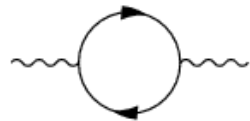
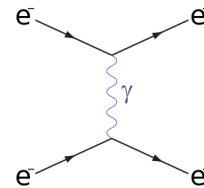


Vorlesung: *E-Teilchen für Fortgeschrittene*, Uni Hamburg SS10, Inhalt (Teil1)

Autor: Olaf Behnke, 1. Vorlesung, 6.4.2010

1. Quantenmechanische Beschreibung von Elektronen
Dirac Gleichung → berücksichtigt Spin 1/2 des Elektrons
→ relativistisch korrekt
2. Feynman-Regeln und -Diagramme
 - Elektronenstreuung
 - Wirkungsquerschnitte
3. Lagrange Formalismus ($\Rightarrow$ Feynman-Regeln)
und Eichprinzip ($\Rightarrow$ Existenz des elektromagnetischen Feldes)
4. QED (Quanten-Elektro-Dynamik)



→ Unendlichkeiten in der Berechnung solcher Diagramme
→ Renormierung, $\Rightarrow$ laufende Kopplung $\alpha(Q^2)$

Literatur:

- Peter Schmüser, “Feynman-Graphen und Eichtheorien für Experimentalphysiker” Springer Verlag, 1988/1995 → [Vorlesung folgt in Abschnitten 1.-3. weitgehend diesem Buch](#)
- F. Halzen & A.D. Martin, “Quarks & Leptons” Wiley & Sons, 1984 → [folgen wir insbesondere für Abschnitt 4.](#)
- Otto Nachtmann, “Elementarteilchenphysik, Phänomene und Konzepte” Vieweg Verlag, 1986 zum “Tieferbohren”: [dieses Buch liefert auch den kompletten feldtheoretischen Hintergrund](#)

1) Quantenmechanische Beschreibung von Elektronen

Zur Erinnerung: Grundlegende Axiome der QM:

1. Zustand eines Systems wird durch Zustandsvektor $|\Psi\rangle$ beschrieben (in einem linearen Raum)
2. Physikalische Observablen: durch *hermitesche Operatoren* beschrieben:
 $A^+ = (A^t)^* = A \quad \Rightarrow \quad A \text{ hat reelle Eigenwerte}$
3. Erwartungswert einer Observablen: $\langle A \rangle = \langle \Psi | A | \Psi \rangle$
4. Zeitentwicklung: $i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H |\Psi\rangle$
5. Messung von A : $|\Psi\rangle$ geht in den Eigenzustand $|n\rangle$ über
(Eigenwert a_n wurde gemessen, Reduktion der Wellenfunktion)

1.1 Schrödingergleichung

$$E \quad \underline{QM} \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$$

$$\vec{p} \quad \underline{QM} \quad -i\hbar \vec{\nabla}$$

→ Schrödingergleichung $E = \frac{p^2}{2m}$

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi \quad \text{mit } \Psi = \Psi(\vec{r}, t)$$

mit Potenzial

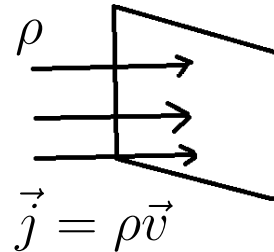
$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r}, t) \right) \Psi$$

Lösung der freien Schrödingergleichung:

$$\Psi(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{k}\vec{r}} \cdot e^{-i\omega t}, \quad E = \hbar\omega, \quad \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

1.2 Kontinuitätsgleichung

Klassisch: Teilchenfluss durch Fläche



Lokaler Erhaltungssatz $\rightarrow$ Kontinuitätsgleichung:

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0} \quad (\equiv \text{wenn die Dichte geringer wird muss an diesem Ort mehr raus- als reinfließen})$$

QM $\rightarrow$ Wahrscheinlichkeitsdichte: $\rho = \Psi^* \Psi$ freies Teilchen $\rho_{\text{frei}} = \frac{1}{V}$

Wahrscheinlichkeitsstromdichte: $\vec{j} = \frac{\hbar}{2im} \left(\Psi^* (\vec{\nabla} \Psi) - (\vec{\nabla} \Psi^*) \Psi \right)$

Herleitung der K.Gl. aus Schrödinger Gl. (gute interaktive Übung!): benutze $i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H\Psi$ und

$$-i\hbar \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} = H\Psi^*$$

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (\Psi^* \Psi) &= i\hbar \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} \Psi + i\hbar \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -(H\Psi^*) \Psi + \Psi^* (H\Psi) \\ &= - \left(-\frac{\hbar^2}{2m} (\nabla^2 \Psi^*) \Psi + V \Psi^* \Psi \right) + \Psi^* \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi + V \Psi \right) \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} (\Psi^* (\nabla^2 \Psi) - (\nabla^2 \Psi^*) \Psi) = -i\hbar \frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla} \cdot \left(\Psi^* (\vec{\nabla} \Psi) - (\vec{\nabla} \Psi^*) \Psi \right) \end{aligned}$$

$$\rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{j}$$

1.3 Klein Gordon Gleichung

Versuch: $E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$ (relativistische Energie- Impulsbeziehung)

$$i\hbar \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \sqrt{-\hbar^2 c^2 \nabla^2 + m^2 c^4} \Phi$$

Problem: Entwicklung nach ∞ hohen Potenzen nötig!

deshalb:

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$$

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi = (-\hbar^2 c^2 \nabla^2 + m^2 c^4) \Phi \rightarrow \text{Klein Gordon Gleichung (1926)}$$

$$\hookrightarrow \left[\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] \Phi = 0 \quad \begin{array}{l} \text{KGGL: ist 2. Ordnung in } t \text{ und in } \vec{x} \\ \Rightarrow \text{Lorentz kovariant} \end{array}$$

Lösungen:

$$\Phi_+(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{k}\vec{r} - i\omega t} \quad E = +\hbar\omega$$

$$\Phi_-(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{k}\vec{r} + i\omega t} \quad E = -\hbar\omega \quad \text{!!! Bedeutung?}$$

Einsetzen in KGGL: $\hbar^2 \omega^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$; $E = \pm \hbar\omega = \pm \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$

Kontinuitätsgleichung aus Klein Gordon Gleichung

$\dot{\rho} + \text{div } \vec{j} = 0$ konstruiere ρ und $\vec{j}$ die das erfüllen

$$\rho = \frac{i\hbar}{2mc^2} [\Phi^* \dot{\Phi} - \dot{\Phi}^* \Phi], \quad \vec{j} = \frac{\hbar}{2im} [\Phi^* (\vec{\nabla} \Phi) - (\vec{\nabla} \Phi^*) \Phi]$$

Verifikation: (gute interaktive Übung!) benutze KGGL:

$$\ddot{\phi} = \left(c^2 \Delta + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} \right) \phi; \quad \ddot{\phi}^* = \left(c^2 \Delta + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} \right) \phi^*$$

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \frac{i\hbar}{2mc^2} (\phi^* \ddot{\phi} - \ddot{\phi}^* \phi) = \frac{i\hbar}{2mc^2} \left[\Phi^* (c^2 \Delta + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2}) \Phi - (c^2 \Delta + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2}) \Phi^* \Phi \right] \\ &= \frac{i\hbar}{2m} [\Phi^* \Delta \Phi - (\Delta \Phi^*) \Phi] = -\frac{\hbar}{2im} \vec{\nabla} [\Phi^* (\vec{\nabla} \Phi) - (\vec{\nabla} \Phi^*) \Phi] = -\vec{\nabla} \vec{j} \end{aligned}$$

$$\rho_+ = \frac{1}{V} \frac{\hbar \omega}{mc^2}, \quad \vec{j}_+ = \frac{1}{V} \frac{\hbar k}{m} = \frac{1}{V} \vec{v}$$

$\hookrightarrow \rho \sim E \rightarrow$ relativistische Volumenkontraktion, $\rho^\mu = (\rho, \vec{j})$ ist Lorentz Vierervektor

$\rho_- < 0$ Problem !?

$\rightarrow$ KGGL wurde aufgrund der nicht positiv definiten Wahrs.Dichte für die negativen Energielösungen verworfen! Rehabilitation 1934 durch Pauli & Weisskopf, die gezeigt haben, dass man $\rho_\pm$ als Ladungsdichte interpretieren kann wenn man es mit $-e$ multipliziert. Die Lösungen mit der negativen Energie entsprechen Antiteilchen (Positronen) mit positiver Ladungsdichte. In der Quantenfeldtheorie ist KGGL die Feldgleichung für neutrale und geladene Mesonen mit Spin=0 (Pionen).

