

Dirac Gl. relativistischer Fall

Freie Dirac Gleichung (ohne Feld): ($\hbar = c = 1$)

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = [\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + m\beta] \Psi$$

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\uparrow 2 \times 2$ Pauli Matrizen

Lösungsansatz:

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \varphi(p) \\ \chi(p) \end{pmatrix} e^{\mp i p x} \leftarrow \begin{matrix} \downarrow \text{pos. Energie} \\ \uparrow \text{neg. Energie} \end{matrix} \mp i(Et - \vec{p} \cdot \vec{x})$$

Lösungen $\sim e^{-i p x}$ (pos. Energie):

$$i \frac{\partial}{\partial t} \left[\begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} e^{-i p x} \right] = \left[\begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & -m \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} e^{-i p x}$$

$$(E - m) \varphi - \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \chi = 0$$

$$(E + m) \chi - \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \varphi = 0$$

gekoppelte Gl. für φ, χ

$$\hookrightarrow \chi = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E + m} \varphi; \quad \vec{\sigma} \cdot \vec{p} = \begin{pmatrix} p_z & p_x - i p_y \\ p_x + i p_y & -p_z \end{pmatrix}$$

Obere Gl. damit automatisch erfüllt:

$$(E - m)\varphi - \underbrace{(\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E + m}}_{\frac{\vec{p}^2}{E+m}\varphi = \frac{E^2 - m^2}{E+m}\varphi = (E - m)\varphi} \varphi = 0$$

Wähle $\varphi_1 = N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\varphi_2 = N \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\Rightarrow$ Lsg. der Dirac-Gl.: $u_1(p)e^{-ipx}$, $u_2(p)e^{-ipx}$

$$u_1(p) = N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x + ip_y}{E+m} \end{pmatrix}, \quad u_2(p) = N \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_x - ip_y}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \end{pmatrix}$$

Lösungen negativer Energie $\mathcal{E} = -E < 0$: $v_1(p)e^{+ipx}$, $v_2(p)e^{+ipx}$

$$(-E - m)\varphi + \vec{\sigma} \cdot \vec{p}\chi = 0$$

$$(-E + m)\chi + \vec{\sigma} \cdot \vec{p}\varphi = 0$$

$$\varphi = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E + m}\chi \quad \underline{\text{Hier:}} \text{ wähle } \chi_1 = N \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \chi_2 = N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_1(p) = N \begin{pmatrix} \frac{p_x - ip_y}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2(p) = N \begin{pmatrix} \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x + ip_y}{E+m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Normierung:

$$\Psi^+ \Psi \longrightarrow u^+ u, v^+ v$$

Beliebteste Möglichkeiten für N :

$$\text{a) } N_{\text{Bjorken,Drell}} = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \longrightarrow u^+ u = \frac{E}{m} \quad (=1 \text{ im Ruhesystem})$$

$$\text{b) } N_{\text{Eichtheorien}} = \sqrt{E+m} \longrightarrow u^+ u = 2E \quad (=2m \text{ im Ruhesystem})$$

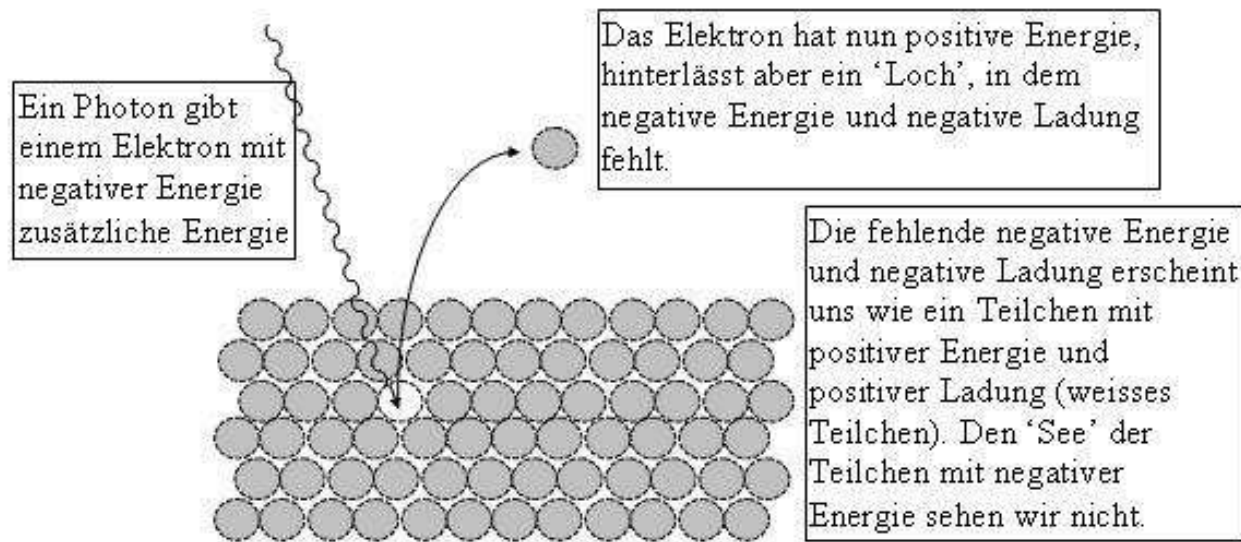
Komplette Lösungen:

$$\Psi_+(x) = u_{1,2}(p) e^{-iEt} e^{+i\vec{p}\cdot\vec{x}}$$

$$\Psi_-(x) = v_{1,2}(p) e^{+iEt} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \longrightarrow \text{Problem: neg. Energie!}$$

Interpretation der Lösungen negativer Energie:

- ① Dirac-See: Alle negativen Energieniveaus besetzt $\equiv$ "See" von Elektronen



$\rightarrow$ erklärt $\gamma \rightarrow e^+ e^-$ Paarerzeugung ($E_\gamma > 2m_e c^2$)

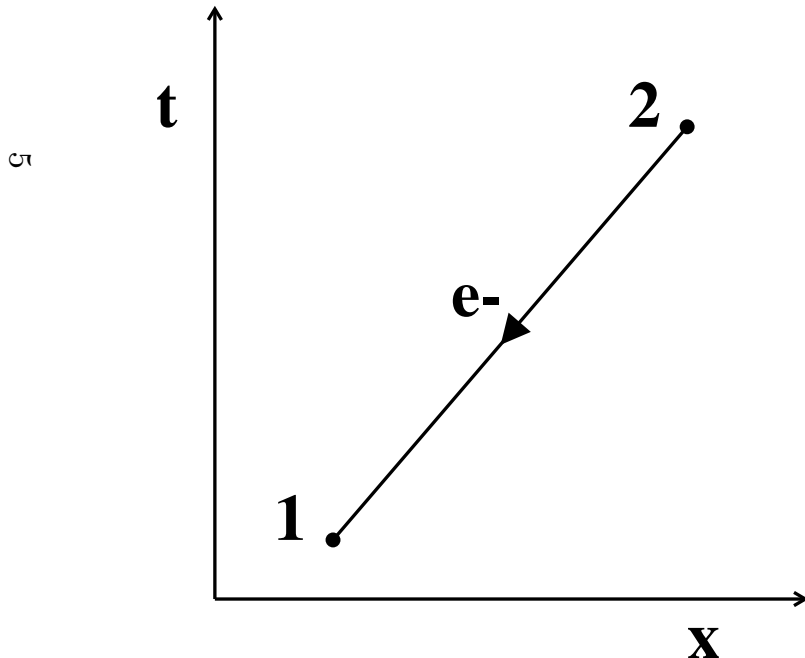
Entdeckung der Positronen 1932 durch C.D. Anderson

② Feynman - Stückelberg Interpretation (um 1934)

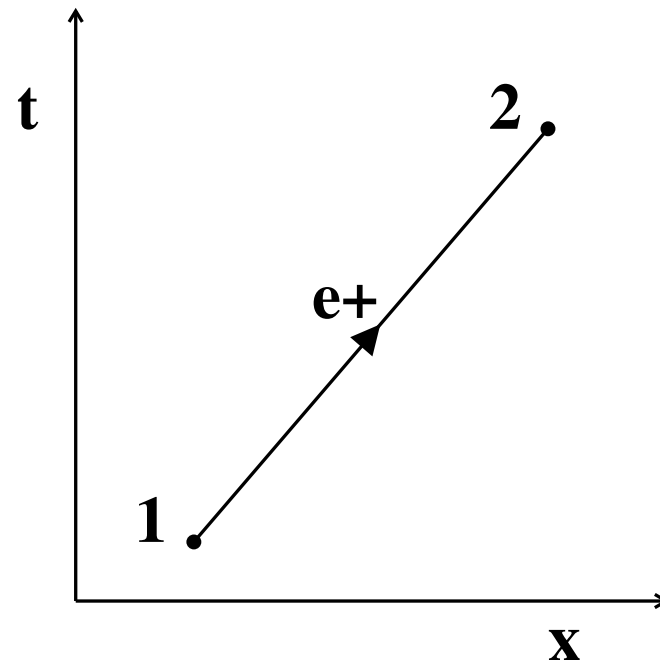
Wellenfunktion $E < 0$, Teilchen e^- , läuft rückwärts in der Zeit

