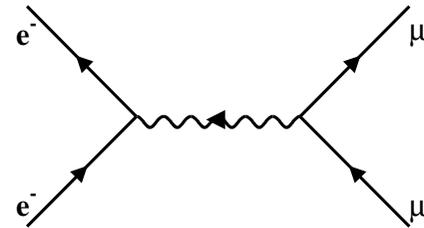


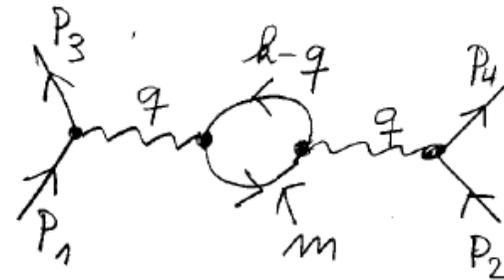
Bei kleinen Abständen sieht man mehr von der zentralen Ladung → quantifizieren

Beispiel: $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$



1. Ordnung

Jetzt zusätzlich:



Loop

$$\mathbf{M}^{(1)} = -e^2 [\bar{u}(p_3)\gamma^\mu u(p_1)] \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} [\bar{u}(p_4)\gamma^\nu u(p_2)]$$

Folgendes: Herleitung siehe z.B. Halzen-Martin

$$\mathbf{M}^{Loop} = -\frac{ie^4}{q^4} [\bar{u}(p_3)\gamma^\mu u(p_1)] \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{Sp(\gamma_\mu(\not{k} + m)\gamma_\nu(\not{q} - \not{k} + m))}{(k^2 - m^2)((q - k)^2 - m^2)} [\bar{u}(p_4)\gamma^\nu u(p_2)]$$

Berücksichtigung zusätzliche Ordnung (Loop):

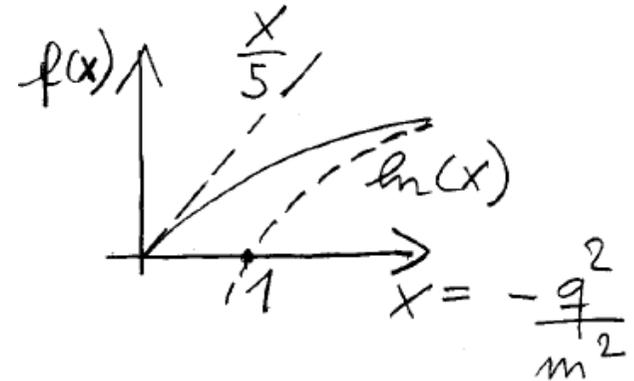
$$\frac{g_{\mu\nu}}{q^2} \rightarrow \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} - \frac{i}{q^4} I_{\mu\nu} \quad \text{wobei } I_{\mu\nu} = -e^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{Sp(\quad)}{(\quad)(\quad)}$$

Loopdiagramm-Integral

Man kann zeigen: $I_{\mu\nu} = -ig_{\mu\nu}I(q^2)q^2$

$$I(q^2) = \frac{e^2}{12\pi^2} \left[\underbrace{\int_{m^2}^{\infty} \frac{dx}{x}}_{\text{log. divergent}} - 6 \underbrace{\int_0^1 dz z(1-z) \ln \left(1 - \frac{q^2}{m^2} z(1-z) \right)}_{f(q^2) > 0 \text{ und endlich}} \right]$$

$$\int_{m^2}^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{M^2 \rightarrow \infty} \int_{m^2}^{M^2} \frac{dx}{x} = \lim_{M^2 \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{M^2}{m^2} \right)$$



Abschneideparameter M^2 , am Ende $M^2 \rightarrow \infty$

$$I(q^2) = \frac{e^2}{12\pi^2} \left[\ln \left(\frac{M^2}{m^2} \right) - f(q^2) \right] = \begin{cases} \frac{e^2}{12\pi^2} \ln \left(\frac{M^2}{m^2} \right) + \frac{e^2}{60\pi^2} \frac{q^2}{m^2} & \frac{-q^2}{m^2} \ll 1 \\ \frac{e^2}{12\pi^2} \ln \left(\frac{M^2}{-q^2} \right) & \frac{-q^2}{m^2} \gg 1 \end{cases}$$