1.4 Die Dirac-Gleichung

2. Vorlesung, 9.4.2010

Suche Differentialgleichung 1. Ordnung in der Zeit,
relativistische Kovarianz $\Rightarrow$ 1. Ordnung auch in Ortskoordinaten

$$H^{rel}\Psi = i\frac{\partial\Psi}{\partial t} \quad (\hbar = c = 1)$$

$\uparrow$ zu bestimmen

Ansatz:

$$\begin{aligned} H^{rel} &= \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + \beta m \\ &= \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m \end{aligned} \quad \text{mit } \vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix}, \quad \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$$

Es muss gelten $H^2 = \vec{p}^2 + m^2 \Rightarrow$ Bedingungen für α_i und β :

$$1. \quad \alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 2\delta_{ij}$$

$$2. \quad \alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0$$

$$3. \quad \beta^2 = 1$$

$\Rightarrow \alpha_i, \beta$ sind nicht vertauschbar

Behauptung: α_i, β müssen $n \times n$ Matrizen sein mit $n \geq 4$.

Dimension von α_i, β : $N \geq 4$

Beweis:

1. α_j, β hermitesch, weil H hermitesch: $\alpha_j^+ = ((\alpha_j)^*)^t, \beta^+ = \beta$
2. $\alpha_j^2 = \beta^2 = 1 \Rightarrow$ Eigenwerte von α_j, β sind ± 1 .
3. α_j, β haben Spur=0

Beweis:

$$\text{Spur}(\alpha_j) = \text{Spur}(\beta \beta \alpha_j) = \text{Spur}(\beta \alpha_j \beta) = -\text{Spur}(\beta \beta \alpha_j) = -\text{Spur}(\alpha_j) = 0$$

$$\text{Spur}(\beta) = \text{Spur}(\alpha_i \alpha_i \beta) = \text{Spur}(\alpha_i \beta \alpha_i) = -\text{Spur}(\alpha_i \alpha_i \beta) = -\text{Spur}(\beta) = 0$$

Dabei benutzt: $\text{Spur}(AB) = \text{Spur}(BA)$ und $\alpha_j \beta = -\beta \alpha_j$

4. $\text{Spur}(A) = \sum \text{Eigenwerte}$

Da die Eigenwerte ± 1 , muss N gerade sein

Falls $N = 2$: gibt nur drei linear unabhängige Matrizen

mit $\text{Spur} = 0 \rightarrow$ Pauli Matrizen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \Rightarrow N \geq 4$

Darstellung der α_j, β :

Die Paulimatrizen sind gegeben durch:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ +i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Die Diracmatrizen sind gegeben durch:

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{(Dirac Darstellung)} \\ \text{existieren andere Darstellungen, z.B. die von Weyl} \end{array}$$

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & +i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ +i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Diracgleichung: $i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -i\hbar c \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} \Psi + mc^2 \beta \Psi$

Bedeutung? Was ist Ψ ? $\Rightarrow$ 4 Komponenten Spinor

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{pmatrix}, \quad \Psi^+ = (\Psi_1^*, \Psi_2^*, \Psi_3^*, \Psi_4^*)$$

Vermutung: $\rho = \Psi^+ \Psi = \Psi_1^* \Psi_1 + \Psi_2^* \Psi_2 + \dots = |\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2 + |\Psi_3|^2 + |\Psi_4|^2$

Aufstellung einer Kontinuitätsgleichung: ($c = \hbar = 1$)

Ψ^+ · Diracgleichung – komplex konjugierte Diracgleichung · Ψ

a) $\Psi^+ i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -i \Psi^+ \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} \Psi + m \Psi^+ \beta \Psi$

b) $-i \frac{\partial \Psi^+}{\partial t} \Psi = +i (\vec{\nabla} \Psi^+) \cdot \vec{\alpha} \Psi + m \Psi^+ \beta \Psi$

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \frac{\partial}{\partial t} \Psi^+ \Psi = \Psi^+ \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\partial \Psi^+}{\partial t} \Psi = -i[a) - b)] \\ &= -\Psi^+ \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} \Psi - (\vec{\nabla} \Psi^+) \cdot \vec{\alpha} \Psi = -\vec{\nabla} \cdot \vec{j}, \quad \text{mit } \vec{j} = \Psi^+ \vec{\alpha} \Psi \end{aligned}$$

Nichtrelativistischer Grenzfall der Dirac-Gleichung

zunächst freies, ruhendes Elektron

$$\vec{k} = 0 \rightarrow \vec{\nabla}\Psi = 0$$

Diracgl.: $i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = mc^2\beta\Psi$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4\end{pmatrix} = mc^2\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4\end{pmatrix}$$

→ 4 unabhängige Lsg.

$$\Psi_1 = e^{-i\omega_0 t}\begin{pmatrix}1 \\ 0 \\ 0 \\ 0\end{pmatrix}, \quad \Psi_2 = e^{-i\omega_0 t}\begin{pmatrix}0 \\ 1 \\ 0 \\ 0\end{pmatrix}, \quad \Psi_3 = e^{+i\omega_0 t}\begin{pmatrix}0 \\ 0 \\ 1 \\ 0\end{pmatrix}, \quad \Psi_4 = e^{+i\omega_0 t}\begin{pmatrix}0 \\ 0 \\ 0 \\ 1\end{pmatrix}$$

$$E_1 = E_2 = \hbar\omega_0 = mc^2$$

$$E_3 = E_4 = -\hbar\omega_0 = -mc^2$$

Für folgende Diskussion des nichtrelativistischen Grenzfalles:
betrachte nur die positiven Energielösungen

Grenzfall: Kleine, aber nichtverschwindende kinetische Energie

$$E = \sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4} \approx \underbrace{mc^2}_{\hbar\omega_0} + \underbrace{\frac{\vec{p}^2}{2m}}_{\ll mc^2}$$

Ansatz:

$$\Psi(\vec{r}, t) \approx e^{-i\omega_0 t} \begin{pmatrix} \varphi(\vec{r}, t) \\ \chi(\vec{r}, t) \end{pmatrix} \quad (\varphi, \chi \text{ haben jeweils 2 Kompon.})$$

φ, χ nur "langsam" zeitabhängig: $\varphi, \chi \sim e^{-i\omega' t}$ mit $\hbar\omega' = \frac{p^2}{2m}$

Zeige im Folgenden: $\chi \ll \varphi$ und φ erfüllt Schrödingergleichung

$$\Psi = e^{-i\omega_0 t} \begin{pmatrix} \varphi(\vec{r}, t) \\ \chi(\vec{r}, t) \end{pmatrix} \text{ in Diracgl. mit } \alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \hbar\omega_0 \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} + i\hbar \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\chi} \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} + mc^2 \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \text{Gl. für } \chi: \underbrace{i\hbar\dot{\chi}}_{\substack{\hbar\omega'\chi \approx 0 \\ \ll mc^2}} = c\vec{\sigma} \cdot \vec{p}\varphi - 2mc^2\chi \quad \Rightarrow \chi \approx \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{2mc}\varphi$$

$$\chi^+ \chi = \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^2}{4m^2 c^2} \varphi^+ \varphi = \underbrace{\frac{\vec{p}^2}{2m} \cdot \frac{1}{2mc^2}}_{\ll 1} \varphi^+ \varphi$$

d.h. für freies nichtrelativist. Elektronen: $\chi^+ \chi \ll \varphi^+ \varphi$

Einschub: Beweis $(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^2 = \vec{p}^2 \mathbf{1}$

$$\begin{aligned} \vec{\sigma} \cdot \vec{p} &= \sigma_1 p_x + \sigma_2 p_y + \sigma_3 p_z = \begin{pmatrix} 0 & p_x \\ p_x & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -ip_y \\ +ip_y & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_z & 0 \\ 0 & -p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{pmatrix} \\ &\begin{pmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_z^2 + p_x^2 + p_y^2 & 0 \\ 0 & p_z^2 + p_x^2 + p_y^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Gleichung für die (grosse) φ -Komponente

$$\underbrace{\hbar\omega_0}_{mc^2} \varphi + i\hbar\dot{\varphi} = c\vec{\sigma} \cdot \vec{p}\chi + mc^2\varphi$$

$$i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^2}{2m} \varphi = \frac{\vec{p}^2}{2m} \varphi \quad \rightarrow \text{Schroedingergleichung!}$$

Nichtrelativ. Grenzfall der Diracgl. im elektromagnetischen Feld

zur Erinnerung:

$$H_{\text{ohne Feld}}^{\text{Schrödinger}} = \frac{\vec{p}^2}{2m}$$

$$H_{\text{mit Feld}} = \frac{(\vec{p} - q\vec{A})^2}{2m} + q\Phi$$

Hier $\vec{A}$ = Vektorpotenzial und $q\Phi$ = potenzielle Energie im elektrischen Feld

$$\underbrace{\vec{p}}_{\text{ohne Feld}} \longrightarrow \vec{P} = (\vec{p} - q\vec{A})$$

