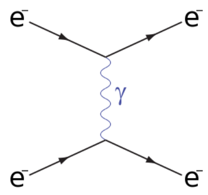
Vorlesung: *E-Teilchen für Fortgeschrittene*, Uni Hamburg SS10, Inhalt (Teil1)

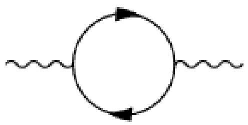
1. Quantenmechanische Beschreibung von Elektronen
   Dirac Gleichung $\longrightarrow$ berücksichtigt Spin 1/2 des Elektrons
   $\longrightarrow$ relativistisch korrekt

2. Feynman-Regeln und -Diagramme
   - Elektronenstreuung
   - Wirkungsquerschnitte



3. Lagrange Formalismus ($\Rightarrow$ Feynman-Regeln)
   und Eichprinzip ($\Rightarrow$ Existenz des elektromagnetischen Feldes)

4. QED (Quanten-Elektro-Dynamik)



$\longrightarrow$ Unendlichkeiten in der Berechnung solcher Diagramme

$\longrightarrow$ Renormierung, $\Rightarrow$ laufende Kopplung $\alpha(Q^2)$

Literatur:

- Peter Schmüser, "Feynman-Graphen und Eichtheorien für Experimentalphysiker" Springer Verlag, 1988/1995 $\longrightarrow$ Vorlesung folgt in Abschnitten 1.-3. weitgehend diesem Buch
- F. Halzen & A.D. Martin, "Quarks & Leptons" Wiley & Sons, 1984 $\longrightarrow$ folgen wir insbesondere für Abschnitt 4.
- Otto Nachtmann, "Elementarteilchenphysik, Phänomene und Konzepte" Vieweg Verlag, 1986 zum "Tieferbohren": dieses Buch liefert auch den kompletten feldtheoretischen Hintergrund

1) Quantenmechanische Beschreibung von Elektronen

Zur Erinnerung: Grundlegende Axiome der QM:

1. Zustand eines Systems wird durch Zustandsvektor $|\Psi\rangle$ beschrieben (in einem linearen Raum)

2. Physikalische Observablen: durch *hermitesche Operatoren* beschrieben: $A^{+} = (A^{t})^{*} = A$
   $\Rightarrow A$ hat relle Eigenwerte

3. Erwartungswert einer Observablen: $\langle A \rangle = \langle \Psi | A | \Psi \rangle$

4. Zeitentwicklung: $i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H|\Psi\rangle$

5. Messung von A: $|\Psi\rangle$ geht in den Eigenzustand $|n\rangle$ über (Eigenwert a_n wurde gemessen, Reduktion der Wellenfunktion)

1.1 Schrödingergleichung

$$E \quad \xrightarrow{QM} \quad i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$$

$$\vec{p} \quad \xrightarrow{QM} \quad -i\hbar\vec{\nabla}$$

$\longrightarrow$ Schrödingergleichung $E = \frac{p^2}{2m}$

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi \qquad \text{mit } \Psi = \Psi(\vec{r}, t)$$

mit Potenzial

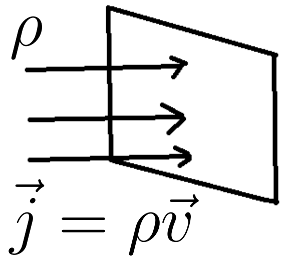
$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\vec{r}, t)\right)\Psi$$

Lösung der freien Schrödingergleichung:

$$\Psi(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}}e^{i\vec{k}\vec{r}} \cdot e^{-i\omega t}, \qquad E = \hbar\omega, \quad \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

1.2 Kontinuitätsgleichung

Klassisch: Teilchenfluss durch Fläche



Lokaler Erhaltungssatz $\longrightarrow$ Kontinuitätsgleichung:

$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\vec{j} = 0}$ ($\equiv$ wenn die Dichte geringer wird muss an diesem Ort mehr raus- als reinfliessen)

QM $\longrightarrow$ Wahrscheinlichkeitsdichte: $\rho = \Psi^*\Psi$ freies Teilchen $\rho_{frei} = \frac{1}{V}$

Wahrscheinlichkeitsstromdichte: $\vec{j} = \frac{\hbar}{2im}\left(\Psi^*(\vec{\nabla}\Psi) - (\vec{\nabla}\Psi^*)\Psi\right)$