Nebenbei: $q^2 < 0$, $q^2 = -4|\vec{p}|^2 \sin^2 \theta/2$ im CMS

$$\mathbf{M} = -e^2 [\bar{u}(p_3) \gamma^\mu u(p_1)] \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} \left[1 - \frac{e^2}{12\pi^2} \left(\ln \left(\frac{M^2}{m^2} \right) - f(q^2) \right) \right] [\bar{u}(p_4) \gamma^\nu u(p_2)]$$

Renormierung der Ladung:

Jetzt: Wir stecken $\ln\left(\frac{M^2}{m^2}\right)$ in "renormierte" Ladung e_R :

$$e_R \equiv e \sqrt{1 - \frac{e^2}{12\pi^2} \ln\left(\frac{M^2}{m^2}\right)}$$

Damit wird die Amplitude zu:

$$M = -e_R^2 \left[\bar{u} \dots u \right]_{31} \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} \left[1 + \frac{e_R^2}{12\pi^2} f(q^2) \right] \left[\bar{u} \dots u \right]_{24} + \mathcal{O}(e^6)$$

- M taucht nicht mehr explizit auf, e_R ist die gemessene Ladung
- absorbiere endlichen Term $f(q^2)$ in Kopplungsstärke

$$e_R(q^2) \equiv e_R(0) \sqrt{1 + \frac{e_R^2(0)}{12\pi^2} f(q^2)}$$

$$\text{mit } \alpha = \frac{e^2}{4\pi} \Rightarrow \alpha(q^2) = \alpha(0) \left(1 + \frac{\alpha(0)}{3\pi} f(q^2) \right) \quad \text{"laufende" Kopplungskonstante}$$

$$\text{Effekt sehr klein: } \alpha(0) = \frac{1}{137}, \quad \alpha(100 \text{ GeV}) = \frac{1}{128}$$

Aufsummieren der Loopdiagramme

Loopdiagramme in allen Ordnungen:

$$e_R(q^2) \equiv e \left[\underbrace{1 - I(q^2) + I^2(q^2) - I^3(q^2) + \dots}_{\text{geometrische Reihe}} \right] = e \frac{1}{1 + I(q^2)}$$

Im Grenzfall hoher $|q^2|$: $I(q) = \frac{\alpha}{3\pi} \ln \left(\frac{-q^2}{M^2} \right) \Rightarrow \alpha(q^2) = \frac{\alpha(0)}{1 - \frac{\alpha(0)}{3\pi} \ln \left(\frac{-q^2}{M^2} \right)}$

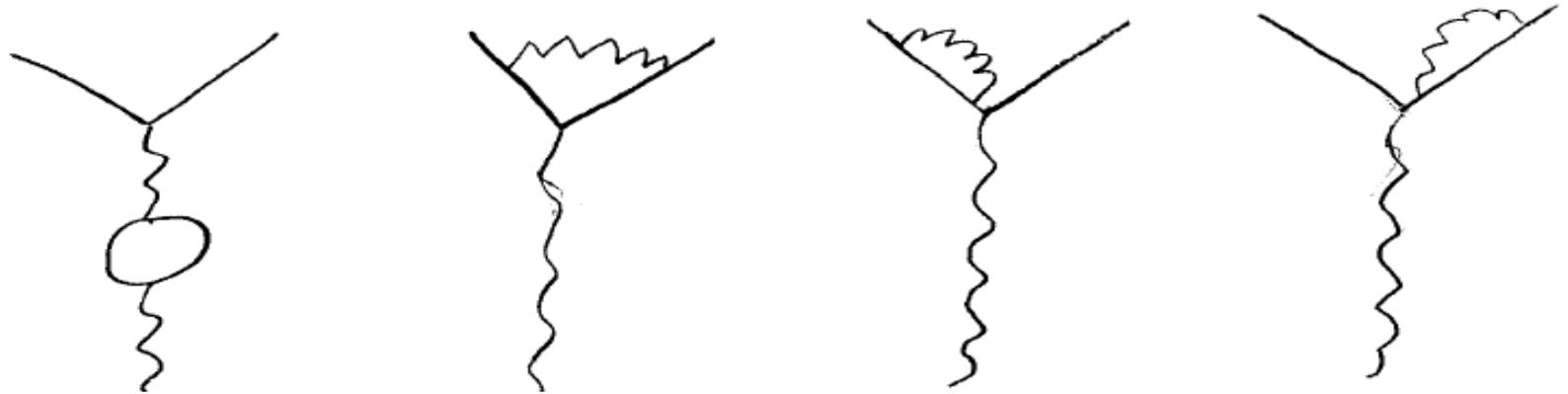
Renormierungsprozedur: Wähle Renormalisierungsskala μ (=Referenzskala) und subtrahiere $\alpha(\mu^2)$ von $\alpha(Q^2)$, nun schicke $M^2 \rightarrow \infty$

