# Der Lagrange-Formalismus

11. Vorlesung, 11.5.2010

**Literatur: Anhang A,B Schmüser, Kapitel 1 Griffith**

1. LF in klassischer Mechanik:

$L(\underbrace{q,\dot{q}}_{\text{verallgemeinerte Koordinaten}})$ Lagrange Funktion $\Bigg\}$ Aus $\delta S = 0$ mit $S = \underbrace{\int dt\, L(q,\dot{q})}_{\text{Wirkung}}$

$$\delta S = \int dt \left[\frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta(\dot{q})\right] = \int dt \left[\frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{d}{dt}\delta(q)\right] = \text{ interaktive Aufgabe}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = 0} \qquad \textit{Euler-Lagrangegleichungen}$$

*Beispiel Punktteilchen:* $L = T - V = \dfrac{p^2}{2m} - V = \dfrac{1}{2}m\dot{x}^2 - V$

$$\frac{\partial L}{\partial q} = \frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial x} = F, \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} = P \quad \Rightarrow F - \frac{d}{dt}P = 0 \Rightarrow F = \frac{dP}{dt}$$

2. Ausweitung auf Felder, allgemein $\phi(x)$: $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu\phi(x))$

Lagrangedichte $\mathcal{L}$, $\qquad S = \int dt \int d^3x\, \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi)$

$$\text{Aus } \delta s = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi(x)} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi(x))} = 0}$$

# Beispiele für Lagrangedichten:

1. Skalares Feld:

$$\mathcal{L}_{Skalar} = \frac{1}{2}\left[(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - m^2\phi^2\right]$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = -m^2\phi; \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial_\mu\phi} = \partial^\mu\phi$$

$\Rightarrow$ Lagrangegleichungen: $-m^2\phi - \partial_\mu\partial^\mu\phi = 0$

$\partial_\mu\partial^\mu\phi + m^2\phi = 0$ Klein-Gordon-Gleichung

2. Dirac-Feld:

$$\mathcal{L}_{Dirac} = \bar{\psi}(x)\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - m\right)\psi(x) = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi$$

$\bar{\psi}$, $\psi$ als unabhängige Koordinaten

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} = -m\bar{\psi}; \quad \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\psi)} = \bar{\psi}i\gamma^\mu$$

$\Rightarrow$ Lagrangegl.: $-m\bar{\psi} - \partial_\mu\bar{\psi}i\gamma^\mu = 0 \Rightarrow \bar{\psi}\left(i\overleftarrow{\partial_\mu}\gamma^\mu + m\right) = 0$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}} = \left(i\gamma^\mu\partial_\mu - m\right)\psi, \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})} = 0$$

$\Rightarrow$ Lagrangegl.: $\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - m\right)\psi = 0$

# QED Lagrangedichte

## 3. Elektromagnetisches Feld (Vakuum)

$$\mathcal{L}_{em} = -\tfrac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = -\tfrac{1}{4} \left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\right)\left(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu\right)$$

$\uparrow$ nötig um richtige Energiedichte zu erhalten

$(*)$ $\quad \partial_\mu \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \quad \Rightarrow$ Wellengleichung im Vakuum interaktive Aufgabe: $\quad \Box A^\nu - \partial^\nu(\partial_\mu A^\mu) = 0$

## 4. Lagrangedichte der QED:

$\mathcal{L}_{Dirac} + \mathcal{L}_{em}$ mit $D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{QED} &= \bar{\psi}\left(i\gamma^\mu D_\mu - m\right)\psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\ &= \bar{\psi}\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - m\right)\psi - \underbrace{q\,\bar{\psi}\gamma^\mu\psi}_{j^\mu} A_\mu - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \end{aligned}$$

Tests:

Euler-Lagrange-gl.

