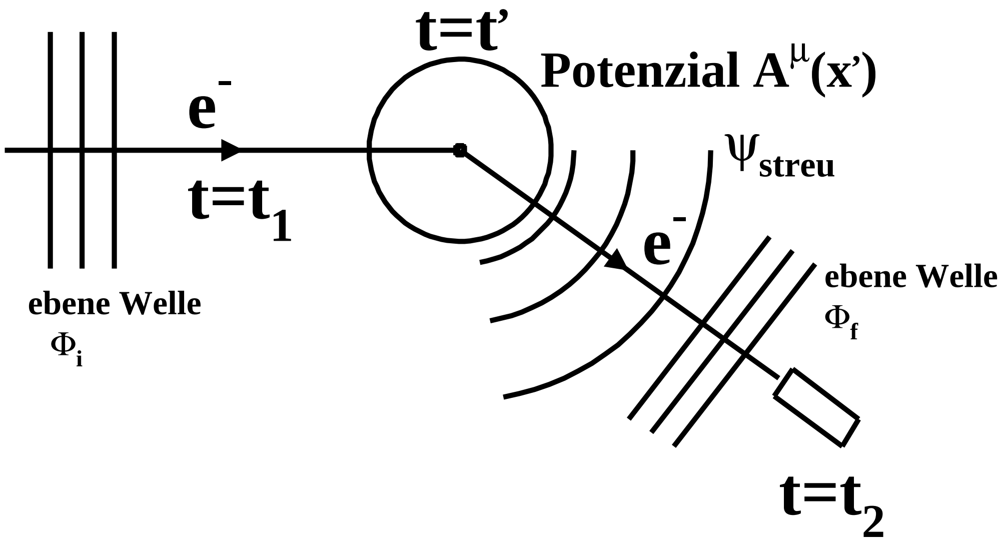
2. Herleitung der Feynman-Regeln

Matrixelement von Streuprozessen (z.B. Elektronenstreuung)



Von Streuwelle Ψ_{Streu} wird nur Anteil Φ_f mit $\vec{p_f}$ gemessen. Wahrs. für Übergang $\Phi_i \longrightarrow \phi_f$ ist gegeben durch:

$$S_{fi} \equiv \langle \Phi_f | \Psi_{streu} \rangle = \langle \Phi_f | S | \Phi_i \rangle$$

$$\sigma, \frac{\partial\sigma}{\partial\Omega}, \Gamma \swarrow \quad = \int d^3x_2 \Phi_f^+(x_2) \Psi_{streu}(x_2) = \underbrace{\int d^3x_2 \Phi_f^+(x_2) S \Psi_i(x_2)}_{\text{Störungstheorie, Feynmangraphen}}$$

Berechnung von Ψ_{Streu} (Kap. 4 Schmüser)

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi_{streu}(x) = -e\gamma^\mu A_\mu(x)\Psi_{streu}(x) = -e \not{A}\Psi_{streu}(x)$$

Erinnnerung: Lösung von DGLs mit Greenschen Funktion

$\hookrightarrow$ Bsp. Elektrostat. Potenzial:

$$\nabla^2 \Phi(x) = -\rho(x) \qquad \text{Poissongleichung}$$

Lösung ist

$$\Phi(x) = \int G(\vec{x} - \vec{x'})\rho(\vec{x'})d^3x'$$

mit Greenscher Funktion:

$$G(\vec{x} - \vec{x'}) = \frac{1}{4\pi|\vec{x} - \vec{x'}|}, \quad \text{denn } \nabla^2 G(\vec{x} - \vec{x'}) = -\delta^3(\vec{x} - \vec{x'})$$

