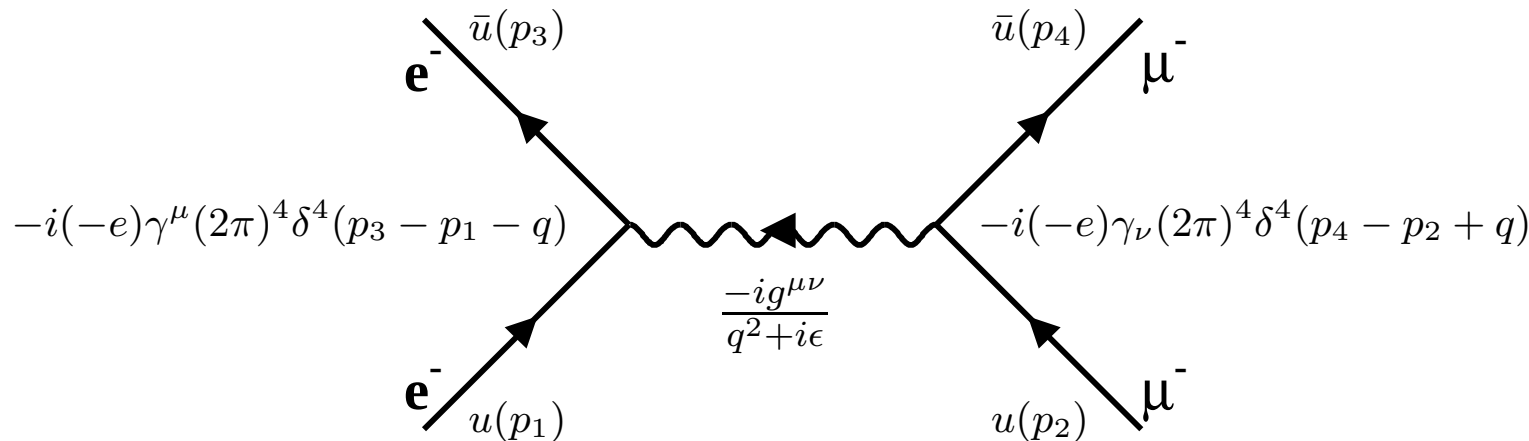


Wiederholung: Ziel Matrixelement M eines Prozesses

6. Vorl., 23.4.2010

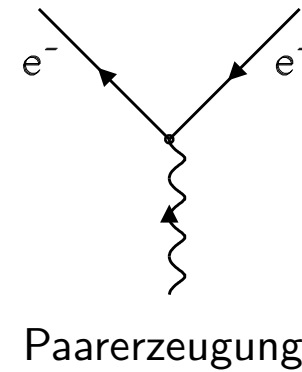
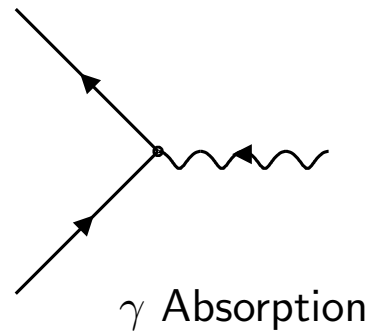
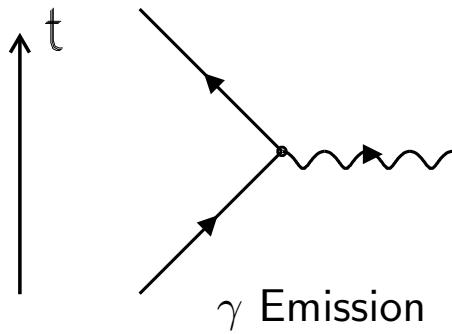


- ① Diagramm aufzeichnen
- ② Pfeile einfügen
- ③ $u, \bar{u}, v, \bar{v}$ Spinoren mit Impulsen verteilen, Propagatoren
- ④ Faktoren für die Vertices
- ⑤ über innere Linien integrieren $\int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4}$

