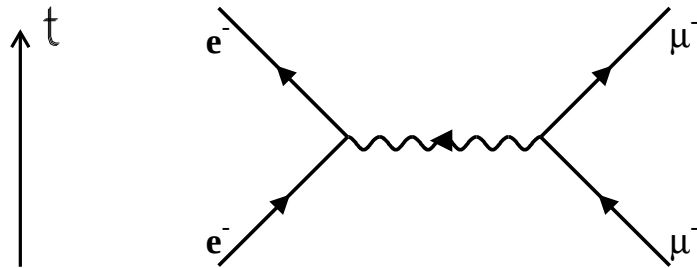


$e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$ Streuung: $\rightarrow$ Crossing in $e^- e^+ \rightarrow \mu^- \mu^+$

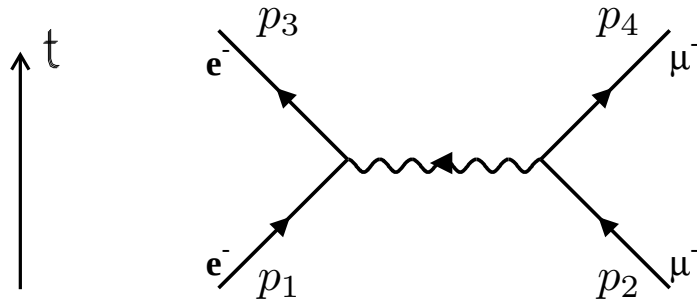
8. Vorlesung, 30.4.2010



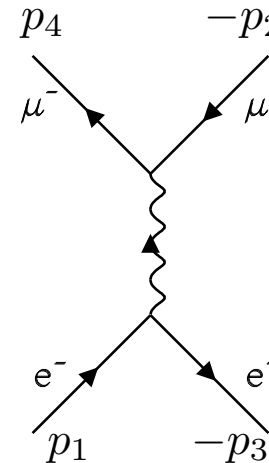
$$\overline{|M|^2} = 2 e^4 \frac{s^2 + u^2}{t^2}$$

mit $t = q^2$

Crossing Symmetrie:



$\equiv$



Muonpaarzeugung an $e^+ e^-$ Collidern,
experimentell wichtiger Prozess!

$$s = (p_1 + p_2)^2 \rightarrow (p_1 - p_3)^2 \quad \Rightarrow \quad s \text{ und } t \text{ vertauschen}$$

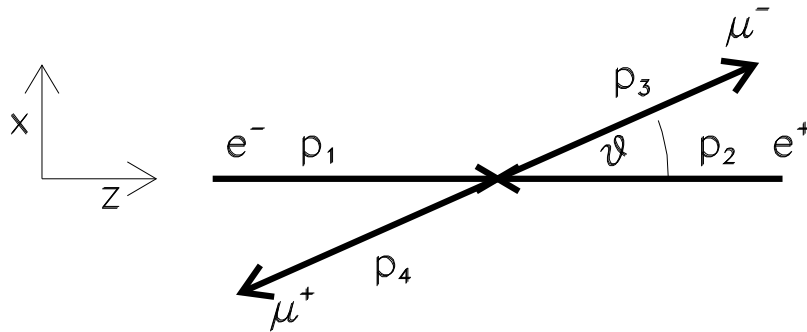
$$t = (p_1 - p_3)^2 \rightarrow (p_1 + p_2)^2$$

$$u = (p_1 - p_4)^2 \rightarrow (p_1 - p_4)^2$$

$$\rightarrow \overline{|M|^2}_{e^- e^+ \rightarrow \mu^- \mu^+} = 2 e^4 \frac{t^2 + u^2}{s^2}$$

Berechnung $e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+$ Wirkungsquerschnitt (Hochenergiefall)