$\vec{P}$ ist der kanonische Impuls aus Langrangefunktion und $\vec{p}$ der kinetische Impuls

nichtrelativistische Grenzfall der Dirac-Gleichung mit elektromagnetischem Feld:

$$\begin{aligned} i\hbar\dot{\varphi} &= \frac{1}{2m}(\vec{\sigma} \cdot \vec{P})(\vec{\sigma} \cdot \vec{P})\varphi + q\Phi\varphi \\ &= \frac{1}{2m}\left(\vec{\sigma}(\vec{p} - q\vec{A})\right)\left(\vec{\sigma}(\vec{p} - q\vec{A})\right)\varphi + q\Phi\varphi \end{aligned}$$

Übungsblatt 1 $\Rightarrow$ Pauli Gl. herleiten

Pauli-Gleichung und g Faktor

Mit $q = -e$ (Elektron) und $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$

$$\hookrightarrow i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \left[\frac{1}{2m} (-i\hbar \vec{\nabla} + e\vec{A})^2 + \frac{e\hbar}{2m} \vec{\sigma} \cdot \vec{B} - e\Phi \right] \varphi \quad \text{Pauli Gleichung}$$

Term $\frac{e\hbar}{2m} \vec{\sigma} \cdot \vec{B} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$ = potenzielle Energie des magnetischen Momentes des Elektrons mit dem äusseren Magnetfeld, dieser Term fehlt in der Schrödingergleichung, weil Sie nichts vom Spin des Elektrons weiss!

$$|\mu_{\text{Elektron}}| = g \cdot \frac{e}{2m} \cdot \frac{\hbar}{2}$$

g-Faktor gyromagnet.
Verhältnis Spin

Aus Pauli Gl. $\rightarrow g = 2$, Gemessen $g = 2^a$, klassisch nicht erklärbar
 $\Rightarrow$ wichtiger Erfolg der Dirac-Gleichung

^akleine Abweichung von $g=2$ durch QED Effekte, Diskussion später

Dirac Gleichung relativistischer Fall

3. Vorlesung, 13.4.2010

Freie Dirac Gleichung (ohne Feld): $(\hbar = c = 1)$

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = [\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + m\beta] \Psi$$

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix}$$

$\uparrow 2 \times 2$ Pauli Matrizen

Lösungsansatz:

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \varphi(p) \\ \chi(p) \end{pmatrix} e^{\mp i p x} \leftarrow \begin{matrix} \downarrow \text{pos. Energie} \\ \uparrow \text{neg. Energie} \end{matrix} \mp i(Et - \vec{p} \cdot \vec{x})$$

Lösungen $\sim e^{-i p x}$ (pos. Energie):

$$i \frac{\partial}{\partial t} \left[\begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} e^{-i p x} \right] = \left[\begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & -m \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} e^{-i p x}$$

$$\begin{aligned} (E - m) \varphi - \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \chi &= 0 \\ (E + m) \chi - \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \varphi &= 0 \end{aligned} \quad \text{gekoppelte Gl. für } \varphi, \chi$$

$$\hookrightarrow \chi = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E + m} \varphi; \quad \vec{\sigma} \cdot \vec{p} = \begin{pmatrix} p_z & p_x - i p_y \\ p_x + i p_y & -p_z \end{pmatrix}$$

Obere Gl. damit automatisch erfüllt:

$$(E - m)\varphi - \underbrace{(\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E + m}}_{\frac{\vec{p}^2}{E+m}\varphi = \frac{E^2 - m^2}{E+m}\varphi = (E - m)\varphi} \varphi = 0$$

Wähle $\varphi_1 = N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\varphi_2 = N \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\Rightarrow$ Lsg. der Dirac-Gl.: $u_1(p)e^{-ipx}$, $u_2(p)e^{-ipx}$

$$u_1(p) = N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x + ip_y}{E+m} \end{pmatrix}, \quad u_2(p) = N \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_x - ip_y}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \end{pmatrix}$$

Lösungen negativer Energie $\mathcal{E} = -E < 0$: $v_1(p)e^{+ipx}$, $v_2(p)e^{+ipx}$

$$(-E - m)\varphi + \vec{\sigma} \cdot \vec{p}\chi = 0$$

$$(-E + m)\chi + \vec{\sigma} \cdot \vec{p}\varphi = 0$$

$$\varphi = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E + m}\chi \quad \underline{\text{Hier:}} \text{ wähle } \chi_1 = N \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \chi_2 = N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_1(p) = N \begin{pmatrix} \frac{p_x - ip_y}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2(p) = N \begin{pmatrix} \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x + ip_y}{E+m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Normierung der Spinoren

$$\Psi^+ \Psi \longrightarrow u^+ u, v^+ v$$

Beliebteste Möglichkeiten für N :

$$\text{a) } N_{\text{Bjorken,Drell}} = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \longrightarrow u^+ u = \frac{E}{m} \quad (=1 \text{ im Ruhesystem})$$

$$\text{b) } N_{\text{Eichtheorien}} = \sqrt{E+m} \longrightarrow u^+ u = 2E \quad (=2m \text{ im Ruhesystem})$$

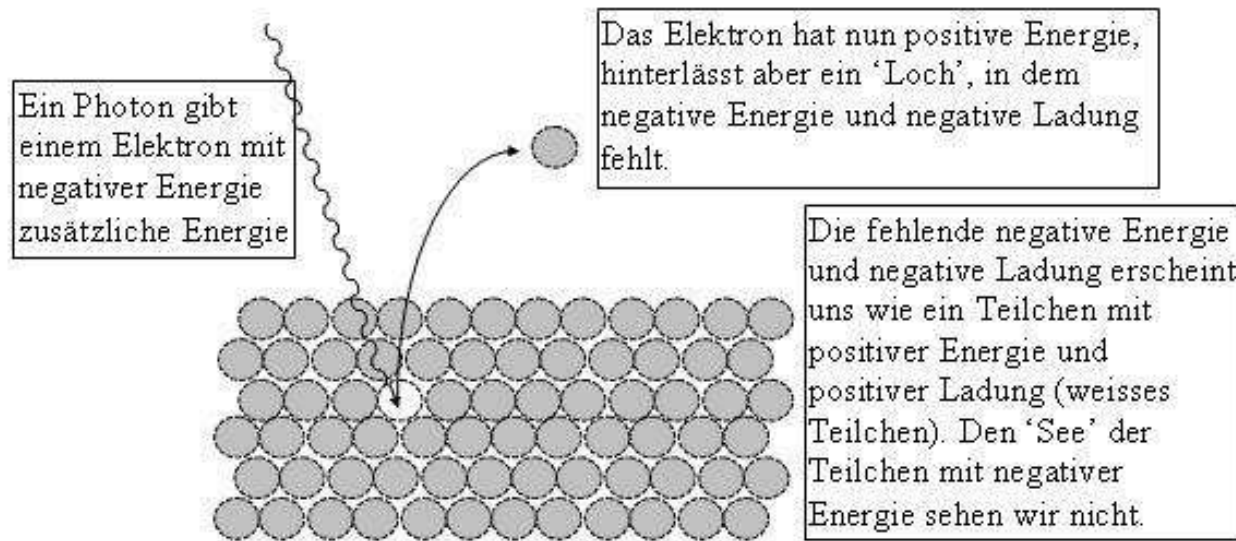
Komplette Lösungen:

$$\Psi_+(x) = u_{1,2}(p) e^{-iEt} e^{+i\vec{p}\cdot\vec{x}}$$

$$\Psi_-(x) = v_{1,2}(p) e^{+iEt} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \longrightarrow \text{Problem: neg. Energie!}$$

Interpretation der Lösungen negativer Energie:

- ① Dirac-See: Alle negativen Energieniveaus besetzt $\equiv$ “See” von Elektronen



→ erklärt $\gamma \rightarrow e^+e^-$ Paarerzeugung ($E_\gamma > 2m_e c^2$)

