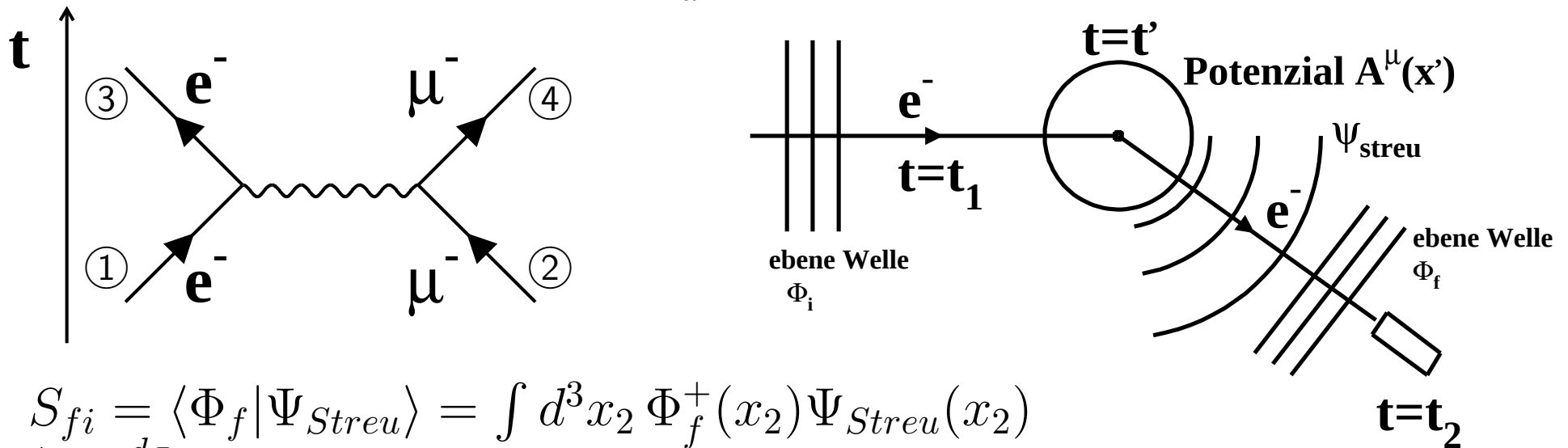


Ziel: Wirkungsquerschnitt ($\sigma, \frac{d\sigma}{d\Omega}$) für $e^- + \mu^- \rightarrow e^- + \mu^-$



$$S_{fi} = \langle \Phi_f | \Psi_{Streu} \rangle = \int d^3x_2 \Phi_f^+(x_2) \Psi_{Streu}(x_2)$$

$\downarrow \sigma, \frac{d\sigma}{d\Omega}$

Ψ_{Streu} lässt sich in Störungstheorie berechnen

$$\Psi_{Streu} \approx \Psi^{(1)}(x) = \Phi_i(x) - ie \int d^4x' K(x-x') \not{A}(x') \Phi_i(x'), \quad \text{z.B. } \Phi(x) = u(p_1) e^{-ip_1 x}$$

$$S_{fi} = \underbrace{\int d^3x_2 \Phi_f^+(x_2) \Phi_i(x_2)}_{2E_i \delta_{fi}} - ie \underbrace{\int d^4x' \int d^3x_2 \Phi_f^+(x_2) K(x_2 - x') \not{A}(x') \Phi_i(x')}_{i\bar{\Phi}_f(x')}$$

$$S_{fi} = S_{fi}^{(0)} + S_{fi}^{(1)} + \dots \quad \boxed{S_{fi}^{(1)} = ie \int d^4x' \bar{\Phi}_f(x') \not{A}(x') \Phi_i(x')}$$

Zwischenergebnis, wie erhält man $\not{A}$ aus Myonstrom? $\Rightarrow$

Berechnung von A^μ aus Muonstrom $\Rightarrow$ konstruiere Photonpropagator

$$\square A^\mu(x) = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) A^\mu(x) = \underbrace{e J^\mu(x)}$$

(Lorentz-Eichung $\partial_\mu A^\mu = 0$)