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} = \left(i\gamma^\mu \partial_\mu - m\right)\psi - q\gamma^\mu\psi A_\mu \quad \Rightarrow \quad \left(i\gamma^\mu \partial_\mu - m\right)\psi = q\gamma^\mu\psi A_\mu \quad \Rightarrow$ Diracgl. mit Feld

$-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} = q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi = j^\mu \quad \overset{+(*)}{\Rightarrow} \quad \Box A^\nu - \partial^\nu(\partial_\mu A^\mu) = j^\mu \quad \Rightarrow$ Wellengl. mit Quelle

# Noether Theorem ($\mathcal{L}$ und globale PT)

Lagrangedichte ist invariant unter infinitesimaler globaler Phasentransformation

$\Rightarrow$ Es gibt einen erhaltenen Strom $j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \cdot \phi$

$$\phi \rightarrow \phi' = e^{i\alpha}\phi \approx (1 + i\alpha)\phi, \quad \delta\phi = i\alpha\phi$$

$$\delta\mathcal{L} = 0, \qquad \delta\mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}\delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\delta(\partial_\mu \phi)$$

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\delta\phi \right\} \quad \text{warum?}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}$$

$$\delta(\partial_\mu \phi) = \partial_\mu(\delta\phi) \quad + \text{ Kettenregel!}$$

$$\frac{1}{i\alpha}\delta\mathcal{L} = \partial_\mu \left\{ \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\phi}_{j^\mu \text{ ist erhalten}} \right\} = 0$$

Beispiel: Diracteilchen $\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi$ ist inv. unter $\psi \rightarrow \psi' = e^{i\theta}\psi$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} = \bar{\psi} i \gamma^\mu \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{\psi})} = 0 \qquad j^\mu = \bar{\psi} i \gamma^\mu \psi = i\bar{\psi}\gamma^\mu \psi$$

ist erhalten $\quad \rightarrow$ Ladungsherhaltung

## Lagrange-Formalismus und lokale Phasentransformation

Ist $\mathcal{L}_{Dirac}$ auch invariant unter lokaler Eichtrafo? $\psi \to \psi' = e^{iq\chi(x)}\psi$

$$\mathcal{L}_{Test} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi \to \mathcal{L}' = \bar{\psi}'(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi' = \mathcal{L} - q(\partial_\mu\chi)\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$$

Lösung: muss das Feld dazunehmen $A_\mu$ mit
$A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu\chi$ wenn $\psi' = \psi(x)e^{iq\chi(x)}$, bzw.:

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi$$

$$\hookrightarrow D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu$$

$\mathcal{L}$ noch nicht komplett, tue "freies Vektorfeld" $\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ dazu

Wellengl. des Photons: $\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$; $\quad \partial_\mu\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu \underbrace{(\partial_\mu A^\mu)}_{=0 \text{ in Lorenzeichung}} = j^\nu$

ist invariant unter $A^\mu \to A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu\chi$

Wellengleichung eines massiven Vektorbosons (Feld $W$ mit Masse $M_W$):
$(\partial_\mu\partial^\mu + M_W^2)W^\nu - \partial^\nu(\partial_\mu W^\mu) = j^\nu$
Unter $W^\mu \to W'^\mu = W^\mu - \partial^\mu\chi \to$ Extraterm in Wellengl.: $-M_W^2\partial^\mu\chi$
$\Rightarrow$ Problem bei Vektorfeldern mit Masse!

# Eichfreiheit und Photonpolarisation

**Betrachte im Folgenden freies Photon mit 3-er Impuls || z-Achse**

Wellengleichung: $\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = 0$, Polarisation: $A^\mu = N \underbrace{\epsilon^\mu}_{\text{Polarisation (Vierervektor)}} e^{-ikx}$

Lorenz-Bedingung (LB) $\Rightarrow \partial_\mu A^\mu = 0 \Rightarrow k_\mu \epsilon^\mu = 0$

Beispiel: Photon mit $k^\mu = E(1,0,0,1)$, $\epsilon^\mu = (1,1,0,1)$ erfüllt LB

$\Rightarrow$ LB $\leftrightarrow |\epsilon^0| = |\epsilon^3|$

Eichtrafo mit $\chi = \dfrac{e^{-ikx}}{-iE}$

$\Rightarrow A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu \chi =$ interaktive Aufgabe $(0,1,0,0)e^{-ikx}$

$\Rightarrow$ kann Feld so umeichen, dass $\vec{k} \cdot \vec{\epsilon} = 0$ (Coulombeichung)

Feld $A$ hat 4 Freiheitsgrade (DoF):