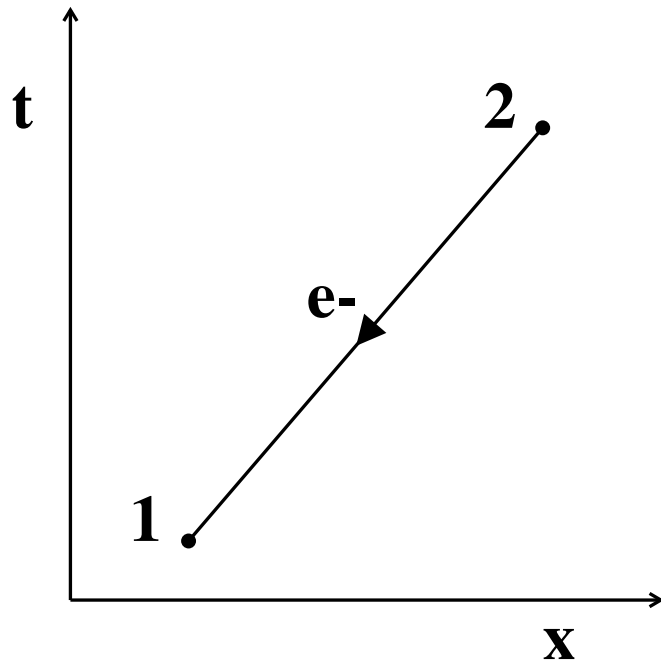
Entdeckung der Positronen 1932 durch C.D. Anderson

② Feynman - Stückelberg Interpretation (um 1934)

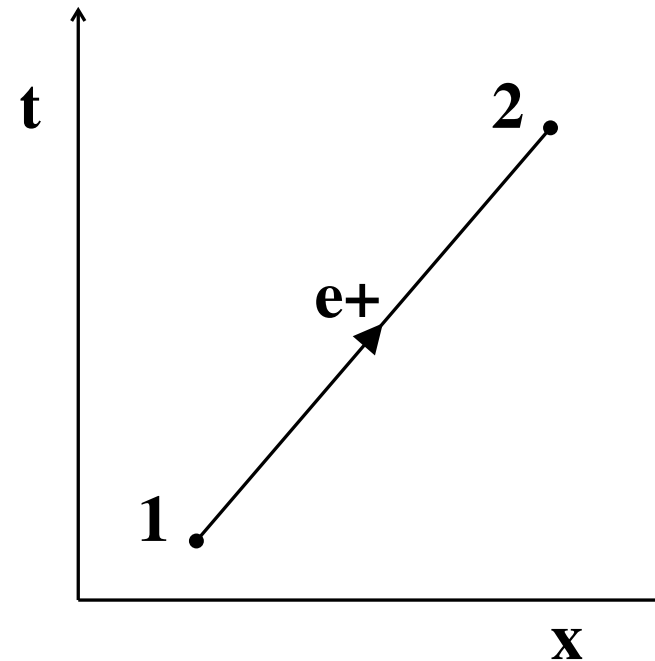
Wellenfunktion $\text{Energie} < 0$, Teilchen e^- , läuft rückwärts in der Zeit

≡

Wellenfunktion $\text{Energie} < 0$, Antiteilchen e^+ , läuft vorwärts in der Zeit



≡



Moderne Schreibweise der Diracgl. mit γ Matrizen

Vierervektoren:

kontravariante (wie x^μ) und kovariante (wie x_μ)

$$p^\mu = (E, p_x, p_y, p_z) = (E, p_1, p_2, p_3) = (E, \vec{p}), \quad \mu = 0, 1, 2, 3$$

$$p_\mu = (E, -\vec{p}) \quad \sum_\mu p^\mu p_\mu = E^2 - \vec{p}^2 = m^2 \quad \text{Lorentz-invariant}$$

Metrischer Tensor $g_{\mu\nu}$:

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad p_\mu = g_{\mu\nu} p^\nu := \sum_{\nu=0}^3 g_{\mu\nu} p^\nu$$

↑ Einsteinsche Summenkonvention

Lorentz invariantes Skalarprodukt von 4-Vektoren:

$$ab = a_\mu b^\mu = a^\mu b_\mu = a^\mu g_{\mu\nu} b^\nu = a_0 b_0 - \vec{a} \cdot \vec{b}$$

$a^2 > 0$ zeitartig, $a^2 = 0$ lichtartig, $a^2 < 0$ raumartig

Lorentz-Trafo:

$$x'^{\nu} = a_{\mu}^{\nu} x^{\mu} \quad \text{LT in z-Richtung:} \quad a_{\mu}^{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

Beispiele für Vierervektoren:

Zeit-Ort

$$x^{\mu} = (t, \vec{x})$$

Energie-Impuls

$$p^{\mu} = (E, \vec{p})$$

elektromagn. Viererpotential

$$A^{\mu} = (\Phi, \vec{A})$$

Viererstromdichte

$$j^{\mu} = (\rho, \vec{j})$$

Gradient

$$\partial^{\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla} \right) \quad (\text{weil } \partial^{\mu} = \frac{\partial}{\partial x_{\mu}})$$

Diracgleichung und γ -Matrizen

$$\gamma^0 = \beta, \gamma^1 = \beta\alpha_1, \gamma^2 = \beta\alpha_2, \gamma^3 = \beta\alpha_3$$

Dirac-Pauli Darstellung:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3$$

β · Diracgleichung ($\hbar = c = 1$)

$$i \left(\beta \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \beta\alpha_1 \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} + \beta\alpha_2 \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} + \beta\alpha_3 \frac{\partial \Psi}{\partial x_3} \right) - m\beta^2 \Psi = 0$$

$$\left\{ +i \left[\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} + \gamma^1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \gamma^2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \gamma^3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right] - m \mathbf{1} \right\} \Psi = 0$$

$$\gamma^\mu = (\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3) \quad \text{Achtung! Ist kein 4-Vektor, } \gamma^\mu \text{ sind in jedem Lorentzsystem gleich}$$

$$\boxed{(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi(x) = 0} \quad \text{Diracgleichung}$$

Eigenschaften der γ -Matrizen:

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \cdot \mathbf{1}$$

$$(\gamma^0)^+ = \gamma^0$$

$$(\gamma^k)^+ = -\gamma^k, \quad k = 1, 2, 3$$

$$(\gamma^0)^2 = \mathbf{1}$$

$$(\gamma^k)^2 = -\mathbf{1}$$

$$(\gamma^\mu)^+ = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0$$

Weitere Abkürzungen:

$$\not{a} \equiv \gamma^\mu a_\mu$$

"a dagger, a slash"

$$\Rightarrow (i\not{\partial} - m)\Psi = 0 \quad \text{Diracgleichung}$$

Dirac Gl. mit elektromagnetischem Feld A^μ

$$p_\mu = i\partial_\mu \xrightarrow{\text{Eichtheorie}} p_\mu - qA_\mu = i\partial_\mu - qA_\mu$$
$$\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu + iqA_\mu$$

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi(x) = g\gamma^\mu A_\mu \Psi(x)$$

$$(i\cancel{\partial} - m)\Psi = q\cancel{A}\Psi$$

Adjungierter Spinor und Vierer-Stromdichte:

Def. $\bar{\Psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0$ adjungierter Spinor

Warum nützlich? $\Psi^\dagger \Psi = \rho$, Wahrs.Dichte, transformiert bei LT $\sim E$

$\bar{\Psi}\Psi$ ist ein Skalar, s. Übungsblatt 2.1

Def. $j^\mu = \bar{\Psi}\gamma^\mu\psi$

$$j^0 = \bar{\Psi}\gamma^0\Psi = \Psi^\dagger\gamma^0\gamma^0\Psi = \Psi^\dagger\Psi = \rho, \quad \underbrace{j^k}_{k=1,2,3} = \bar{\Psi}\gamma^k\Psi = \Psi^\dagger\gamma^0\gamma^k\Psi = \Psi^\dagger\beta\alpha_k\Psi = \Psi^\dagger\alpha_k\Psi$$

Diracgleichung für den adjungierten Spinor $\bar{\Psi}$:

$$i\partial_\mu \bar{\Psi}\gamma^\mu + m\bar{\Psi} = 0$$

Fragen und Antworten von der Stunde 13.4.2010:

- Man kann Teilchen mit

- a) negativer Energie die sich rückwärts in der Zeit ausbreiten behandeln wie
- b) Antiteilchen mit positiver Energie die sich vorwärts in der Zeit ausbreiten.

Frage: ist es besser a) oder b) zu benutzen und gibt es irgendwelche Unterschiede?