Situation am Collider:



$$p_1 = (E, 0, 0, E)$$

$$p_2 = (E, 0, 0, -E)$$

$$p_3 = (E, E \sin \theta, 0, E \cos \theta)$$

$$p_4 = (E, -E \sin \theta, 0, -E \cos \theta)$$

$$s = (p_1 + p_2)^2 \approx 2p_1 p_2 = 4E^2$$

$$t = (p_1 - p_3)^2 \approx -2p_1 p_3 = -2E^2(1 - \cos \theta) = -\frac{s}{2}(1 - \cos \theta)$$

$$u = (p_1 - p_4)^2 \approx -2p_1 p_4 = -2E^2(1 + \cos \theta) = -\frac{s}{2}(1 + \cos \theta)$$

$$\Rightarrow \overline{|M|^2} = 2e^4 \frac{(1 - \cos \theta)^2 + (1 + \cos \theta)^2}{4} = e^4(1 + \cos^2 \theta)$$

$$\text{mit } \alpha = \frac{e^2}{4\pi\hbar c} \quad \Rightarrow \quad \overline{|M|^2} = (4\pi\alpha)^2(1 + \cos^2 \theta)$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}|_{c.m.s} = \frac{1}{64\pi^2} \frac{1}{s} \overline{|M|^2} = \frac{\alpha^2}{4s}(1 + \cos^2 \theta)$$

$$\sigma(e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+) = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega =$$

Helizitätserhaltung bei hohen Energien

Helizität $\lambda = \vec{s} \cdot \vec{P} / |\vec{P}|$

≡ Spinprojektion auf Flugrichtung, up = Rechtsschraube, down = Linksschraube

Im Grenzfall hoher Energien (Massen vernachlässigbar) gilt für beliebigen Spinor Ψ

$$\gamma^5 \Psi = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} \cdot \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \cdot \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \end{pmatrix} \Psi \quad \text{mit} \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \gamma^5 \equiv \text{Helizitätsoperator!}$$

Bei hohen Energien haben unsere vier Basisspinoren folgende Form (wähle $z || \vec{P}$):

$$u_1 = \sqrt{E} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \sqrt{E} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \sqrt{E} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \sqrt{E} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Chiralitäts-Projektionsoperator: $P_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma^5) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

	u_1	u_2	v_1	v_2
<i>Impuls/Spin</i>	$\uparrow\uparrow$	$\uparrow\downarrow$	$\downarrow\downarrow$	$\downarrow\uparrow$
P_L	$P_L u_1 = 0$	$P_L u_2 = u_2$	$P_L v_1 = v_1$	$P_L v_2 = 0$
P_R	$P_R u_1 = u_1$	$P_R u_2 = 0$	$P_R v_1 = 0$	$P_R v_2 = v_2$

Achtung: das linkshändige v_1 mit negativer Energie, Impuls und Spin nach unten
 ≡ **rechtshändiges** Positron mit Impuls und Spin nach oben (und $v_2 \equiv$ **linkshändiges** Positron)

Helizitätserhaltung der elektromagnetischen WW

Elm. Wechselwirkung $\sim j^\mu A_\mu$ mit $j^\mu = \bar{u}\gamma^\mu u$

Behauptung: diese WW ist helizitätserhaltend: Beweis:

Mit $1 = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) + \frac{1}{2}(1 + \gamma^5) = P_L + P_R$

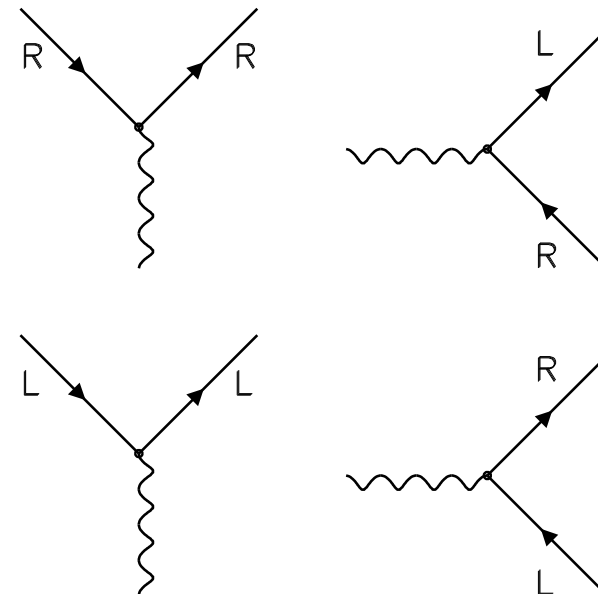
$$\bar{u}\gamma^\mu u = (\bar{u}_L + \bar{u}_R)\gamma^\mu(u_L + u_R) \quad \underbrace{\hspace{1cm}}_{\text{zu zeigen}} \quad (\bar{u}_L\gamma^\mu u_L) + (\bar{u}_R\gamma^\mu u_R)$$