Greensche Funktion für Diracgl. mit Feld

$$(i\partial\!\!\!/ - m)K(x-x') = \delta^4(x-x')$$

$\uparrow$ gesucht

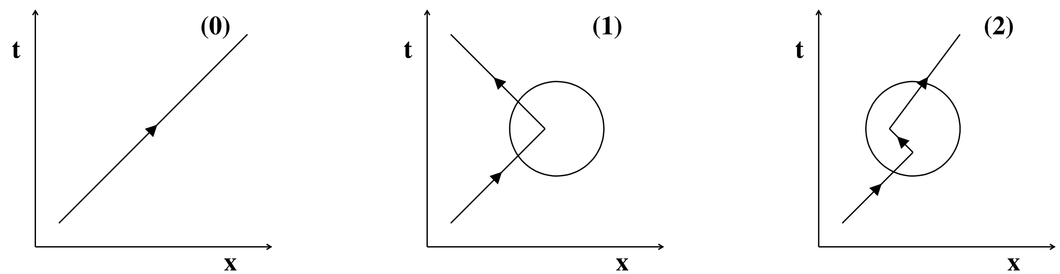
$$\Psi(x) = -e\int K(x-x')A\!\!\!/\Psi(x')d^4x'$$

Integralgleichung $\uparrow$ Ψ taucht wieder auf

<u>Vorteil:</u> Iterative Lösung möglich $\longrightarrow$ Störungstheorie

$$\begin{aligned}
\Psi^{(0)}(x) &= \Phi(x) \quad \text{ebene Welle} \\
\Psi^{(1)}(x) &= \Phi(x) - e\int K(x-x')A\!\!\!/\Psi^{(0)}(x')d^4x \\
\Psi^{(2)}(x) &= \Phi(x) - e\int K(x-x')A\!\!\!/\Psi^{(1)}(x')d^4x
\end{aligned}$$

Allgemeine Lösung einer DGL $=$ Lsg. des homogenen Systems $+$ spezielle Lsg. des inh. Systems



Störungstheorie Terme für $S_{fi}^2 \sim \alpha^{0,1,2}$
mit $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\hbar c} = 1/137$

Berechnung der Greenschen Funktion $K(x-x')$ $\longrightarrow$ Propagator!

$$K(x-x') = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p\,\tilde{K}(p)e^{-ip(x-x')}$$

$\uparrow$ Fouriertransf. von K

$$(i\not\partial - m)K(x-x') \quad = \quad \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p\,(\not p - m)\tilde{K}(p)e^{-ip(x-x')}$$

$$\overset{\text{fordere}}{=} \quad \delta^4(x-x') \quad = \quad \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p\,e^{-ip(x-x')}$$

$$\Rightarrow (\not p - m)\tilde{K}(p) \quad = \mathbf{1}$$

$$\underbrace{(\not p + m)(\not p - m)}_{p^2-m^2}\,\tilde{K}(p) \quad = (\not p + m)$$

$$\boxed{\tilde{K}(p) = \frac{\not p + m}{p^2 - m^2}}$$

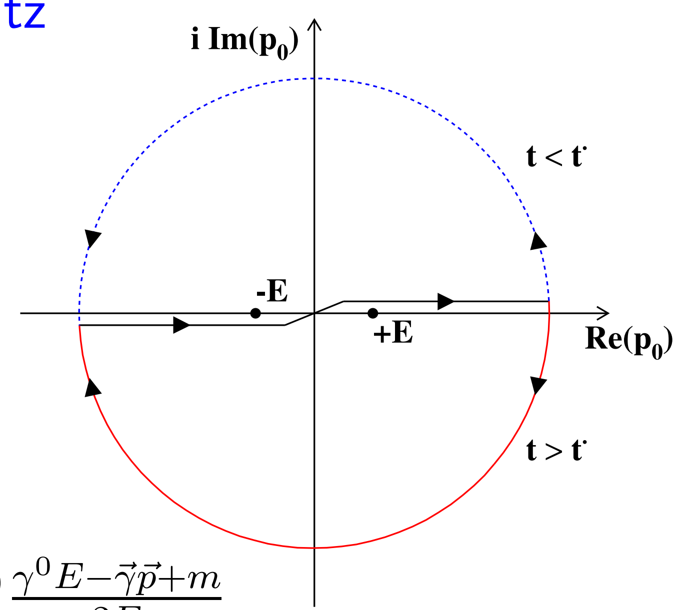
Elektronpropagator

Beachte: $p^2 - m^2 \neq 0$, virtuelles Teilchen! (reelles Teilchen: $p^2 = E^2 - \vec{p}^2 = m^2$)

