

3.1 Eichinvarianz

10. Vorlesung, 11.5.2010

Eichinvarianz und Maxwellgleichungen:

($\epsilon_0 = \mu_0 = 1$, Heaviside-Lorentz-Einheiten)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Einführung von Potentialen: $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = -\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\rightarrow \vec{\nabla} \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad \rightarrow \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \Phi$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{E} = -\vec{\nabla} \Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \end{array} \right\} \quad \text{statt } E, \vec{B} \longrightarrow \Phi, \vec{A}$$

$\vec{A}, \Phi$ sind nicht eindeutig festgelegt

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \chi(\vec{r}, t) \Rightarrow \vec{B}' = \vec{B}$$

$$\Phi' = \Phi - \frac{\partial}{\partial t} \chi(\vec{r}, t) \Rightarrow \vec{E}' = \vec{E}$$

$\vec{A}, \Phi$ zu Vierervektor

$$A^\mu = (\Phi, \vec{A})$$

$$A^\mu \xrightarrow{\text{Eichtrafo}} A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu \chi$$

lässt $\vec{E}, \vec{B}$ und Maxwellgl. invariant

$$\partial^\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla} \right)$$

Bemerkungen und Schreibweisen:

Viererstromdichte: $j^\mu = (\rho, \vec{j})$

Feldstärketensor: $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}$

Damit lauten die Maxwellgleichungen:

1.) $\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0 \quad \mu, \nu, \lambda = 0, 1, 2, 3$
(4 Gleichungen) $\rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} = .., \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = ...$

2.) $\partial^\mu F_{\mu\nu} = j_\nu$
(4 Gleichungen) $\rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = .., \vec{\nabla} \times \vec{B} = ..$

- Kontinuitätsgleichung: Differenzieren von ② und Einsetzen von $F_{\mu\nu}$
 $\partial^\nu j_\nu = 0 \rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$
- Wellengleichung: Einsetzen von $F_{\mu\nu}$ in ②
 $\square A^\nu - \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) = j^\nu$
- Lorenzbedingung: Man kann geeignetes χ finden, so dass
 $\partial_\mu A^\mu = 0 \rightarrow \square A^\nu = j^\nu$

Eichinvarianz in der Quantenmechanik:

1.) Schrödingergleichung mit elm. Feld

$$\left\{ \frac{1}{2m} \left(-i\vec{\nabla} - q\vec{A} \right)^2 + q\Phi \right\} \Psi(x) = i\frac{\partial}{\partial t} \psi(x)$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{andere Schreibweise: } \vec{D} = -\vec{\nabla} + iq\vec{A}, \quad D^0 = \frac{\partial}{\partial t} + iq\Phi \\ \Rightarrow \frac{1}{2m} (i\vec{D})^2 \psi = iD^0 \psi \end{array} \right)$$

Eichtrafo:

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \chi$$

$$\Phi \rightarrow \Phi' = \Phi - \frac{\partial}{\partial t} \chi$$

Damit SGL forminvariant ist, muss sich ψ wie folgt transformieren:

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = \psi(x) \underbrace{e^{+iq\chi(x)}}_{\text{lokale Phasenänderung}}$$

Eichinvarianz in der Quantenmechanik:

2. Relativistische Wellengleichungen

$$(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi = 0$$

$$D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu \quad \text{kovariante Ableitung}$$

ist identisch mit

$$(i\cancel{D} - m)\psi = q\cancel{A}\psi$$

Ist diese Gleichung invariant unter der Eichtrafo:?

$$A^\mu \rightarrow A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu \chi$$

Ja, wenn

$$\psi \rightarrow \psi' = \psi \cdot e^{+iq\chi(t,\vec{x})}$$

Hier: Eichtrafo der Felder erfordert lokale Phasentransformation der Wellenfunktion damit Forminvarianz der Gleichungen gegeben.