$$\bar{u}_L = u_L^\dagger \gamma^0 = u^\dagger \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)\gamma^0 = \bar{u} \frac{1}{2}(1 + \gamma^5)$$

$$\rightarrow \bar{u}_L\gamma^\mu u_R = \frac{1}{4}\bar{u} [(1 + \gamma^5)\gamma^\mu(1 + \gamma^5)] u$$

$$= \frac{1}{4}\bar{u}\gamma^\mu [(1 - \gamma^5)(1 + \gamma^5)] u = 0$$

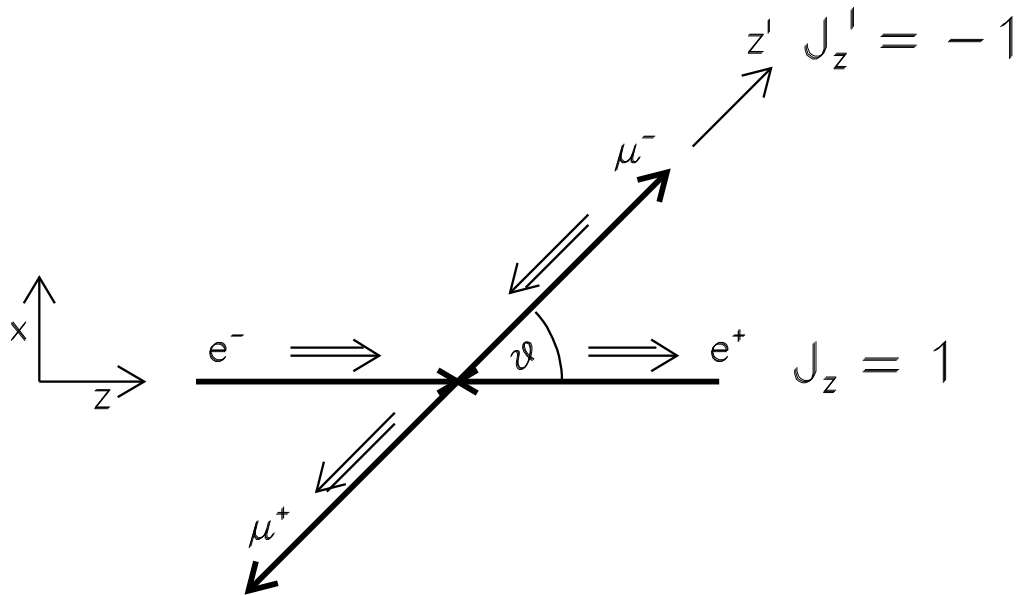
$\Rightarrow$ keine Spinflips erlaubt



Erlaubte Vertices zu $o(m/E)$

Berechnung des Matrixelementes für $e^-e^+ \rightarrow \mu^-u^+$ über LL, RR Amplituden

Amplituden für die Streuung $\sim$ Wahrscheinlichkeitsamplituden dass
wenn im rotierten System $J'_z = \lambda' \rightarrow$ dann im unrotierten System $J_z = \lambda$



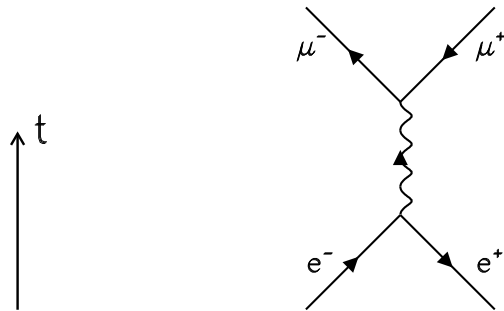
Amplituden $M \sim d_{\lambda'\lambda}^J(\theta) = \langle j\lambda' | e^{-i\theta J_y} | j\lambda \rangle$ $d = \text{Rotationsmatrizen}^a$

$\lambda, \lambda' = \text{Nettohelicitäten} \parallel \text{ zur } z \text{ und } z' \text{ Achse}$

$$\left. \begin{aligned} d_{11}^1(\theta) &= d_{-1-1}^1(\theta) = \frac{1}{2}(1 + \cos \theta) = -\frac{u}{s} \\ d_{1-1}^1(\theta) &= d_{-11}^1(\theta) = \frac{1}{2}(1 - \cos \theta) = -\frac{t}{s} \end{aligned} \right\} \Rightarrow |M|^2 \sim \frac{u^2 + t^2}{s^2}$$