≡

Wellenfunktion $E < 0$, Antiteilchen e^+ , läuft vorwärts in der Zeit



≡



Moderne Schreibweise der Diracgl. mit γ Matrizen

Vierervektoren:

kontravariante (wie x^μ) und kovariante (wie x_μ)

$$p^\mu = (E, p_x, p_y, p_z) = (E, p_1, p_2, p_3) = (E, \vec{p}), \quad \mu = 0, 1, 2, 3$$

$$p_\mu = (E, -\vec{p}) \quad \sum_\mu p^\mu p_\mu = E^2 - \vec{p}^2 = m^2 \quad \text{Lorentz-invariant}$$

Metrischer Tensor $g_{\mu\nu}$:

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad p_\mu = g_{\mu\nu} p^\nu := \sum_{\nu=0}^3 g_{\mu\nu} p^\nu$$

↑ Einsteinsche Summenkonvention

Lorentz invariantes Skalarprodukt von 4-Vektoren:

$$ab = a_\mu b^\mu = a^\mu b_\mu = a^\mu g_{\mu\nu} b^\nu = a_0 b_0 - \vec{a} \cdot \vec{b}$$

$a^2 > 0$ zeitartig, $a^2 = 0$ lichtartig, $a^2 < 0$ raumartig

Lorentz-Trafo:

$$x'^{\nu} = a^{\nu}_{\mu} x^{\mu} \quad \text{LT in z-Richtung:} \quad a^{\nu}_{\mu} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

7

Beispiele für Vierervektoren:

Zeit-Ort

$$x^{\mu} = (t, \vec{x})$$

Energie-Impuls

$$p^{\mu} = (E, \vec{p})$$

elektromagn. Viererpotential

$$A^{\mu} = (\Phi, \vec{A})$$

Viererstromdichte

$$j^{\mu} = (\rho, \vec{j})$$

Gradient

$$\partial^{\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla} \right) \quad (\text{weil } \partial^{\mu} = \frac{\partial}{\partial x_{\mu}})$$

Diracgleichung und γ -Matrizen

$$\gamma^0 = \beta, \gamma^1 = \beta\alpha_1, \gamma^2 = \beta\alpha_2, \gamma^3 = \beta\alpha_3$$

Dirac-Pauli Darstellung:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3$$

β . Diracgleichung ($\hbar = c = 1$)

∞

$$i \left(\beta \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \beta\alpha_1 \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} + \beta\alpha_2 \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} + \beta\alpha_3 \frac{\partial \Psi}{\partial x_3} \right) - m\beta^2 \Psi = 0$$

$$\left\{ +i \left[\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} + \gamma^1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \gamma^2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \gamma^3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right] - m \mathbf{1} \right\} \Psi = 0$$

$$\gamma^\mu = (\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3) \quad \text{Achtung! Ist kein 4-Vektor, } \gamma^\mu \text{ sind in jedem Lorentzsystem gleich}$$

$$\boxed{(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi(x) = 0} \quad \text{Diracgleichung}$$

Eigensch. der γ -Matrizen:

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \cdot \mathbf{1}$$

$$(\gamma^0)^+ = \gamma^0$$

$$(\gamma^k)^+ = -\gamma^k, \quad k = 1, 2, 3$$

$$(\gamma^0)^2 = \mathbf{1}$$

$$(\gamma^k)^2 = -\mathbf{1}$$

$$(\gamma^\mu)^+ = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0$$

6

Weitere Abkürzungen:

$$\not{a} \equiv \gamma^\mu a_\mu$$

dagger, slash

$$\Rightarrow (i\not{\partial} - m)\Psi = 0 \quad \text{Diracgleichung}$$

Dirac Gl. mit elektromagnetischem Feld A^μ

$$p_\mu = i\partial_\mu \quad \xrightarrow{\text{Eichtheorie}} \quad p_\mu - qA_\mu = i\partial_\mu - qA_\mu$$

$$\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu + iqA_\mu$$

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi(x) = g\gamma^\mu A_\mu \Psi(x)$$

$$(i\not{\partial} - m)\Psi = q\not{A}\Psi$$

10

Adjungierter Spinor und Vierer-Stromdichte:

Def. $\bar{\Psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0$ adjungierter Spinor

Warum nützlich? $\Psi^\dagger \Psi = \rho$, Wahrs.Dichte, transformiert bei LT $\sim E$

$\bar{\Psi}\Psi$ ist ein Skalar, s. Übungsblatt 2.1

Def. $j^\mu = \bar{\Psi}\gamma^\mu\psi$

$$j^0 = \bar{\Psi}\gamma^0\Psi = \Psi^\dagger\gamma^0\gamma^0\Psi = \Psi^\dagger\Psi = \rho, \quad \underbrace{j^k}_{k=1,2,3} = \bar{\Psi}\gamma^k\Psi = \Psi^\dagger\gamma^0\gamma^k\Psi = \Psi^\dagger\beta\alpha_k\Psi = \Psi^\dagger\alpha_k\Psi$$

Diracgleichung für den adjungierten Spinor $\bar{\Psi}$:

$$i\partial_\mu \bar{\Psi}\gamma^\mu + m\bar{\Psi} = 0$$

Fragen und Antworten von der Stunde 13.4.2010:

- Man kann Teilchen mit

a) negativer Energie die sich rückwärts in der Zeit ausbreiten behandeln wie

b) Antiteilchen mit positiver Energie die sich vorwärts in der Zeit ausbreiten.

Frage: ist es besser a) oder b) zu benutzen und gibt es irgendwelche Unterschiede?

Antwort: a) und b) sind absolut äquivalent und es gibt keine Unterschiede. Das sieht man z.B. wenn man das Skalarprodukt von einem auslaufenden Teilchen mit negativer Energie $\phi_f = e^{iE_f t - i\vec{p}_f \cdot \vec{x}}$ mit einem einlaufenden Zustand mit positiver Energie $\phi_i = e^{-iE_i t + i\vec{p}_i \cdot \vec{x}}$ bildet:

$$\begin{aligned} \langle \phi_f | \phi_i \rangle &= \int d^3x \phi_f^*(\vec{x}) \phi_i \vec{x} = \int d^3x e^{-iE_f t + i\vec{p}_f \cdot \vec{x}} e^{-iE_i t + i\vec{p}_i \cdot \vec{x}} \\ &\equiv \int d^3x e^{+i(-E_i)t - i(-\vec{p}_i) \cdot \vec{x}} e^{-iE_f t + i\vec{p}_f \cdot \vec{x}} \equiv \langle \phi_{i, E_i \rightarrow -E_i, \vec{p}_i \rightarrow -\vec{p}_i} | \phi_{f, -E_f \rightarrow E_f, -\vec{p}_f \rightarrow \vec{p}_f} \rangle \end{aligned}$$

D.h. Ein- und Auslaufen von Teilchen und Antiteilchen kann man gegeneinander austauschen wenn man Energie und Impuls umdreht. (Nebenbei: Physikalische Observable werden immer durch solche Skalarprodukte (Matrixelemente) beschrieben). Mehr dazu im Schmüserbuch Kapitel 3., S29 ff

- Wo kommt es her, dass $S = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} \rightarrow$ Die Paulimatrizen sind Repraesentanten der SU2

Drehgruppe und charakterisieren in der Quantenmechanik den Spin von Spin 1/2 Teilchen s.

http://en.wikipedia.org/wiki/Pauli_matrices Für die Diracspinoren müssen wir das noch auf die Vierervektoren verallgemeinern, d.h. die Teilchen und Antiteilchen gleichzeitig beschreiben.

- Beweis, dass $\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = (\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla})$ sich wie kontravarianter Vierervektor verhält (d.h. wie x^μ).

Wenn wir als Beispiel nehmen $\partial^\mu S$ mit $S = x_\nu x^\nu = x_0 x_0 - x_1 x_1 - x_2 x_2 - x_3 x_3$ (S ist ein Lorentzskalar, d.h. invariant unter LTs) finden wir sofort: $\partial^\mu S = 2x^\mu = 2(x_0, x_1, x_2, x_3)$ d.h. verhält sich wie kontravarianter Vektor x^μ . (Formaler Beweis auch über LT von $\frac{\partial}{\partial x_\mu}$ möglich.)