Antwort: a) und b) sind absolut äquivalent und es gibt keine Unterschiede. Das sieht man z.B. wenn man das Skalarprodukt von einem auslaufenden Teilchen mit negativer Energie $\phi_f = e^{iE_f t - i\vec{p}_f \cdot \vec{x}}$ mit einem einlaufenden Zustand mit positiver Energie $\phi_i = e^{-iE_i t + i\vec{p}_i \cdot \vec{x}}$ bildet:

$$\begin{aligned} \langle \phi_f | \phi_i \rangle &= \int d^3x \phi_f^*(\vec{x}) \phi_i \vec{x} = \int d^3x e^{-iE_f t + i\vec{p}_f \cdot \vec{x}} e^{-iE_i t + i\vec{p}_i \cdot \vec{x}} \\ &\equiv \int d^3x e^{+i(-E_i)t - i(-\vec{p}_i) \cdot \vec{x}} e^{-iE_f t + i\vec{p}_f \cdot \vec{x}} \equiv \langle \phi_{i, E_i \rightarrow -E_i, \vec{p}_i \rightarrow -\vec{p}_i} | \phi_{f, -E_f \rightarrow E_f, -\vec{p}_f \rightarrow \vec{p}_f} \rangle \end{aligned}$$

D.h. Ein- und Auslaufen von Teilchen und Antiteilchen kann man gegeneinander austauschen wenn man Energie und Impuls umdreht. (Nebenbei: Physikalische Observable werden immer durch solche Skalarprodukte (Matrixelemente) beschrieben). Mehr dazu im Schmüserbuch Kapitel 3., S29 ff

- Wo kommt es her, dass $S = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} \rightarrow$ Die Paulimatrizen sind Repräsentanten der SU2

Drehgruppe und charakterisieren in der Quantenmechanik den Spin von Spin 1/2 Teilchen s.

http://en.wikipedia.org/wiki/Pauli_matrices Für die Diracspinoren müssen wir das noch auf die Vierervektoren verallgemeinern, d.h. die Teilchen und Antiteilchen gleichzeitig beschreiben.

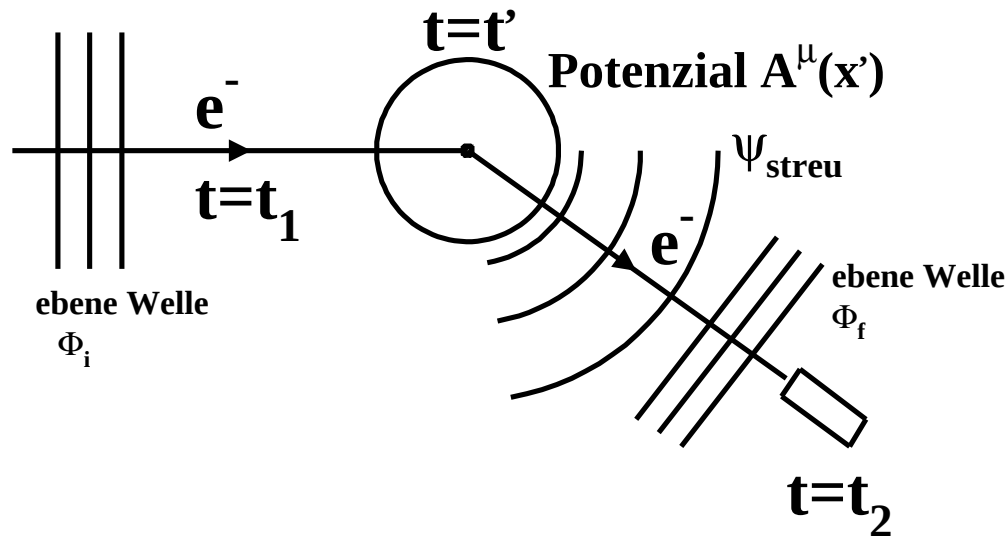
- Beweis, dass $\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = (\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla})$ sich wie kontravarianter Vierervektor verhält (d.h. wie x^μ).

Wenn wir als Beispiel nehmen $\partial^\mu S$ mit $S = x_\nu x^\nu = x_0 x_0 - x_1 x_1 - x_2 x_2 - x_3 x_3$ (S ist ein Lorentzskalar, d.h. invariant unter LTs) finden wir sofort: $\partial^\mu S = 2x^\mu = 2(x_0, x_1, x_2, x_3)$ d.h. verhält sich wie kontravarianter Vektor x^μ . (Formaler Beweis auch über LT von $\frac{\partial}{\partial x_\mu}$ möglich.)

2. Herleitung der Feynman-Regeln

4. Vorlesung, 16.4.2010

Matrixelement von Streuprozessen (z.B. Elektronenstreuung)



Von Streuwelle Ψ_{Streu} wird nur Anteil Φ_f mit $\vec{p}_f$ gemessen. Wahrscheinlichkeit für Übergang $\Phi_i \rightarrow \phi_f$ ist gegeben durch:

$$\begin{aligned}
 S_{fi} &\equiv \langle \Phi_f | \Psi_{streu} \rangle = \langle \Phi_f | S | \Phi_i \rangle \\
 \sigma, \frac{\partial \sigma}{\partial \Omega}, \Gamma &= \int d^3x_2 \Phi_f^+(x_2) \Psi_{streu}(x_2) = \underbrace{\int d^3x_2 \Phi_f^+(x_2) S \Psi_i(x_2)}_{\text{Störungstheorie, Feynmangraphen}}
 \end{aligned}$$

Berechnung von Ψ_{streu} (Kapitel 4 Schmüser)

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi_{streu}(x) = -e\gamma^\mu A_\mu(x)\Psi_{streu}(x) = -e\cancel{A}\Psi_{streu}(x)$$

Erinnerung: Lösung von DGLs mit Greenschen Funktion

↪ Bsp. Elektrostat. Potenzial:

$$\nabla^2 \Phi(x) = -\rho(x) \quad \text{Poissongleichung}$$

Lösung ist

$$\Phi(x) = \int G(\vec{x} - \vec{x}') \rho(\vec{x}') d^3 x'$$

mit Greenscher Funktion:

$$G(\vec{x} - \vec{x}') = \frac{1}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}'|}, \quad \text{denn } \nabla^2 G(\vec{x} - \vec{x}') = -\delta^3(\vec{x} - \vec{x}')$$

Greensche Funktion für Diracgleichung mit Feld

$$(i\partial - m)K(x - x') = \delta^4(x - x')$$

↑ gesucht

$$\Psi(x) = -e \int K(x - x') \not{A} \Psi(x') d^4 x'$$

Integralgleichung

↑ Ψ taucht wieder auf

Vorteil: Iterative Lösung möglich → Störungstheorie

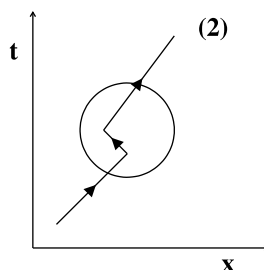
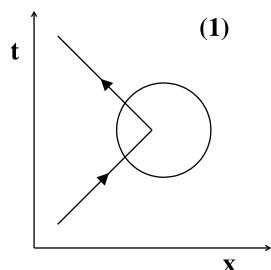
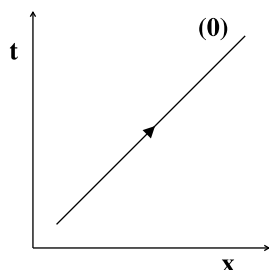
$$\Psi^{(0)}(x) = \Phi(x) \quad \text{ebene Welle}$$

$$\Psi^{(1)}(x) = \Phi(x) - e \int K(x - x') \not{A} \Psi^{(0)}(x') d^4 x'$$

$$\Psi^{(2)}(x) = \Phi(x) - e \int K(x - x') \not{A} \Psi^{(1)}(x') d^4 x'$$

Allgemeine Lösung einer DGL

= Lsg. des homogenen Systems +
spezielle Lsg. des inh. Systems



Störungstheorie Terme für $S_{fi}^2 \sim \alpha^{0,1,2}$
mit $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\hbar c} = 1/137$

Der Elektronpropagator

Berechnung der Greenschen Funktion $K(x - x') \rightarrow$ Propagator!

$$K(x - x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p \tilde{K}(p) e^{-ip(x-x')} \\ \uparrow \text{Fouriertransf. von } K$$

$$(i\not{\partial} - m)K(x - x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p (\not{p} - m) \tilde{K}(p) e^{-ip(x-x')} \\ \underset{=}{\text{fordere}} \quad \delta^4(x - x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{-ip(x-x')}$$

$$\Rightarrow (\not{p} - m) \tilde{K}(p) = \mathbf{1}$$

$$\underbrace{(\not{p} + m)(\not{p} - m)}_{p^2 - m^2} \tilde{K}(p) = (\not{p} + m)$$

$$\boxed{\tilde{K}(p) = \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2}} \quad \text{Elektronpropagator}$$