Herleitung der K.Gl. aus Schrödinger Gl. (gute interaktive Übung!): benutze $i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = H\Psi$ und $-i\hbar\frac{\partial\Psi^*}{\partial t} = H\Psi^*$

$$\begin{aligned}
i\hbar\frac{\partial}{\partial t}(\Psi^*\Psi) &= i\hbar\frac{\partial\Psi^*}{\partial t}\Psi + i\hbar\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -(H\Psi^*)\Psi + \Psi^*(H\Psi) \\
&= -\left(-\frac{\hbar^2}{2m}(\nabla^2\Psi^*)\Psi + V\Psi^*\Psi\right) + \Psi^*\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi + V\Psi\right) \\
&= -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\Psi^*(\nabla^2\Psi) - (\nabla^2\Psi^*)\Psi\right) = -i\hbar\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}\left(\Psi^*(\vec{\nabla}\Psi) - (\vec{\nabla}\Psi^*)\Psi\right)
\end{aligned}$$

$$\rightarrow \frac{\partial\rho}{\partial t} = -\vec{\nabla}\vec{j}$$

1.3 Klein Gordon Gleichung

Versuch: $E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$ (relativistische Energie- Impulsbeziehung)

$$i\hbar\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \sqrt{-\hbar^2c^2\nabla^2 + m^2c^4}\Phi$$

Problem: Entwicklung nach ∞ hohen Potenzen nötig!

deshalb:

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$$

$$-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi = \left(-\hbar^2c^2\nabla^2 + m^2c^4\right)\Phi$$ $\longrightarrow$ Klein Gordon Gleichung (1926)

$$\hookrightarrow \left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta + (\frac{mc}{\hbar})^2\right]\Phi = 0$$

KGGL: ist 2. Ordnung in t und in $\vec{x}$
$\Rightarrow$ Lorentz kovariant

Lösungen:

$$\Phi_+(\vec{r},t) = \frac{1}{\sqrt{V}}e^{i\vec{k}\vec{r}-i\omega t} \quad E = +\hbar\omega$$

$$\Phi_-(\vec{r},t) = \frac{1}{\sqrt{V}}e^{i\vec{k}\vec{r}+i\omega t} \quad E = -\hbar\omega$$!!! Bedeutung?

Einsetzen in KGGL: $\hbar^2\omega^2 = p^2c^2 + m^2c^4; \quad E = \pm\hbar\omega = \pm\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$

Kontinuitätsgleichung aus Klein Gordon Gleichung

$\dot{\rho} + \mathrm{div}\,\vec{j} = 0$ konstruiere ρ und $\vec{j}$ die das erfüllen

$$\rho = \frac{i\hbar}{2mc^2}\left[\Phi^*\dot{\Phi} - \dot{\Phi}^*\Phi\right], \qquad \vec{j} = \frac{\hbar}{2im}\left[\Phi^*(\vec{\nabla}\Phi) - (\vec{\nabla}\Phi^*)\Phi\right]$$

Verifikation: (gute interaktive Übung!) benutze KGGL:

$\ddot{\phi} = \left(c^2\Delta + \frac{m^2c^4}{\hbar^2}\right)\phi; \qquad \ddot{\phi}^* = \left(c^2\Delta + \frac{m^2c^4}{\hbar^2}\right)\phi^*$

$$\begin{aligned}\dot{\rho} &= \frac{i\hbar}{2mc^2}\left(\phi^*\ddot{\phi} - \ddot{\phi}^*\phi\right) = \frac{i\hbar}{2mc^2}\left[\Phi^*(c^2\Delta + \frac{m^2c^4}{\hbar^2})\Phi - (c^2\Delta + \frac{m^2c^4}{\hbar^2})\Phi^*\Phi\right] \\ &= \frac{i\hbar}{2m}\left[\Phi^*\Delta\Phi - (\Delta\Phi^*)\Phi\right] = -\frac{\hbar}{2im}\vec{\nabla}\left[\Phi^*(\vec{\nabla}\Phi) - (\vec{\nabla}\Phi^*)\Phi\right] = -\vec{\nabla}\vec{j}\end{aligned}$$

$$\rho_+ = \frac{1}{V}\frac{\hbar\omega}{mc^2}, \qquad \vec{j}_+ = \frac{1}{V}\frac{\hbar k}{m} = \frac{1}{V}\vec{v}$$

$\hookrightarrow \rho \sim E \rightarrow$ relativistische Volumenkontraktion, $\rho^\mu = (\rho, \vec{j})$ ist Lorentz Vierervektor

$\rho_- < 0$ Problem !?

$\rightarrow$ KGGL wurde aufgrund der nicht positiv definiten Wahrs.Dichte für die negativen Energielösungen verworfen! Rehabilitierung 1934 durch Pauli & Weisskopf, die gezeigt haben, dass man $\rho_\pm$ als Ladungsdichte interpretieren kann wenn man es mit $-e$ multipliziert. Die Lösungen mit der negativen Energie entsprechen Antiteilchen (Positronen) mit positiver Ladungsdichte. In der Quantenfeldtheorie ist KGGL die Feldgleichung für neutrale und geladene Mesonen mit Spin=0 (Pionen).