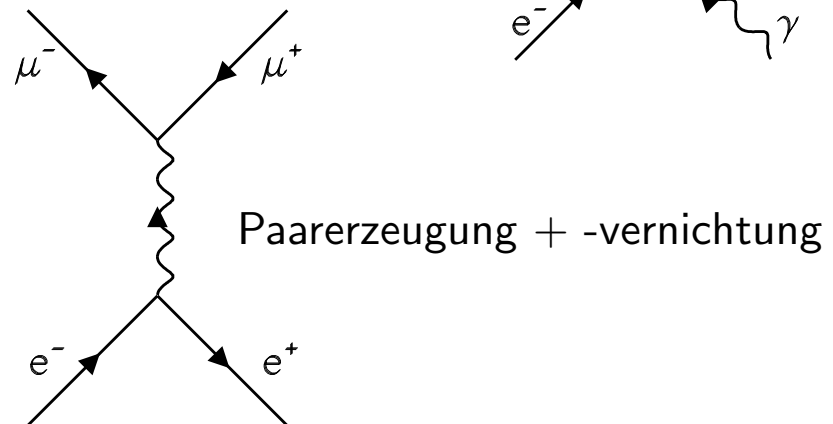
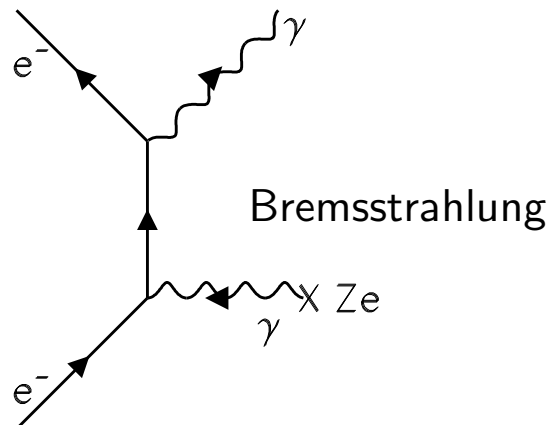
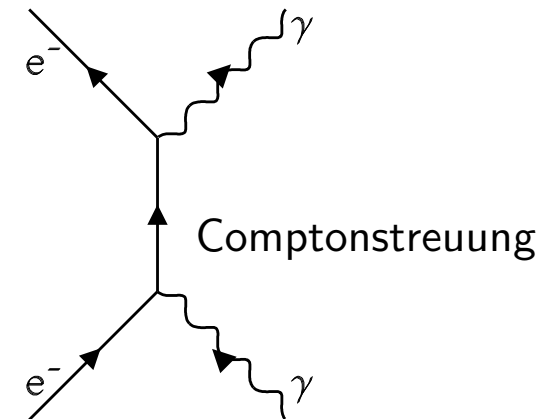
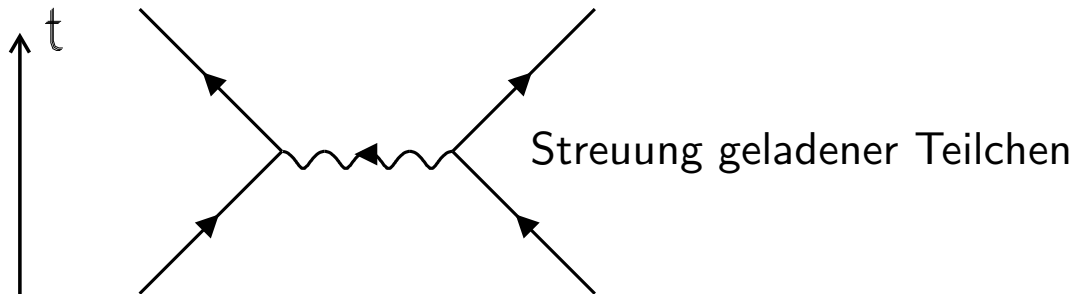
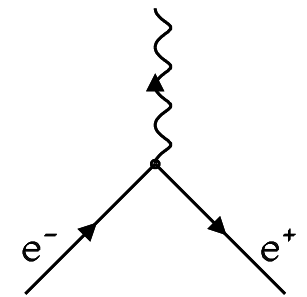
$$S_{fi}^{(1)} = ie^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^4(p_4 - p_2 + q) \underbrace{\bar{u}(p_3) \gamma_\mu u(p_1)}_{J_\mu = \text{Elektronstrom}} \frac{g^{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon} (2\pi)^4 \delta^4(p_3 - p_1 - q) \underbrace{\bar{u}(p_4) \gamma_\nu u(p_2)}_{J_\nu = \text{Muonstrom}}$$

$$S_{fi}^{(1)} = (2\pi)^4 \delta^4(p_3 + p_4 - p_1 - p_2) \underbrace{ie^2 \bar{u}(p_3) \gamma_\mu u(p_1) \frac{1}{q^2} \bar{u}(p_4) \gamma^\mu u(p_2)}_M \quad \text{mit } q = p_1 - p_3$$