$$\Rightarrow \alpha(q^2) = \frac{\alpha(\mu^2)}{1 - \frac{\alpha(\mu^2)}{3\pi} \ln \left(\frac{-q^2}{\mu^2} \right)}$$

\Rightarrow Verlauf der Kopplung mit $q^2 \rightarrow$ fixiert Renormierungsgruppengl.

\Rightarrow Absoluter Wert von $\alpha(q^2)$ muss experimentell bestimmt werden!

Komplettes Set von $\mathcal{O}(\alpha^2)$ Diagrammen



Modifiziert:

Photon-Propagator

Strom $j_{fi}^\mu = -e\bar{u}\gamma^\mu u$

Renormierung:

Ladung:

$$-I(q^2) \stackrel{\text{Hochener.}}{=} \frac{\alpha}{3\pi} \ln\left(\frac{Q^2}{\mu^2}\right)$$

————— = 0, Ward-Identitäten —————

Magn. Moment:

x

$$g = 2 + \frac{\alpha}{\pi}$$

x

x

e^- -Selbstenergie
= Masse

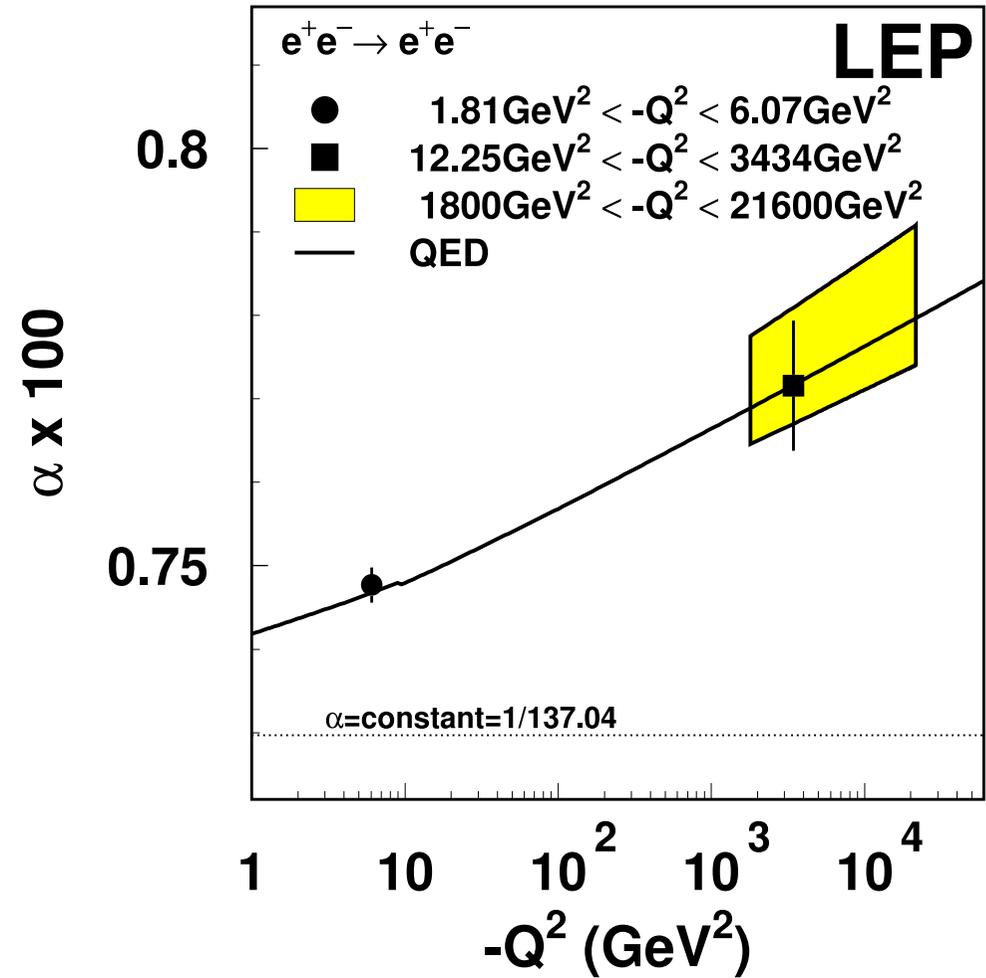
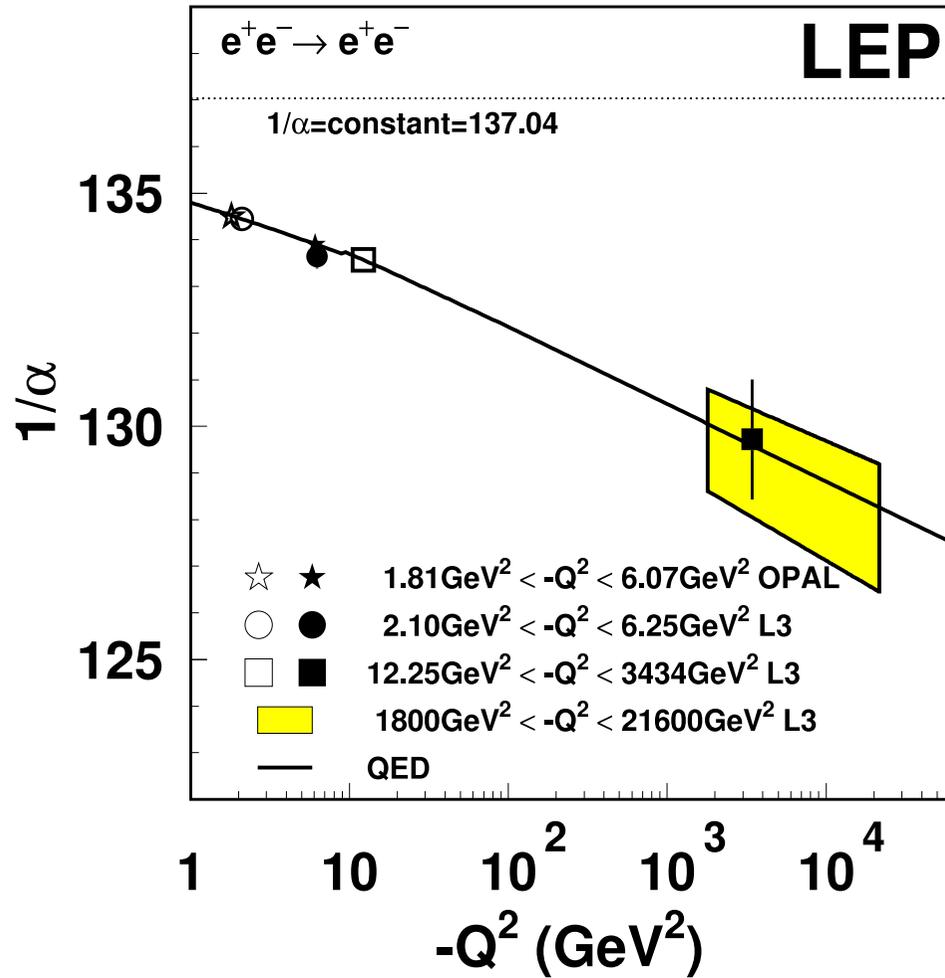
x