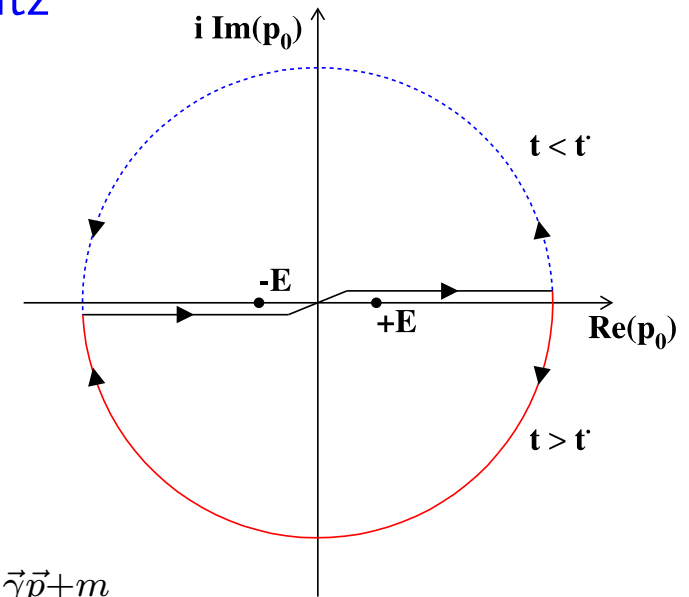
Beachte: $p^2 - m^2 \neq 0$, virtuelles Teilchen! (reelles Teilchen: $p^2 = E^2 - \vec{p}^2 = m^2$)

Wie sieht $K(x - x')$ aus?

$$K(x - x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3p e^{i\vec{p}(\vec{x} - \vec{x}')} \int_{-\infty}^{\infty} dp_0 \underbrace{\frac{e^{-ip_0(t-t')}(p\not{+} + m)}{(p_0 - E)(p_0 + E)}}_{\text{Pole bei } p_0 = \pm E} \quad \text{mit } E = +\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$$

Integral konvergiert nicht bei Integration über reelle Achse (über p_0)

Trick: Erweiterung auf komplexe p_0 Ebene $\rightarrow$ **Residuensatz**



$t > t'$:

$$K(x - x') \stackrel{\text{Pol } +E}{=} -i \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p e^{+i\vec{p}(\vec{x} - \vec{x}') - iE(t-t')} \frac{\gamma^0 E - \vec{\gamma} \vec{p} + m}{2E}$$

$t < t'$:

$$K(x - x') \stackrel{\text{Pol } -E}{=} -i \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p e^{+i\vec{p}(\vec{x} - \vec{x}') + iE(t-t')} \frac{-\gamma^0 E - \vec{\gamma} \vec{p} + m}{2E}$$

Äquivalente Herleitung $\tilde{K}(p) = \frac{p\not{+} + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$

Warum heisst $K(x'-x)$ Propagator?

$K(x - x')$ bewirkt Propagation (Ausbreitung) eines freien Dirac Spinors von x' nach x :

$$t > t' : \quad i \int d^3x' K(x - x') \gamma^0 \phi(x') = \Phi(x)$$

$$t < t' : \quad i \int d^3x' K(x - x') \gamma^0 \phi(x') = 0$$

Mit $\bar{\phi}(x) = \phi^\dagger \gamma^0$:

$$t < t' : \quad i \int d^3x' \bar{\phi}(x') \gamma^0 K(x - x') = \bar{\phi}(x)$$

$$t > t' : \quad i \int d^3x' \bar{\phi}(x') \gamma^0 K(x - x') = 0$$

Beweis für Propagatorrolle von K :

$$\phi(x') = u(k) e^{-ik_0 t' + i\vec{k} \cdot \vec{x}'}$$

$$\phi(x) = \int d^3p \underbrace{\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3x' e^{i(\vec{k}-\vec{p}) \cdot \vec{x}'} \frac{\gamma^0 E - \vec{\gamma} \cdot \vec{k} + m}{2E} e^{i(E-k_0)t'} \gamma^0 u(k) e^{i\vec{p} \cdot \vec{x} - iEt}}_{\delta^3(\vec{k}-\vec{p}) \Rightarrow \vec{k}=\vec{p} \text{ und } k_0=E}$$

$$= e^{-ik_0 t + i\vec{k} \cdot \vec{x}} \frac{\gamma^0 E - \vec{\gamma} \cdot \vec{k} + m}{2k_0} \gamma^0 u(k) = ?$$

$$(\gamma^0 k_0 - \vec{\gamma} \vec{k} + m) \gamma^0 u(k) = \gamma^0 [\gamma^0 k_0 u(k) + \underbrace{(\vec{\gamma} \vec{k} + m) u(k)}_{Dirac-Gl. = \gamma^0 k_0 u(k)}]$$

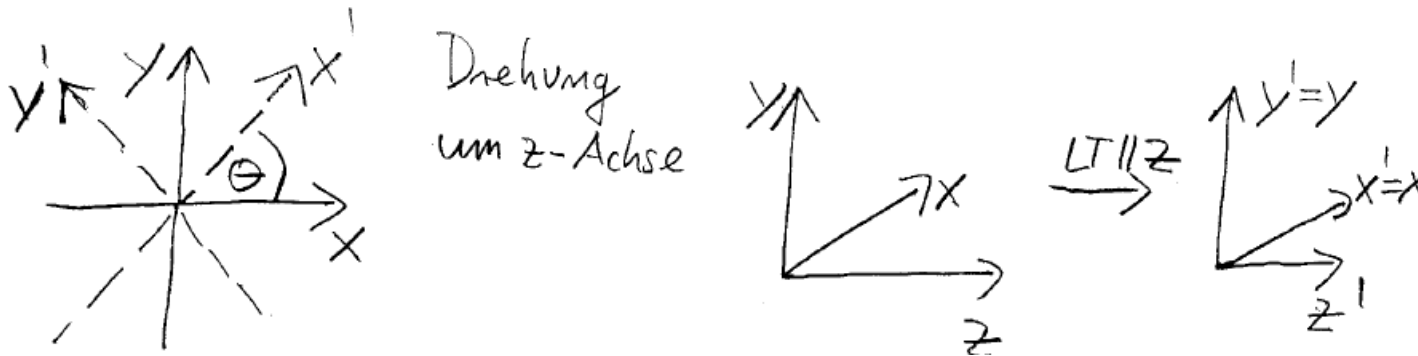
$$= 2k_0 u(k)$$

$$\hookrightarrow \text{einsetzen} \rightarrow \phi(x) = e^{-ik_0 t + i\vec{k} \cdot \vec{x}} u(k) = \phi(x)$$

Kovarianz der Dirac-Gleichung

Forderung: Dirac Gl. sollte in jedem Inertialsystem gleich aussehen.

homogene^a Koordinatentransformationen $x' = ax$: *Drehungen und LTs*



Ansatz für Spinortrafo:

$$\Psi'(x') = S(a) \cdot \Psi(x) = S(a) \cdot \Psi(a^{-1}x'); \quad \text{Es sollte gelten: } S^{-1}(a) = S(a^{-1})$$

$$\text{Dirac Gl.: } (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0; \quad \text{benutze } \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} = a_\mu^\nu \partial'_\nu$$

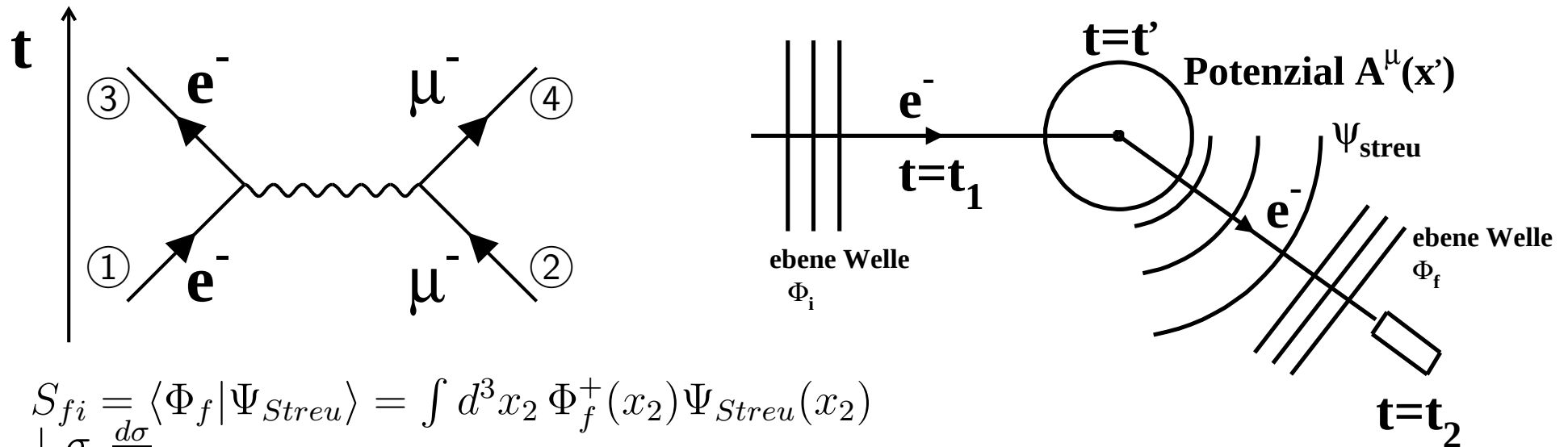
$$\Rightarrow (i\gamma^\mu a_\mu^\nu \partial'_\nu - m)S^{-1}\psi'(x') = 0$$

$$(i \underbrace{S a_\mu^\nu \gamma^\mu S^{-1}}_{=\gamma^\nu} \partial'_\nu - m)\psi'(x') = 0$$

$$\Rightarrow S^{-1}\gamma^\nu S = a_\mu^\nu \gamma^\mu$$

^ahomogene K.T. lassen den Koordinatenursprung unverändert

Ziel: Wirkungsquerschnitt ($\sigma, \frac{d\sigma}{d\Omega}$) für $e^- + \mu^- \rightarrow e^- + \mu^-$



$$S_{fi} = \langle \Phi_f | \Psi_{Streu} \rangle = \int d^3x_2 \Phi_f^+(x_2) \Psi_{Streu}(x_2)$$