Elementarprozesse



Paarvernichtung



Berechnung von Zerfallsraten und Wirkungsquerschnitten aus dem Matrixelement M :

Notationshinweis: wir benutzen kleine p_i für Viererimpulse und grosse P_i für Dreierimpulse

1. Goldene Regel für Zerfälle $1 \longrightarrow 2 + 3 + 4 + \dots n$

(Hier ohne Herleitung, siehe Schmüser S. 51 ff für $d\sigma$)

$$d\Gamma = |M|^2 \frac{S}{2\hbar m_1} \left[\left(\frac{c d^3 P_2}{(2\pi)^3 2E_2} \right) \left(\frac{c d^3 P_3}{(2\pi)^3 2E_3} \right) \cdots \left(\frac{c d^3 P_n}{(2\pi)^3 2E_n} \right) \right] \cdot (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_2 - p_3 - \dots - p_n)$$

S ist statistischer Faktor: $\frac{1}{j!}$ für jede Gruppe von j identischen Teilchen

2. Goldene Regel für Streuprozesse $1 + 2 \longrightarrow 3 + 4 + \dots + n$

$$d\sigma = |M|^2 \frac{\hbar^2 S}{4 \sqrt{(p_1 p_2)^2 - (m_1 m_2 c^2)^2}} \underbrace{\left[\left(\frac{c d^3 P_3}{(2\pi)^3 2E_3} \right) \left(\frac{c d^3 P_4}{(2\pi)^3 2E_4} \right) \cdots \left(\frac{c d^3 P_n}{(2\pi)^3 2E_n} \right) \right]}_{dLips, \text{ Lorentz inv. Phasenraum}} \cdot (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4 - \dots - p_n)$$

$$F = 4 \sqrt{(\quad)^2 - (\quad)^2} \quad \text{Lorentz-invarianter Flussfaktor}$$

Im Folgenden:

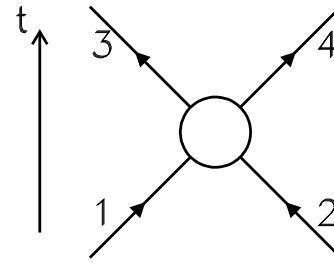
Ziel ist die komplette Herleitung des Wirkungsquerschnittes für den Streuprozess $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$
(diese Reaktion ist vom Typ $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$)

Schritte:

1. Bestimme Flussfaktor F für einlaufende Teilchen
2. Führe Phasenraumintegration aus über die auslaufenden Impulse, ersetze dabei Integration über Impulse durch Integration über Energie und Raumwinkel
3. Berechne Matrixelementquadrat $|M|^2$ unter Berücksichtigung aller möglichen Spineinstellungen

Bemerkungen zum Flussfaktor:

$$d\sigma \sim \frac{1}{F}$$



↓ Dichte der Targetteilchen

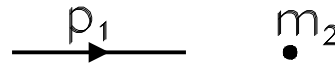
$$F = |j_{\text{ein}}| \cdot n_{\text{target}} = \frac{|\vec{v}_1|}{V/2 E_1} \cdot \frac{2E_2}{V} = \frac{|\vec{v}_1| 4E_1 E_2}{V^2}$$

↑ Stromdichte der einl. Teilchen

($u^+ u = 2E$ Normierung)

zu zeigen $F = \frac{4}{V^2} \sqrt{(p_1 p_2)^2 - (m_1 m_2)^2}$

Beweis im Laborsystem:



$$p_1 = (E_1, \vec{P}_1), \quad p_2 = (m_2, 0), \quad \Rightarrow p_1 p_2 = E_1 m_2$$

$$F = \frac{4}{V^2} \sqrt{E_1^2 m_2^2 - m_1^2 m_2^2} = \frac{4}{V^2} m_2 |\vec{P}_1| = \frac{4}{V^2} m_2 |\vec{v}_1| E_1 = \frac{4 |\vec{v}_1| E_1 E_2}{V^2}$$

Ohne Rechnung: im Schwerpunktsystem (CMS)