x

ja

ja

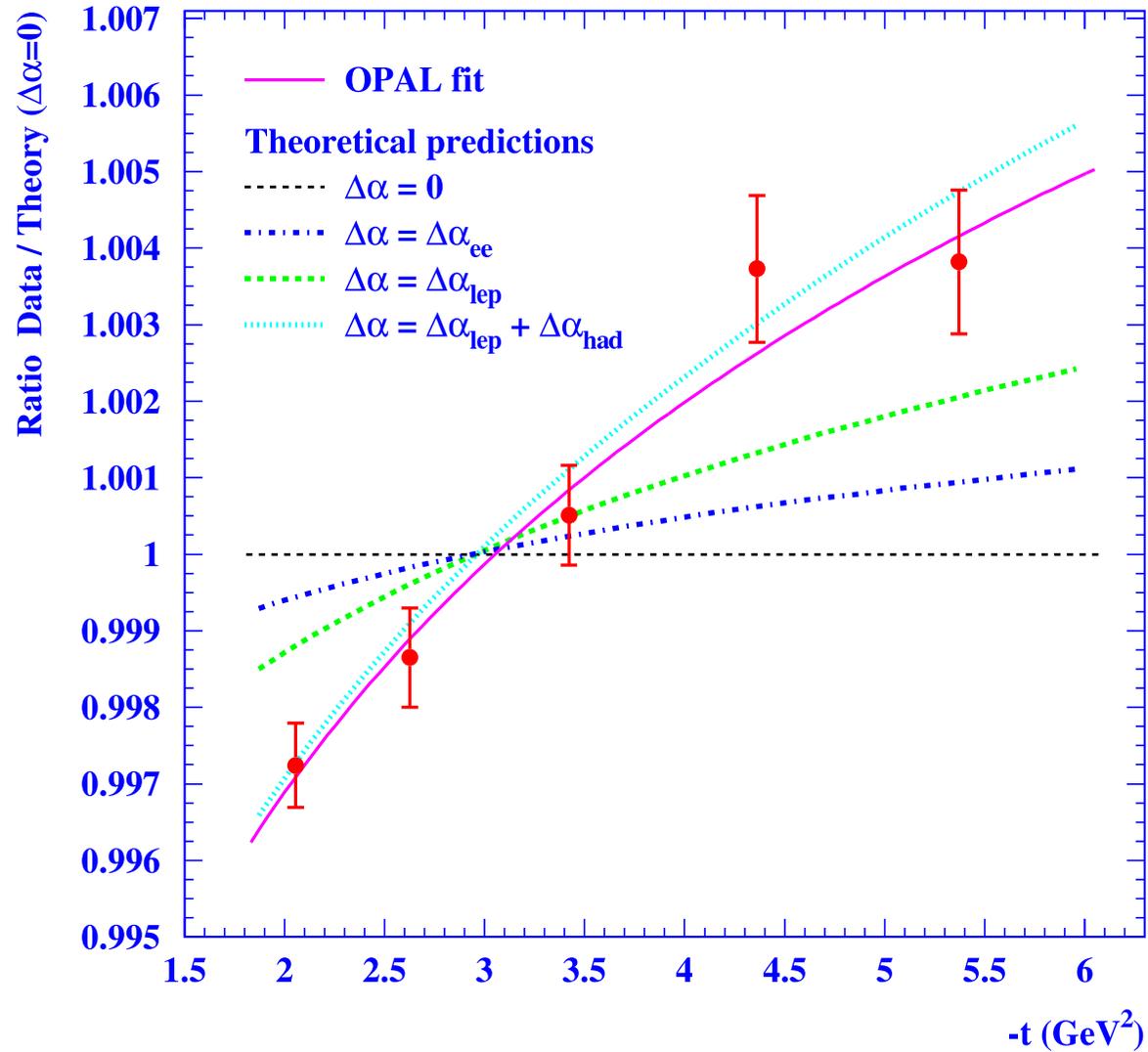
Messung der laufenden Kopplung in Bhabha Streuung bei LEP