$\downarrow \sigma, \frac{d\sigma}{d\Omega}$

Ψ_{Streu} lässt sich in Störungstheorie berechnen

$$\Psi_{Streu} \approx \Psi^{(1)}(x) = \Phi_i(x) - ie \int d^4x' K(x-x') \not{A}(x') \Phi_i(x'), \quad \text{z.B. } \Phi(x) = u(p_1) e^{-ip_1 x}$$

$$S_{fi} = \underbrace{\int d^3x_2 \Phi_f^+(x_2) \Phi_i(x_2)}_{2E_i \delta_{fi}} - ie \underbrace{\int d^4x' \int d^3x_2 \Phi_f^+(x_2) K(x_2 - x') \not{A}(x') \Phi_i(x')}_{i\bar{\Phi}_f(x')}$$

$$S_{fi} = S_{fi}^{(0)} + S_{fi}^{(1)} + \dots$$

$$S_{fi}^{(1)} = ie \int d^4x' \bar{\Phi}_f(x') \not{A}(x') \Phi_i(x')$$

Zwischenergebnis, wie erhält man $\not{A}$ aus Myonstrom? $\Rightarrow$

Berechnung von A^μ aus Muonstrom $\Rightarrow$ konstruiere Photonpropagator

$$\square A^\mu(x) = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) A^\mu(x) = \underbrace{e J^\mu(x)}_{\text{Viererstrom eines Teilchens mit Ladung } +e}$$

(Lorentz-Eichung $\partial_\mu A^\mu = 0$)

Sei $D^{\mu\nu}$ eine Lösung von:

$$\square D^{\mu\nu}(x - x') = g^{\mu\nu} \delta^4(x - x')$$

Dann gilt:

$$A^\mu(x) = e \int d^4x' D^{\mu\nu}(x - x') J_\nu(x')$$

Berechnung von $D^{\mu\nu}(x - x')$

$$D^{\mu\nu}(x - x') = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \tilde{D}^{\mu\nu}(q) e^{-iq(x-x')}$$

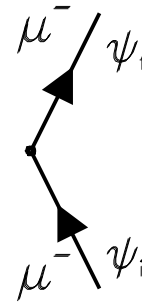
$$\square D^{\mu\nu}(x - x') = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} (-q^2) \tilde{D}^{\mu\nu}(q) e^{-iq(x-x')} \stackrel{!}{=} g^{\mu\nu} \delta^4(x - x')$$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{D}^{\mu\nu}(q) = \frac{-g^{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon}}$$

[→ Interaktive Übungsaufgabe](#)

Hier (Streuproblem $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$) gilt:

$$\square A^\mu(x) = -e \underbrace{J^\mu(x)}_{Myon} = -e \underbrace{\bar{\Psi}_f(x)}_{Myon} \gamma^\mu \underbrace{\Psi_i(x)}_{Myon}$$



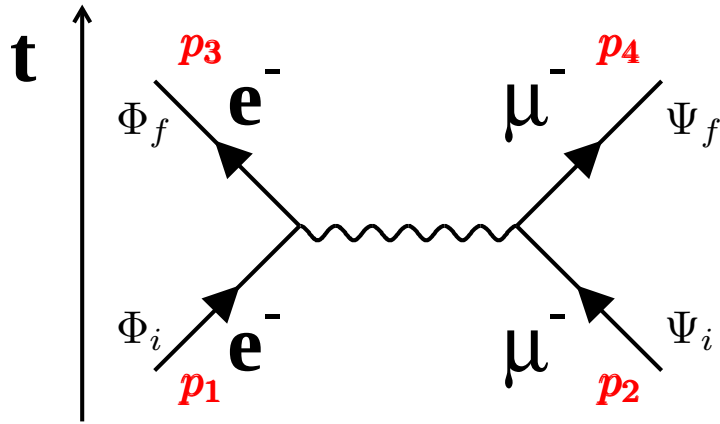
$$J^\mu(x) = \bar{u}(p_f) \gamma^\mu u(p_i) e^{i(p_f - p_i)x}$$

$$A^\mu(x) = -e \int d^4x' \underbrace{\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{-g^{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon} e^{-iq(x-x')}}_{D^{\mu\nu}(x-x')} \cdot \bar{u}(p_f) \gamma_\nu u(p_i) e^{i(p_f - p_i)x'}$$

Integration über x' kann man ausführen $(2\pi)^4 \delta^4(k) = \int d^4x' e^{-ikx'}$

$$A^\mu(x) = -e \int d^4q \delta^4(p_f - p_i + q) \frac{-g^{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon} e^{-iqx} \bar{u}(p_f) \gamma_\nu u(p_i)$$

→ Zwischenergebnis



Elektron:

$$\Phi_i(x') = u(p_1)e^{-ip_1x'}$$

$$\Phi_f(x') = u(p_3)e^{-ip_3x'}$$

Myon:

$$\Psi_i(x') = u(p_2)e^{-ip_2x'}$$

$$\Psi_f(x') = u(p_4)e^{-ip_4x'}$$

$$S_{fi}^{(1)} = +ie \int d^4x' \bar{u}(p_3)e^{+ip_3x'} \gamma_\mu A^\mu(x') u(p_1)e^{-ip_1x'}$$

$$= +ie^2 \int d^4x' \bar{u}(p_3)e^{+ip_3x'} \gamma_\mu \underbrace{\int d^4q \delta^4(p_4 - p_2 + q) \frac{g^{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon} e^{-iqx'} \bar{u}(p_4)\gamma_\nu u(p_2) u(p_1)e^{-ip_1x'}}_{A^\mu(x')}$$

Integration über $x' \rightarrow \delta^4()$:

$$S_{fi}^{(1)} = ie^2 \int d^4q (2\pi)^4 \delta^4(p_4 - p_2 + q) \delta^4(p_3 - p_1 - q) \bar{u}(p_3)\gamma_\mu u(p_1) \frac{g^{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon} \bar{u}(p_4)\gamma_\nu u(p_2)$$

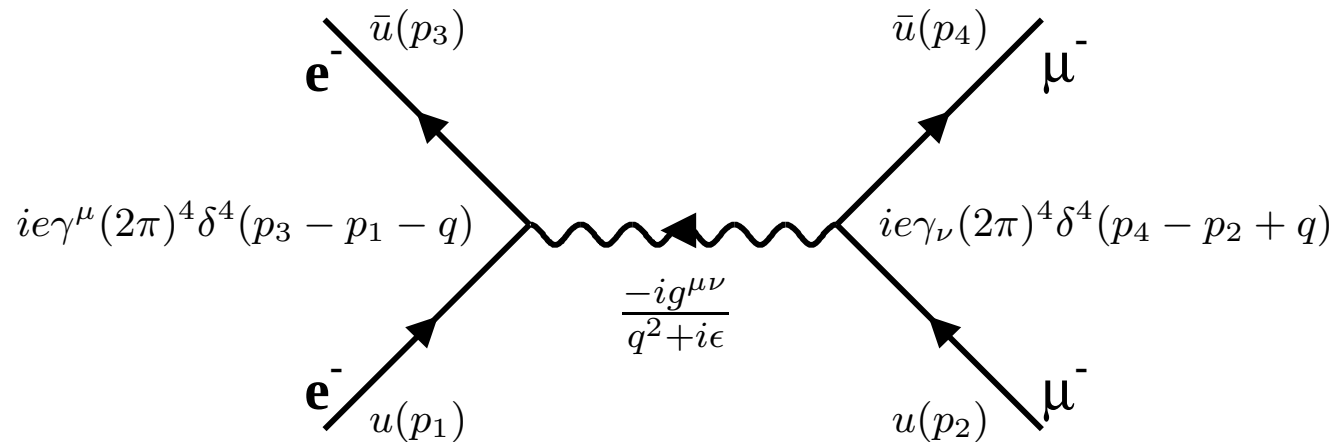
≡ Resultat mit Feynmanregeln

$$S_{fi}^{(1)} = ie^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_3 + p_4 - p_1 - p_2) \bar{u}(p_3)\gamma_\mu u(p_1) \frac{1}{(p_1 - p_3)^2} \bar{u}(p_4)\gamma^\mu u(p_2)$$

$$S_{fi}^{(1)} = M^{(1)} (2\pi)^4 \delta^4(p_3 + p_4 - p_1 - p_2),$$

$$M^{(1)} = +ie^2 \bar{u}(p_3)\gamma_\mu u(p_1) \frac{1}{(p_1 - p_3)^2} \bar{u}(p_4)\gamma^\mu u(p_2)$$