Viererstrom eines Teilchens mit Ladung $+e$

Sei $D^{\mu\nu}$ eine Lösung von:

$$\square D^{\mu\nu}(x - x') = g^{\mu\nu} \delta^4(x - x')$$

Dann gilt:

$$A^\mu(x) = e \int d^4x' D^{\mu\nu}(x - x') J_\nu(x')$$

Berechnung von $D^{\mu\nu}(x - x')$

$$D^{\mu\nu}(x - x') = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \tilde{D}^{\mu\nu}(q) e^{-iq(x-x')}$$

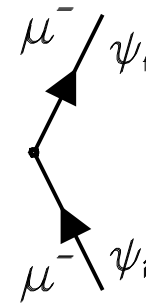
$$\square D^{\mu\nu}(x - x') = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} (-q^2) \tilde{D}^{\mu\nu}(q) e^{-iq(x-x')} \stackrel{!}{=} g^{\mu\nu} \delta^4(x - x')$$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{D}^{\mu\nu}(q) = \frac{-g^{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon}}$$

[→ Interaktive Übungsaufgabe](#)

Hier (Streuprobblem $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$) gilt:

$$\square A^\mu(x) = -e \underbrace{J^\mu(x)}_{Myon} = -e \underbrace{\bar{\Psi}_f(x)}_{Myon} \gamma^\mu \underbrace{\Psi_i(x)}_{Myon}$$



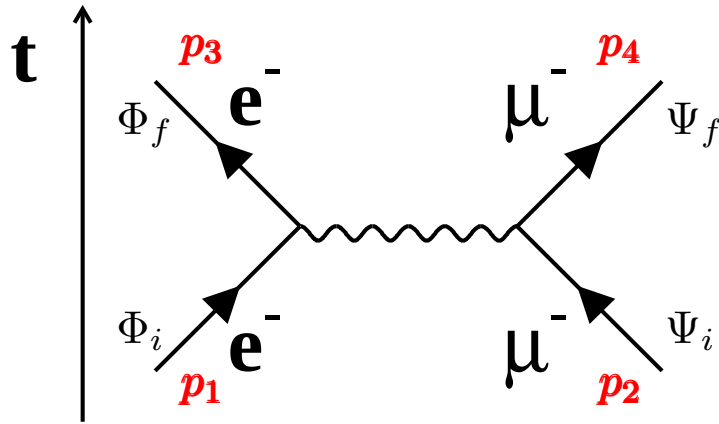
$$J^\mu(x) = \bar{u}(p_f) \gamma^\mu u(p_i) e^{i(p_f - p_i)x}$$

$$A^\mu(x) = -e \int d^4x' \underbrace{\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{-g^{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon} e^{-iq(x-x')}}_{D^{\mu\nu}(x-x')} \cdot \bar{u}(p_f) \gamma_\nu u(p_i) e^{i(p_f - p_i)x'}$$

Integration über x' kann man ausführen $(2\pi)^4 \delta^4(k) = \int d^4x' e^{-ikx'}$

$$A^\mu(x) = -e \int d^4q \delta^4(p_f - p_i + q) \frac{-g^{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon} e^{-iqx} \bar{u}(p_f) \gamma_\nu u(p_i)$$

→ Zwischenergebnis



Elektron:

$$\Phi_i(x') = u(p_1)e^{-ip_1x'}$$

$$\Phi_f(x') = u(p_3)e^{-ip_3x'}$$

Myon:

$$\Psi_i(x') = u(p_2)e^{-ip_2x'}$$

$$\Psi_f(x') = u(p_4)e^{-ip_4x'}$$

$$S_{fi}^{(1)} = +ie \int d^4x' \bar{u}(p_3)e^{+ip_3x'} \gamma_\mu A^\mu(x') u(p_1)e^{-ip_1x'}$$

$$= +ie^2 \int d^4x' \bar{u}(p_3)e^{+ip_3x'} \gamma_\mu \underbrace{\int d^4q \delta^4(p_4 - p_2 + q) \frac{g^{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon} e^{-iqx'} \bar{u}(p_4)\gamma_\nu u(p_2)}_{A^\mu(x')} u(p_1)e^{-ip_1x'}$$