<http://arxiv4.library.cornell.edu/abs/hep-ex/0505072v3>

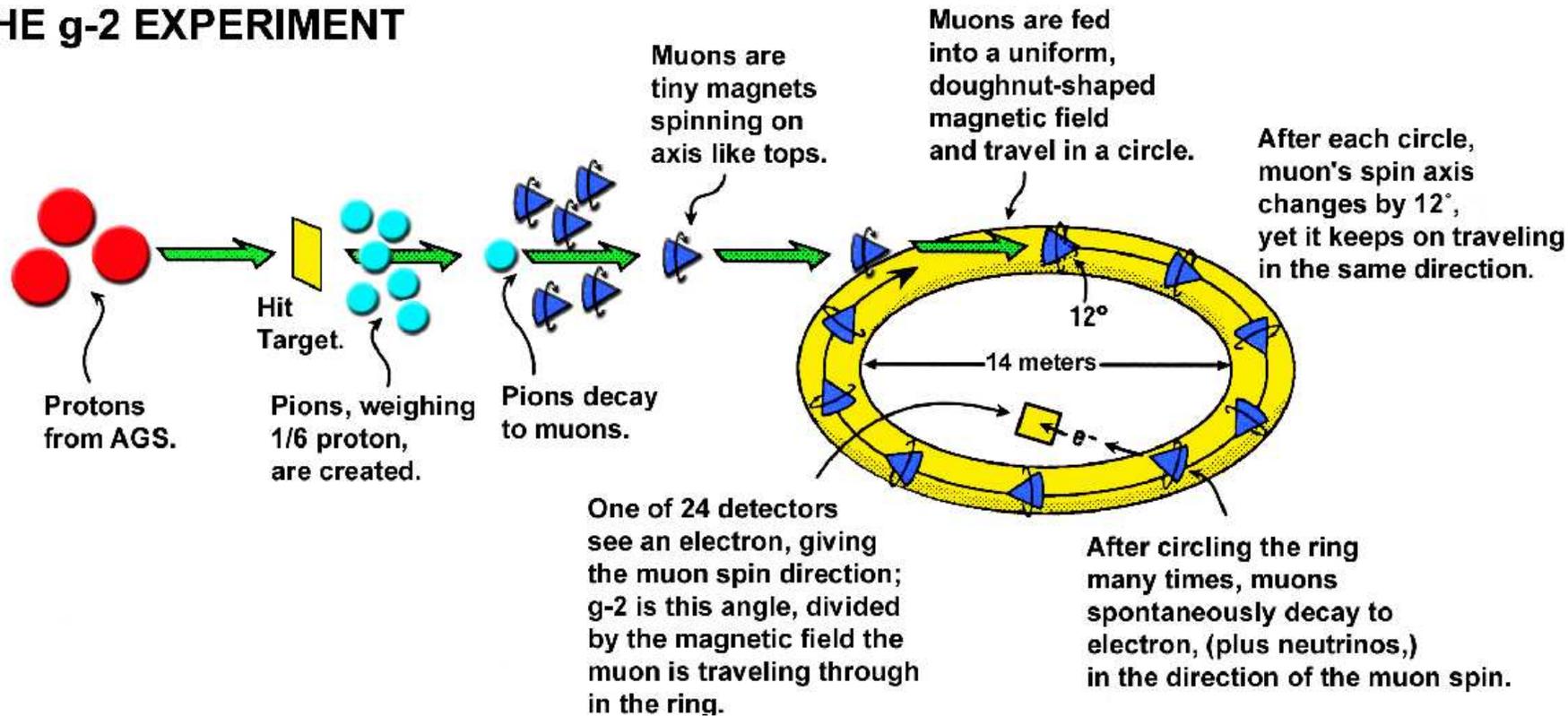
Running α : Beiträge verschiedener Teilchensorten im Loop