^amehr zu den Rotationsmatrizen und ihrer Bedeutung: siehe D. Perkins: Introduction to HEP, Appendix c

Myon-Paarerzeugung $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ mit Spinoren gerechnet



$$M = +ie^2 \frac{1}{q^2} [\bar{v}(p_2)\gamma_\mu u(p_1)] [\bar{u}(p_4)\gamma^\mu v(p_3)]$$

↓ Unterschied zu u

$$|M|^2 = \left(\frac{e^4}{q^4}\right) \underbrace{L_{\mu\nu}}_{\text{Elektron}} \underbrace{M^{\mu\nu}}_{\text{Myon}}$$

$$\sum_{s_1, s_2} v\bar{v} = (\not{p} - m)$$

$$\sum_{s_1, s_2} u\bar{u} = (\not{p} + m)$$

$$\begin{aligned} L_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \sum_{s_1, s_2} [\bar{v}(p_2)\gamma_\mu u(p_1)] [\bar{u}(p_1)\gamma_\nu v(p_2)] = \frac{1}{2} \text{Spur} [\gamma_\mu (\not{p}_1 + m) \gamma_\nu (\not{p}_2 - m)] \\ &= 2 [p_{1\mu} p_{2\nu} + p_{1\nu} p_{2\mu} - (p_1 p_2) g_{\mu\nu} - m^2 g_{\mu\nu}] \\ &\quad \text{"+" bei } e^+ \mu^- \rightarrow e^- \mu^+ \end{aligned}$$

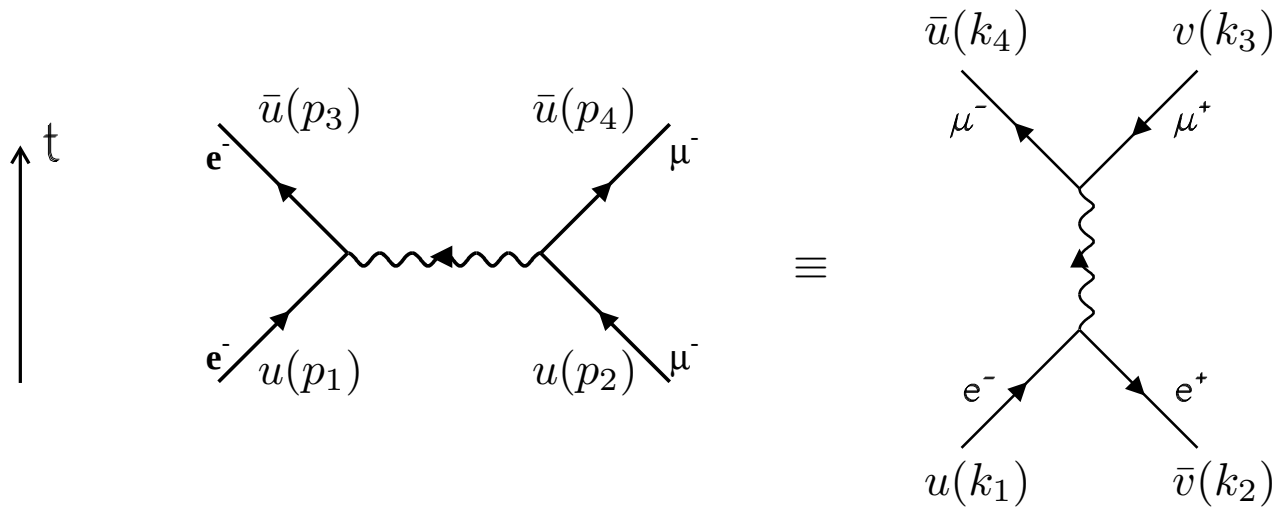
$$\text{Analog } M^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \text{Spur} [\gamma^\mu (\not{p}_4 - m) \gamma^\nu (\not{p}_3 + m)] = \dots$$

$$L_{\mu\nu} M^{\mu\nu}|_{e^- e^+ \rightarrow \mu^- \mu^+} = 8 [(p_1 p_4)(p_2 p_3) + (p_1 p_3)(p_2 p_4) + m^2(p_3 p_4) + \mathcal{M}^2(p_1 p_2) + 2m^2 \mathcal{M}^2]$$

