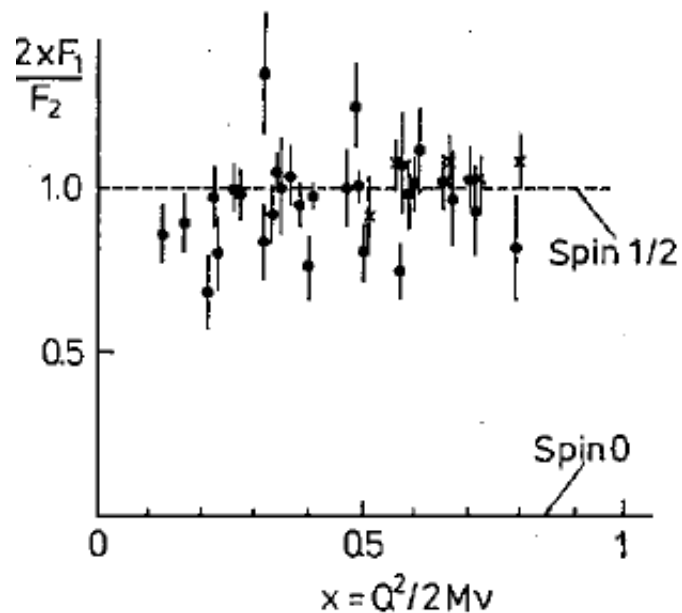
Bjorken Scaling und Callan Gross Relation



SLAC Daten

$$\nu\omega_2 = F_2, \quad \omega = \frac{1}{x}$$

Die Partondichten hängen bei dem getesteten $x = 0.25$ im Bereich $1 < Q^2 < 6$ GeV² kaum von der Auflösungsskala Q^2 ab, was man als "Bjorken Scaling" bezeichnet. (Dies ist bei den viel kleineren x Werten und höheren Auflösungsskalen Q^2 bei HERA ganz anders! → durch Effekte der QCD (Gluonabstrahlungen))



SLAC Daten