- 1 DoF durch Lorenzeichung festgelegt
- Masselosigkeit $\longrightarrow$ 1 DoF

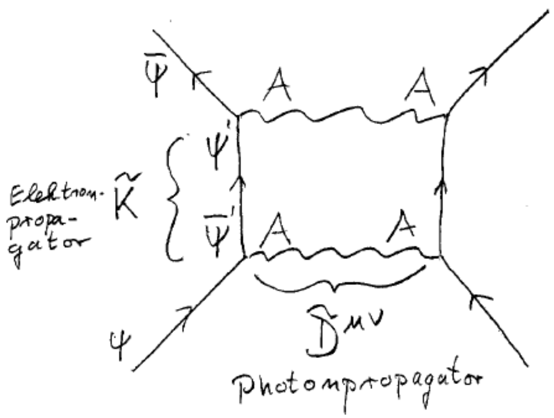
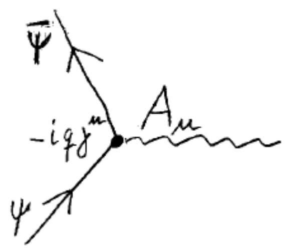
$\Rightarrow$ es bleiben 2 DoF: mit $\vec{k} = (0,0,k)$:

| | | |
|---|---|---|
| transversal polarisiert | $\vec{\epsilon}_1 = (1,0,0)$ | $\vec{\epsilon}_2 = (0,1,0)$ |
| zirkular polarisiert | $\vec{\epsilon}_{\lambda=+\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1,i,0)$ | $\vec{\epsilon}_{\lambda=-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-i,0)$ |

# Bemerkungen zum Lagrange-Formalismus

- Klassische Mechanik: $L = T - V$
  QFT: L wird axiomatisch festgelegt
- Aus Lagrangedichte lassen sich Feynman-Regeln der Theorie ableiten
  (Verallgemeinerte Koordinaten oder Pfadintegral)

# Lagrangedichte, Bewegungsgleichungen und Feynmanregeln

| | Freies Elektron | Wechselwirkung mit Photonfeld | Freies Photon |
|---|---|---|---|
| Lagrangian | $L_{Frei} =$ <br> $\bar{\psi}(\not{p} - m)\psi$ | $L_{Int} =$ <br> $-q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$ | $L_{frei} =$ <br> $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ |
| Euler-Lagr.gl. | $(\not{p} - m)\psi = 0$ | $\rightarrow \quad = q\gamma^\mu \Psi A_\mu \mid q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi = j^\mu = \quad \leftarrow$ | $\underbrace{\Box A^\mu = 0}_{\text{(Lor. Eichung)}}$ |
| Propagatoren: <br> $\sim$ quadratische Terme in $L_{frei}$ | $\tilde{K} = \frac{1}{-i(\not{p} - m)}$ <br> $= -\frac{(\not{p} + m)}{p^2 - m^2}$ <br> $= \frac{i\sum_s u\bar{u}}{p^2 - m^2}$ <br> $\equiv i\frac{\psi\bar{\psi}}{p^2 - m^2}$ |   | $g^{\mu\nu}\Box A_\nu = 0$ <br> $\tilde{D}^{\mu\nu} = \frac{i \cdot -g^{\mu\nu}}{q^2}$ <br> $= \frac{i\sum_{\lambda=1}^{4}\epsilon_\mu^{(\lambda)*}\epsilon_\nu^{(\lambda)}}{q^2}$ <br> $\equiv \frac{-iAA}{q^2}$ |
| Vertices <br> $\sim iL_{WW}$ | |   | |

$$\sum \text{Photonpolarisationen:} \rightarrow i\sum_{\lambda=1}^{4}\epsilon_\mu^{(\lambda)*}\epsilon_\nu^{(\lambda)} = \sum_T \underbrace{\epsilon_\mu^{T*}\epsilon_\nu^{T}}_{\text{transversal}} + \underbrace{\epsilon_\mu^{L}*\epsilon_\nu^{L}}_{\text{longitudinal}} + \underbrace{\epsilon_\mu^{S*}\epsilon_\nu^{S}}_{\text{skalar}}$$

(s. Halzen & Martin Seite 139 ff)