$$\text{Vergleiche: } L_{\mu\nu} M^{\mu\nu}|_{e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-} = 8 [(p_1 p_2)(p_3 p_4) + (p_1 p_4)(p_2 p_3) - m^2(p_2 p_4) - \mathcal{M}^2(p_1 p_3) + 2m^2 \mathcal{M}^2]$$

identisch wenn $p_2 \leftrightarrow -p_3 \Rightarrow$ Ergebnisse können durch Crossing gewonnen werden (Resultate s. oben)

Crossingregeln



$$M \sim \frac{1}{q^2} \bar{u}(p_3) \gamma_\mu u(p_1) \bar{u}(p_4) \gamma^\mu u(p_2)$$

$$M' \sim \frac{1}{q'^2} \bar{v}(k_2) \gamma_\mu u(k_1) \bar{u}(k_4) \gamma^\mu v(k_3)$$

Um M in M' zu überführen, substituiere:

$$p_2 \rightarrow -k_3 \quad u(p_2) \rightarrow v(k_3)$$

$$p_3 \rightarrow -k_2 \quad \bar{u}(p_3) \rightarrow \bar{v}(k_2)$$

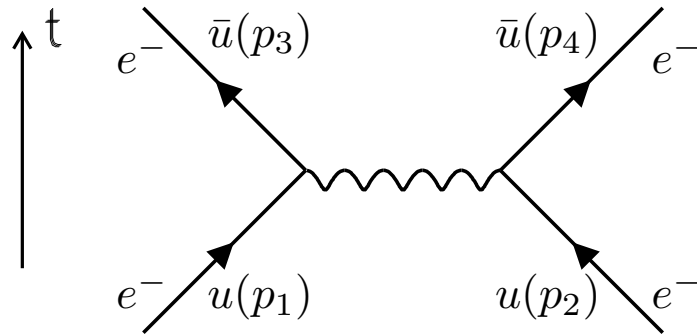
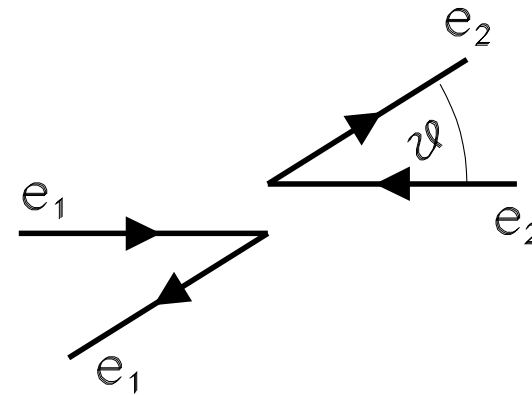
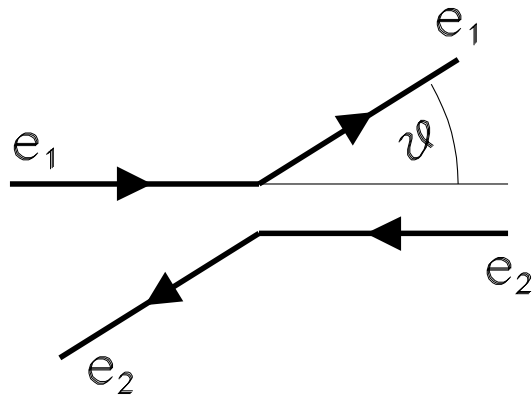
$$p_1 \rightarrow k_1 \quad p_4 \rightarrow k_4$$

$e^-e^- \rightarrow e^-e^-$ Streuung (Møller Streuung)

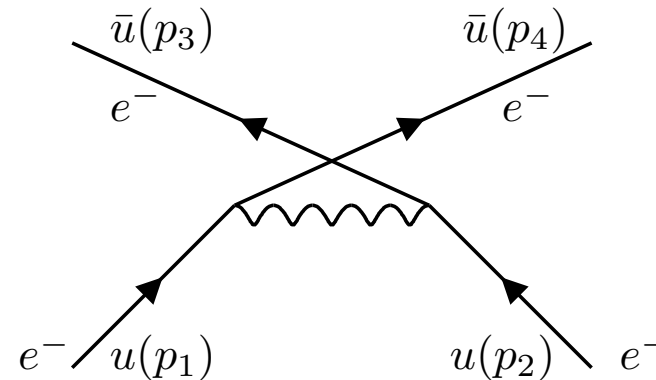
(Praktische Bedeutung: Zur Messung der e^- Polarisation (e^- Streuung an Fe-Folien))

Besonderheit: Elektronen im Endzustand sind **ununterscheidbar**

Fermionen: $\Rightarrow$ Streuamplitude muss antisymmetrisch sein bezüglich Vertauschung der Elektronen!