Wie sieht $K(x-x')$ aus?

$$K(x-x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3p\, e^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{x}')} \int_{-\infty}^{\infty} dp_0 \underbrace{\frac{e^{-ip_0(t-t')}(\not{p}+m)}{(p_0-E)(p_0+E)}}_{\text{Pole bei } p_0=\pm E} \quad \text{mit } E = +\sqrt{\vec{p}^2+m^2}$$

Integral konvergiert nicht bei Integration über reelle Achse (über p_0)
Trick: Erweiterung auf komplexe p_0 Ebene $\longrightarrow$ Residuensatz



$\underline{t > t':}$

$$K(x-x') \overset{\text{Pol } +E}{=} -i\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3p\, e^{+i\vec{p}(\vec{x}-\vec{x}')-iE(t-t')}\,\frac{\gamma^0 E-\vec{\gamma}\vec{p}+m}{2E}$$

$\underline{t < t':}$

$$K(x-x') \overset{\text{Pol } -E}{=} -i\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3p\, e^{+i\vec{p}(\vec{x}-\vec{x}')+iE(t-t')}\,\frac{-\gamma^0 E-\vec{\gamma}\vec{p}+m}{2E}$$

Äquivalente Herleitung $\tilde{K}(p) = \dfrac{\not{p}+m}{p^2-m^2+i\epsilon}$

Warum heisst K(x'-x) Propagator?

$K(x-x')$ bewirkt Propagation (Ausbreitung) eines freien Dirac Spinors von x' nach x:

$$\phi(x) = \left\{ \begin{array}{ll} i\int d^3x' K(x-x')\gamma^0\phi(x') & t > t' \\ 0 & t < t' \end{array} \right\}$$

$\uparrow$ x später als x'

$$\bar{\phi}(x) = \phi^+\gamma^0 = \left\{ \begin{array}{ll} i\int d^3x' \bar{\phi}(x')\gamma^0 K(x-x') & t < t' \\ 0 & t > t' \end{array} \right\}$$

$\uparrow$ x früher als x'

Beweis für Propagatorrolle von K:

$$\phi(x') = u(k)e^{-ik_0t'+i\vec{k}\cdot\vec{x}'}$$

$$\phi(x) = \int d^3p \, \underbrace{\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3x' e^{i(\vec{k}-\vec{p})\cdot\vec{x}'}}_{\delta^3(\vec{k}-\vec{p}) \Rightarrow \vec{k}=\vec{p} \text{ und } k_0=E} \frac{\gamma^0E-\vec{\gamma}\cdot\vec{k}+m}{2E} e^{i(E-k_0)t'}\gamma^0 u(k)e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}-iEt}$$

$$= e^{-ik_0t+i\vec{k}\cdot\vec{x}} \frac{\gamma^0E-\vec{\gamma}\cdot\vec{k}+m}{2k_0}\gamma^0 u(k) =?$$

$$(\gamma^0k_0-\vec{\gamma}\vec{k}+m)\gamma^0u(k) = \gamma^0[\gamma^0k_0u(k) + \underbrace{(\vec{\gamma}\vec{k}+m)u(k)}_{Dirac-Gl.=\gamma^0k_0u(k)}$$

$$= 2k_0u(k)$$

$\hookrightarrow$ einsetzen $\rightarrow \phi(x) = e^{-ik_0t+i\vec{k}\cdot\vec{x}}u(k) = \phi(x)$