Lokale und globale Phasentransformation

a) Globale PT:

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{i\alpha} \psi \quad \alpha \text{ unabh. von } \vec{x} \text{ und } t$$

ist nicht messbar

Denn Observablen bleiben gleich:

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \int d^3x \psi'^* \mathcal{O} \psi' = \int d^3x \psi^* e^{-i\alpha} \mathcal{O} e^{+i\alpha} \psi = \int d^3x \psi^* \mathcal{O} \psi$$

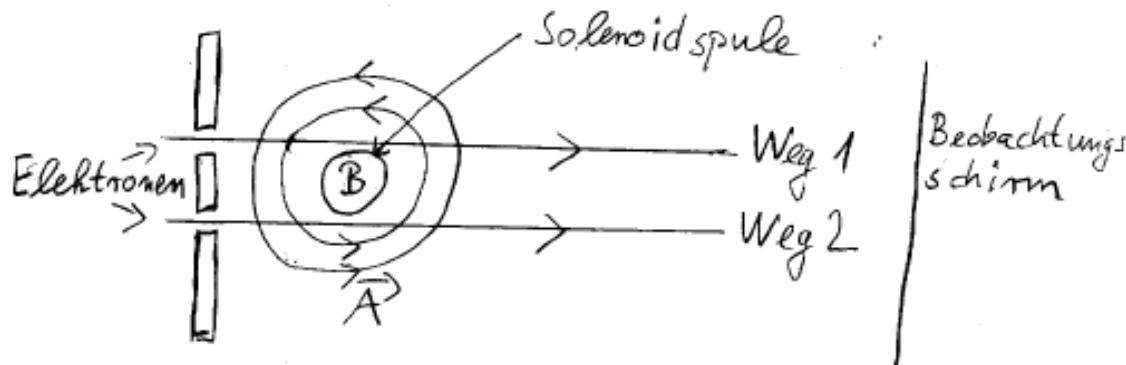
Bedeutung der globalen PT: Aus der Invarianz der Lagrangedichte gegenüber globaler PT folgt ein Erhaltungssatz (Noether-Theorem)

b) lokale Phasentransformationen

$$\psi \rightarrow \psi'(x) = e^{iq\chi(x)} \psi(x)$$

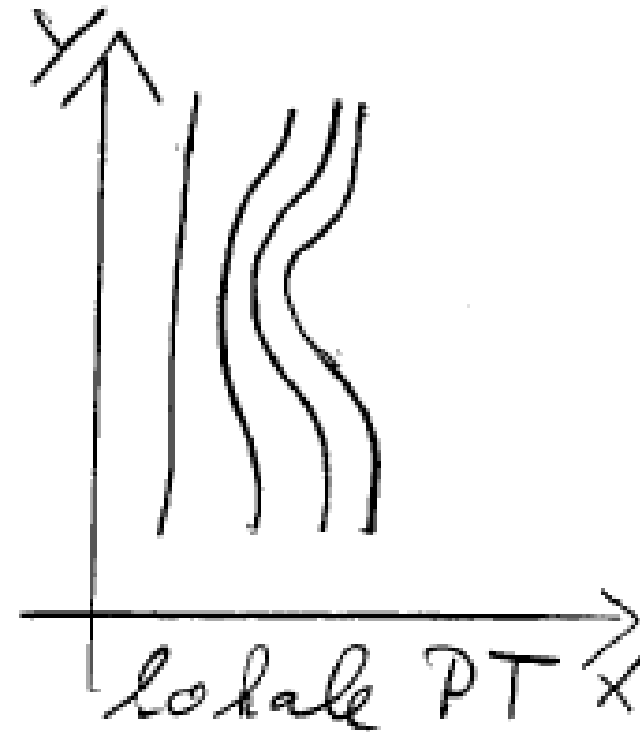
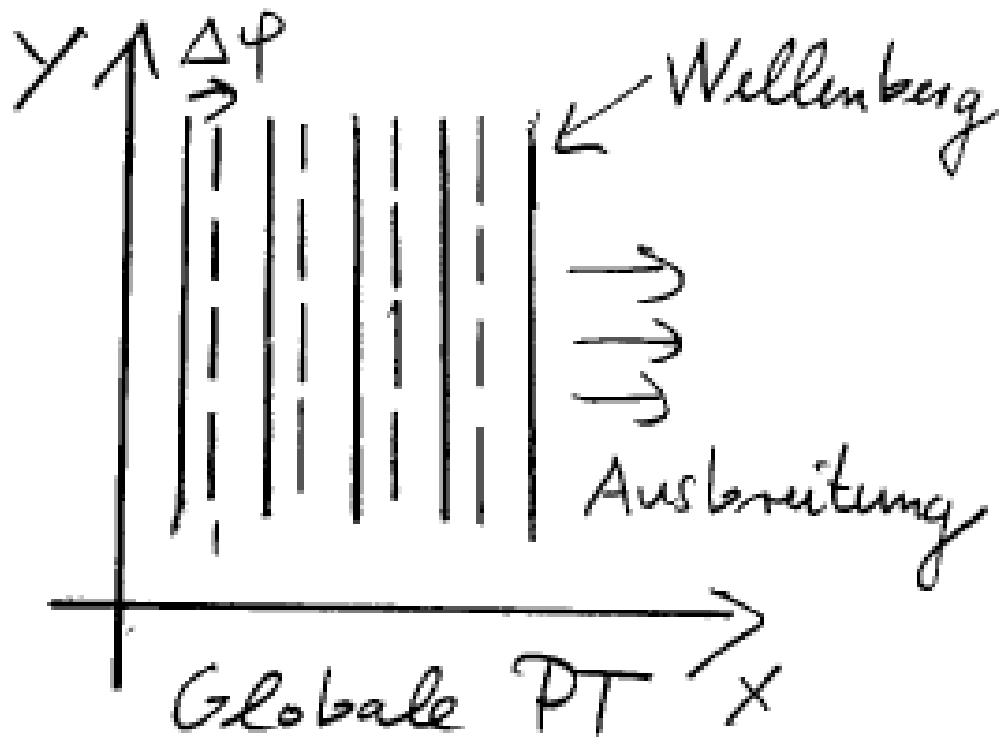
Ändern die Observablen! (z.B. Interferenzmuster)