OPAL

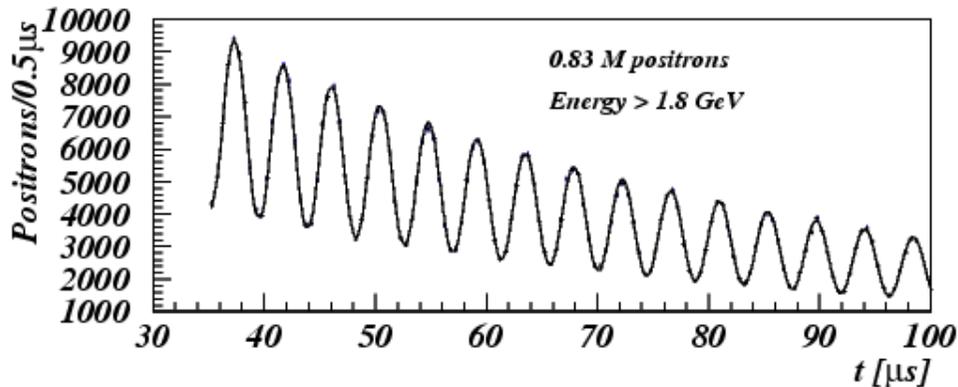


<http://www.slac.stanford.edu/econf/C060706/pdf/0610037.pdf>

LIFE OF A MUON: THE g-2 EXPERIMENT

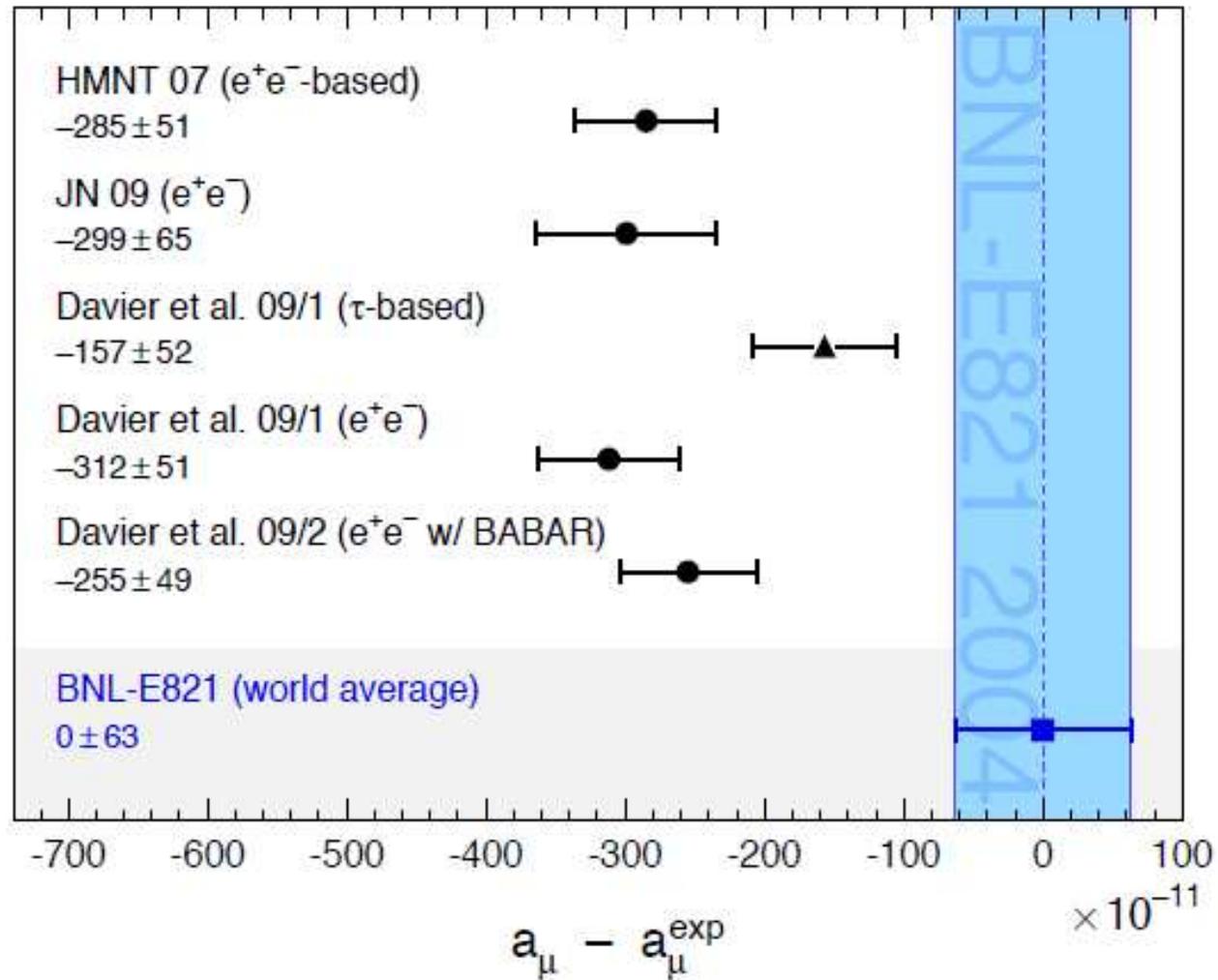


Zahl der e^+ hängt von $\phi(t)$ ab
 Oszillationsperiode $\Rightarrow a_\mu = \frac{g-2}{2}$



Zyklotronfrequenz eines Teilchen im B -Feld: $\omega_c = \frac{eB}{\gamma m}$
 Larmorfrequenz der Spin Präzession $\omega_L = \frac{eB}{\gamma m} \left[1 + \frac{g-2}{2} \gamma \right]$
 $\phi(t) = (\omega_L - \omega_c) \cdot t = \frac{g-2}{2} \frac{eB}{m} t$
 Winkel zwischen Spin und Impuls

$g - 2$ Vergleich Experiment (BNL E821) vs Rechnungen



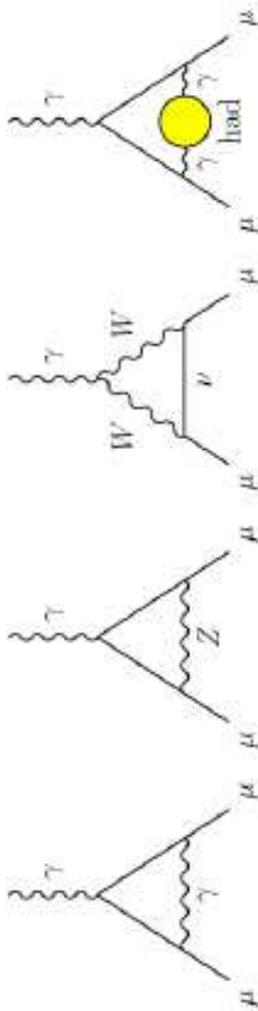


Figure 1: Representative diagrams contributing to a_μ^{SM} . From left to right: first order QED (Schwinger term), lowest-order weak, lowest-order hadronic.

$$a_\mu^{\text{QED}} = 116\,584\,718.10(0.16) \times 10^{-11}$$

$$a_\mu^{\text{EW}} = 154(1)(2) \times 10^{-11}$$

$$a_\mu^{\text{Had}}[\text{LO}] = 6\,894(42)(18) \times 10^{-11}$$

$$a_\mu^{\text{Had}}[\text{LO}] = 7\,103(50)(7)(28) \times 10^{-11} \quad (\tau)$$

$$a_\mu^{\text{Had}}[\text{NLO}] = 22(35) \times 10^{-11}$$

$$\text{aus } \sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons})$$

$$\text{aus } \tau \rightarrow \nu_\tau + \text{hadrons}$$

$$a_\mu^{\text{SM}} = 116\,591\,788(2)(46)(35) \times 10^{-11} \quad \Delta a_\mu = a_\mu^{\text{exp}} - a_\mu^{\text{SM}} = 292(63)(58) \times 10^{-11}$$

$$a_\mu^{\text{SUSY}} \simeq \pm 130 \times 10^{-11} \cdot \left(\frac{100 \text{ GeV}}{m_{\text{SUSY}}} \right)^2 \tan\beta,$$