$F_{\text{cms}} = \frac{4}{V^2} P_i \sqrt{s}$	$s = (p_1 + p_2)^2$ $ \vec{P}_1 = \vec{P}_2 = P_i$
---	---

Ziel: Differenzieller WQ $\rightarrow$ ausintegrieren von $dLips$ im CMS:

$$1 + 2 \rightarrow 3 + 4 \quad d\sigma = |M^2| \frac{1}{4P_i \sqrt{s}} \frac{d^3 P_3}{(2\pi)^3 2E_3} \frac{d^3 P_4}{(2\pi)^3 2E_4} \cdot 2\pi^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)$$

$$\int d^3 P_4 \text{ kann ausgeführt werden } \vec{P}_3 = -\vec{P}_4, \quad |\vec{P}_3| = |\vec{P}_4| = P_f$$

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (E_1 + E_2)^2 = (p_3 + p_4)^2 = (E_3 + E_4)^2$$

$$\begin{aligned} & \int d^3 P_4 \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{d^3 P_3}{4E_3 E_4} \delta(\sqrt{s} - E_3 - E_4) \delta^3(\vec{P}_3 + \vec{P}_4 - \vec{P}_2 - \vec{P}_1) \cdot |M^2| \frac{1}{4P_i \sqrt{s}} \\ &= \frac{d^3 P_3}{4E_3 E_4} \delta(\sqrt{s} - E_3 - E_4) \cdot |M^2| \frac{1}{4P_i \sqrt{s}} \end{aligned}$$

Ersetze Impuls- durch Energieintegration:

$$\text{mit } E_3 = \sqrt{|P_f|^2 + m_3^2}, \quad E_4 = \sqrt{|P_f|^2 + m_4^2} \quad \Rightarrow \quad dE_3 = \frac{P_f}{E_3} dP_f, \quad dE_4 = \frac{P_f}{E_4} dP_f$$

$$W = E_3 + E_4, \quad dW = dE_3 + dE_4 = dE_3 \left(1 + \frac{E_3}{E_4}\right) = dE_3 \frac{W}{E_4}$$

$$\Rightarrow \frac{d^3 P_3}{E_3 E_4} = \frac{P_f^2 dP_f d\Omega}{E_3 E_4} = \frac{P_f E_3 dE_3 d\Omega}{E_3 E_4} = P_f \frac{dW}{W} d\Omega$$

Ausintegrieren über Energie: $\rightarrow$ differenz. WQ pro Raumwinkel

$$\begin{aligned} d\sigma &= \int \frac{1}{4P_i\sqrt{s}} |M|^2 \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{d^3P_3}{4E_3E_4} \delta(\sqrt{s} - W) \\ &= \int \frac{1}{4P_i\sqrt{s}} |M|^2 \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{P_f dW d\Omega}{4W} \delta(\sqrt{s} - W) \\ &= \frac{1}{4P_i\sqrt{s}} |M|^2 \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{P_f}{4\sqrt{s}} d\Omega \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega}|_{cms} = \frac{1}{64\pi^2} \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{P_f}{P_i} |M|^2} \quad s = (p_1 + p_2)^2$$

$$\text{Hochenergiegrenze: } \frac{P_f}{P_i} \rightarrow 1 \quad \sigma \sim \frac{1}{s} \\ (m \ll \sqrt{s})$$

Jetzt: $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ für $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$

Berechnung von $|M|^2 = M \cdot M^*$

$$M = ie^2 \bar{u}(p_3) \gamma_\mu u(p_1) \frac{1}{q^2} \bar{u}(p_4) \gamma^\mu u(p_2)$$

$$\begin{array}{cc} u_1(p), & u_2(p) & (\text{und } v_1(p), \ v_2(p)) \\ \text{Spin } \uparrow \uparrow \uparrow p & \downarrow \uparrow p \end{array}$$

unterscheiden sich durch Spinstellung

Streuung von unpolarisierten Teilchen:

- Mittelung über die Spins der Teilchen im Anfangszustand

$$|M|^2 = \frac{1}{4} \sum_{S_1, S_2} |M|^2$$

- Wenn Polarisation nicht beobachtet:

Summation über alle möglichen Spins im Endzustand

$$|M|^2 = \frac{1}{4} \sum_{S_1, S_2} \sum_{S_3, S_4} |M|^2 = 2e^4 \frac{s^2 + u^2}{t^4} \text{ nächstes Mal Beweis}$$