Asymmetrie



"t-Kanal": $q^2 = (p_1 - p_3)^2 = t$

"u-Kanal": $q'^2 = (p_1 - p_4)^2 = u$

$$\underbrace{ie^2 \left[\frac{1}{q^2} \bar{u}(p_3) \gamma_\mu u(p_1) \bar{u}(p_4) \gamma^\mu u(p_2) \right]}_{M_1}$$

$$- \underbrace{ie^2 \left[\frac{1}{q'^2} \bar{u}(p_4) \gamma_\mu u(p_1) \bar{u}(p_3) \gamma^\mu u(p_2) \right]}_{M_2}$$

Møller Streuung Wirkungsquerschnitt:

Matrixelement:

$$M = M_1 - M_2 \Rightarrow |M|^2 = M \cdot M^* = (M_1 - M_2)(M_1 - M_2)^*$$

$$= |M_1|^2 + |M_2|^2 - \underbrace{2\text{Re}(M_1 M_2^*)}_{\text{Interferenzterm}}$$

Im folgenden Hochenergienäherung:

$$\overline{|M_1|^2} = 2e^4 \frac{s^2 + u^2}{t^2}, \quad \overline{|M_2|^2} = 2e^4 \frac{s^2 + t^2}{u^2}$$

$$\overline{M_1 M_2^*} = \frac{e^4}{tu} \frac{1}{4} \sum_{s_1, s_2} \sum_{s_3, s_4} [\bar{u}(p_3) \gamma_\mu \underbrace{u(p_1)}_{\not{p}_1}] [\bar{u}(p_1) \gamma_\nu \underbrace{u(p_4)}_{\not{p}_4}] [\bar{u}(p_4) \gamma^\mu \underbrace{u(p_2)}_{\not{p}_2}] [\bar{u}(p_2) \gamma^\nu \underbrace{u(p_3)}_{\not{p}_3}]$$

$$\approx \frac{e^4}{4tu} \text{Spur}(\gamma_\mu \not{p}_1 \gamma_\nu \not{p}_4 \gamma^\mu \not{p}_2 \gamma^\nu \not{p}_3) = -\frac{8e^4}{tu} (p_1 p_2)(p_3 p_4) \approx -2e^4 \frac{s^2}{tu}$$

$$\overline{|M|^2} = 2e^4 \left[\frac{s^2 + u^2}{t^2} + \frac{s^2 + t^2}{u^2} - 2 \frac{s^2}{tu} \right]$$

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{cms} = \frac{\alpha^2}{2s} \left\{ \frac{1 + \cos^4 \frac{\theta}{2}}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} + \frac{1 + \sin^4 \frac{\theta}{2}}{\cos^4 \frac{\theta}{2}} + \frac{2}{\sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2}} \right\}$$

TABLE 6.1
Leading Order Contributions to Representative QED Processes

	Feynman Diagrams		$ \overline{\mathcal{M}} ^2/2e^4$		
	Forward peak	Backward peak	Forward	Interference	Backward
Møller scattering $e^-e^- \rightarrow e^-e^-$			$\frac{s^2 + u^2}{t^2} + \frac{2s^2}{tu} + \frac{s^2 + t^2}{u^2}$		
(Crossing $s \leftrightarrow u$)					
Bhabha scattering $e^-e^+ \rightarrow e^-e^+$			Forward	Interference	Time-like
			$\frac{s^2 + u^2}{t^2} + \frac{2u^2}{ts} + \frac{u^2 + t^2}{s^2}$		
$e^-\mu^- \rightarrow e^-\mu^-$			$\frac{s^2 + u^2}{t^2}$		
(Crossing $s \leftrightarrow t$)					
$e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+$					$\frac{u^2 + t^2}{s^2}$