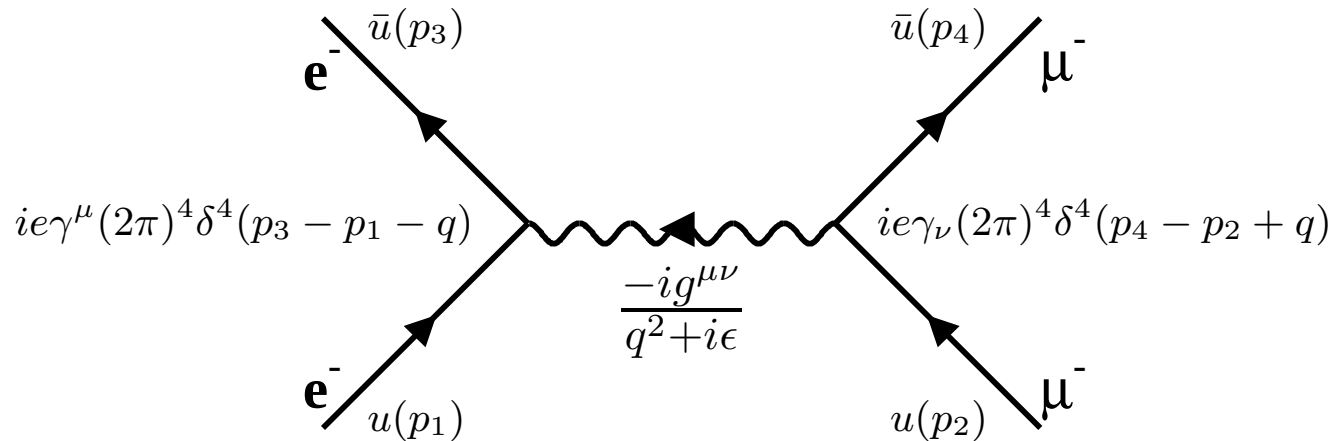
Integration über $x' \rightarrow \delta^4()$:

$$\underbrace{S_{fi}^{(1)} = ie^2 \int d^4q (2\pi)^4 \delta^4(p_4 - p_2 + q) \delta^4(p_3 - p_1 - q) \bar{u}(p_3)\gamma_\mu u(p_1) \frac{g^{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon} \bar{u}(p_4)\gamma_\nu u(p_2)}_{\equiv \text{Resultat mit Feynmanregeln}}$$

$$S_{fi}^{(1)} = ie^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_3 + p_4 - p_1 - p_2) \bar{u}(p_3)\gamma_\mu u(p_1) \frac{1}{(p_1 - p_3)^2} \bar{u}(p_4)\gamma^\mu u(p_2)$$

$$S_{fi}^{(1)} = M^{(1)} (2\pi)^4 \delta^4(p_3 + p_4 - p_1 - p_2), \quad \boxed{M^{(1)} = +ie^2 \bar{u}(p_3)\gamma_\mu u(p_1) \frac{1}{(p_1 - p_3)^2} \bar{u}(p_4)\gamma^\mu u(p_2)}$$

Feynman-Diagramme:

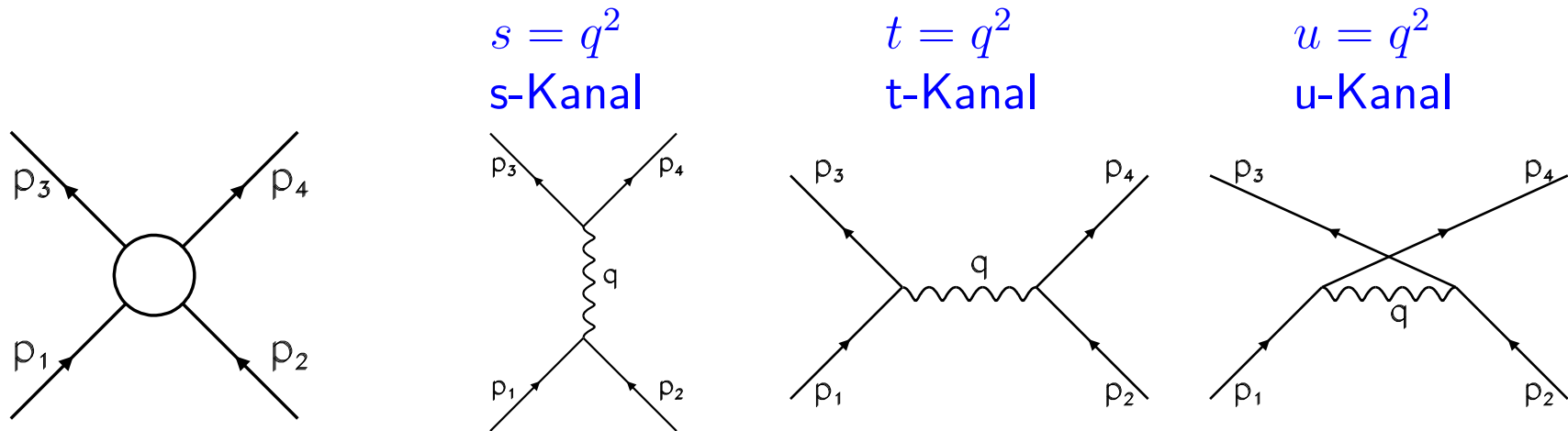


Feynman-Diagramm (QED) Konventionen:

Fermionen $\longrightarrow$	gerade Linien	
Photonen $\longrightarrow$	Wellenlinien	
einlaufendes Fermion $\longrightarrow$	$u(p)$	einl. Antifermion $\longrightarrow$ $\bar{v}(p)$
auslaufendes Fermion $\longrightarrow$	$\bar{u}(p)$	ausl. Antifermion $\longrightarrow$ $v(p)$
einlaufendes Photon (relles) $\longrightarrow$	$\epsilon_\mu(k)$ Pol.vektor $\epsilon_\mu = (\epsilon_0, \vec{\epsilon}) = (0, \vec{\epsilon})$	
ausl. Photon $\longrightarrow$	$\epsilon_\mu^*(k)$	
virtuelles Photon $\longrightarrow$	$\frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon}$	virtuelles Elektron $\longrightarrow$ $i \frac{(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$
Lepton-Photon Vertex $\longrightarrow$	$-i(\pm e)\gamma^\mu(2\pi)^4\delta^4(p_f - p_i - q)$	
integriere über innere Linien $\longrightarrow$	$\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}$	

Wie hängt $M^{(1)}$ mit σ , $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ zusammen?

Kinematik der $2 \rightarrow 2$ Streuung:



Energie- und Impulserhaltung: $\rightarrow p_1 + p_2 = p_3 + p_4$

Erinnerung: $p_i p_i = m_i^2$, $i=1,2,3,4$

2 unabhängige Größen beschreiben diese Streusituation $\Rightarrow$ **Mandelstam-Variablen:**

$$\begin{aligned}
 s &= (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1 p_2 & \text{sehr hohe Energie} & \approx 2p_1 p_2 \\
 t &= (p_1 - p_3)^2 = (p_2 - p_4)^2 = p_1^2 + p_3^2 - 2p_1 p_3 & \approx & -2p_1 p_3 \\
 u &= (p_1 - p_4)^2 = (p_2 - p_3)^2 = p_1^2 + p_4^2 - 2p_1 p_4 & \approx & -2p_1 p_4
 \end{aligned}$$

Es gilt $s + t + u = \sum_{i=1}^4 m_i^2$ **zu zeigen!**

$$\begin{aligned}
 s + t + u &= (p_1 + p_2)^2 + (p_1 - p_3)^2 + (p_1 - p_4)^2 \\
 &= \underbrace{p_1^2}_{=m_1^2} + 2p_1 p_2 + \text{weiterrechnen, für } -2p_1 p_4 \text{ für } p_1 \text{ ersetzen durch } p_1 = p_3 + p_4 - p_2
 \end{aligned}$$