Aharonov Bohm Effekt



$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{2\pi}{|\vec{P}|} = \frac{2\pi\hbar}{|m\vec{v} - e\vec{A}|} \\ \rightarrow \Delta\varphi &= \frac{2\pi}{\lambda} \Delta x \\ \underbrace{\Delta\varphi'}_{\text{mit } \vec{A}} &= -\frac{e}{\hbar} \vec{A} \Delta \vec{x} \end{aligned}$$

Veranschaulichung mit Wasserwellen



Existenz eines Hindernisses



erfordert äussere Kräfte → Felder

Lokale Phasentransformation $\leftrightarrow$ Eichinvarianz

DGL im Vakuum

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0$$

Jetzt lokale PT: $\psi' = e^{iq\chi(x)}\psi(x)$

$$\begin{aligned}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi' &= e^{iq\chi} \underbrace{(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi}_{=0} - q\gamma^\mu \partial_\mu \chi \underbrace{e^{iq\chi}\psi}_{\psi'} \\ &= -q\gamma^\mu \partial_\mu \chi \cdot \psi'\end{aligned}$$

DG mit Feld

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi' = q\gamma^\mu A'_\mu \psi' \quad \text{wobei hier} \quad A'_\mu = -\partial_\mu \chi$$

Invarianz bei lokaler Phasentrafo geht nur mit Feld

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = q\gamma^\mu A_\mu(x)\psi(x)$$

$\psi'(x) = e^{iq\chi(x)}\psi(x)$ ist Lösung einer formgleichen Gleichung mit $A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu \chi$.

Eichprinzip:

Postulat/Forderung: Die Diracgleichung muss invariant sein gegenüber beliebiger lokaler Phasentransformation



Dies ist im feldfreien Raum unmöglich



Existenz eines Vektorfeldes (A^μ)
das gleichzeitig eichtransformiert wird

$$\Psi'(x) = e^{iq\chi(x)}\psi(x)$$

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu\chi(x)$$

Einführung der kovarianten Ableitung (minimale Kopplung):

$$D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu$$

Verallgemeinerung (Ausblick)

schwache WW: SU(2)

↓ 2 × 2 Matrizen

$$\Psi'(x) = \exp\left(i\frac{g}{2} \vec{\tau} \cdot \vec{\beta}(x)\right) \psi(x) \quad (\text{Drehung im Isospinraum})$$

↑

Pauli-Matrizen

$D^\mu = \partial^\mu + i\frac{g}{2}\vec{\tau}\vec{W}^\mu \rightarrow$ 3 Felder, da 3 Winkel im Isospinraum

starke WW: Farb SU(3)

↓ 3 × 3 Matrizen Gell-Mann Matrizen

$$\psi'(x) = \exp\left(i\frac{g_s}{2} \lambda_j \beta_j(x)\right) \psi(x)$$

↑

$j = 1, \dots, 8 \Rightarrow$ Existenz der 8 Gluonen Felder