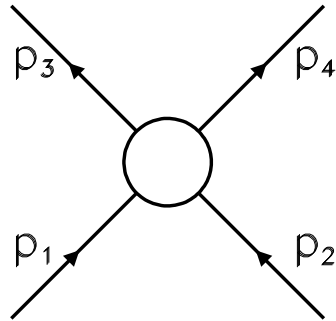
Feynman-Diagramme:



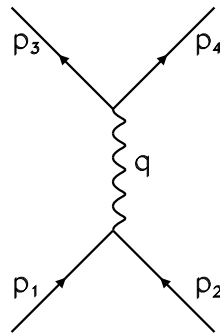
Feynman-Diagramm (QED) Konventionen:

Fermionen $\longrightarrow$	gerade Linien	
Photonen $\longrightarrow$	Wellenlinien	
einlaufendes Fermion $\longrightarrow$	$u(p)$	einl. Antifermion $\longrightarrow$ $\bar{v}(p)$
auslaufendes Fermion $\longrightarrow$	$\bar{u}(p)$	ausl. Antifermion $\longrightarrow$ $v(p)$
einlaufendes Photon (relles) $\longrightarrow$	$\epsilon_\mu(k)$ Pol.vektor $\epsilon_\mu = (\epsilon_0, \vec{\epsilon}) = (0, \vec{\epsilon})$	
ausl. Photon $\longrightarrow$	$\epsilon_\mu^*(k)$	
virtuelles Photon $\longrightarrow$	$\frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon}$	virtuelles Elektron $\longrightarrow$ $i\frac{(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$
Lepton-Photon Vertex $\longrightarrow$	$-i(\pm e)\gamma^\mu(2\pi)^4\delta^4(p_f - p_i - q)$	
integriere über innere Linien $\longrightarrow$	$\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}$	

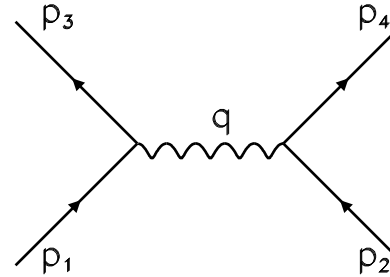
Kinematik der $2 \rightarrow 2$ Streuung:



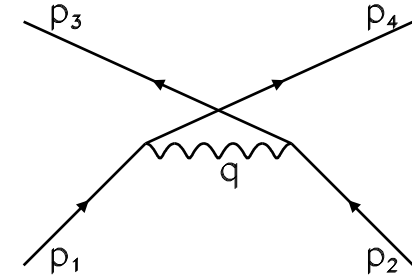
$s = q^2$
s-Kanal



$t = q^2$
t-Kanal



$u = q^2$
u-Kanal



Energie- und Impulserhaltung: $\rightarrow p_1 + p_2 = p_3 + p_4$

Erinnerung: $p_i p_i = m_i^2, i=1,2,3,4$

2 unabhängige Größen beschreiben diese Streusituation $\Rightarrow$ **Mandelstam-Variablen:**

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1 p_2 \quad \begin{matrix} \text{sehr hohe Energie} \\ \approx \end{matrix} \quad 2p_1 p_2$$

$$t = (p_1 - p_3)^2 = (p_2 - p_4)^2 = p_1^2 + p_3^2 - 2p_1 p_3 \quad \approx \quad -2p_1 p_3$$

$$u = (p_1 - p_4)^2 = (p_2 - p_3)^2 = p_1^2 + p_4^2 - 2p_1 p_4 \quad \approx \quad -2p_1 p_4$$

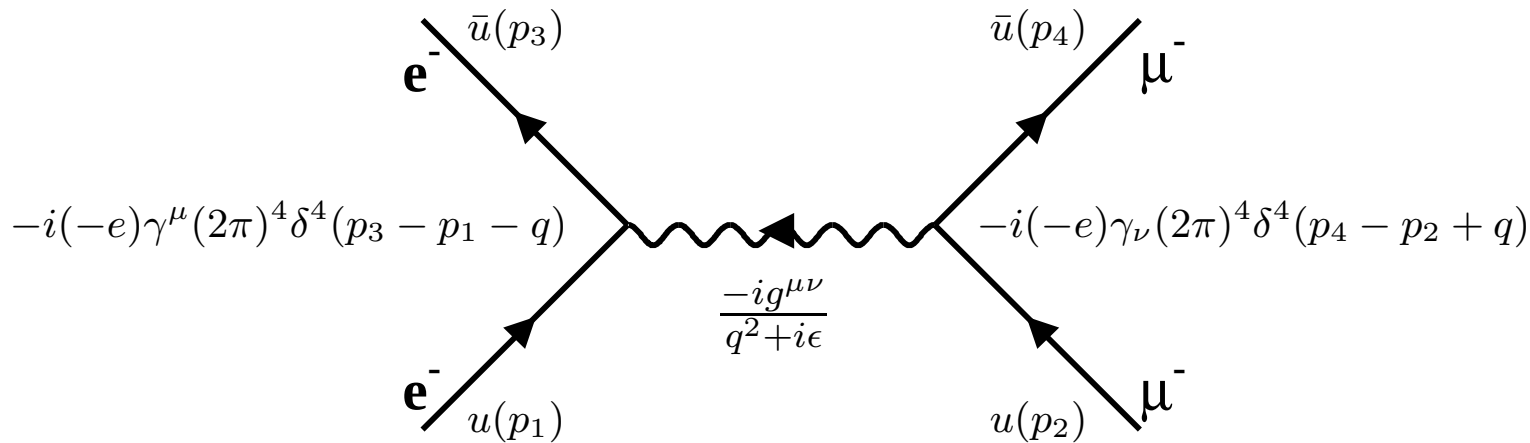
Es gilt $s + t + u = \sum_{i=1}^4 m_i^2$ **zu zeigen!**

$$s + t + u = (p_1 + p_2)^2 + (p_1 - p_3)^2 + (p_1 - p_4)^2$$

$$= \underbrace{p_1^2}_{=m_1^2} + 2p_1 p_2 + \text{weiterrechnen, für } -2p_1 p_4 \text{ für } p_1 \text{ ersetzen durch } p_1 = p_3 + p_4 - p_2$$

Wiederholung: Ziel Matrixelement M eines Prozesses

6. Vorlesung, 23.4.2010

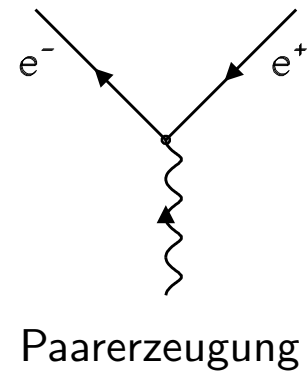
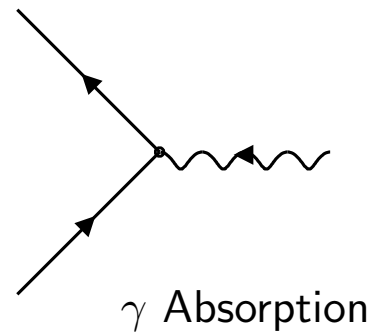
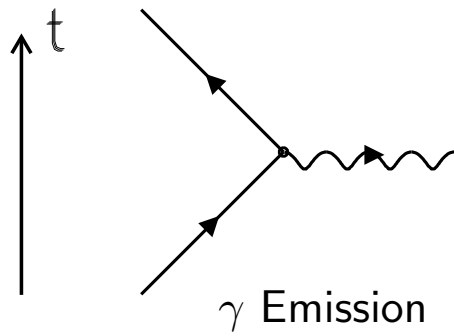


- ① Diagramm aufzeichnen
- ② Pfeile einfügen
- ③ $u, \bar{u}, v, \bar{v}$ Spinoren mit Impulsen verteilen, Propagatoren
- ④ Faktoren für die Vertices
- ⑤ über innere Linien integrieren $\int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4}$

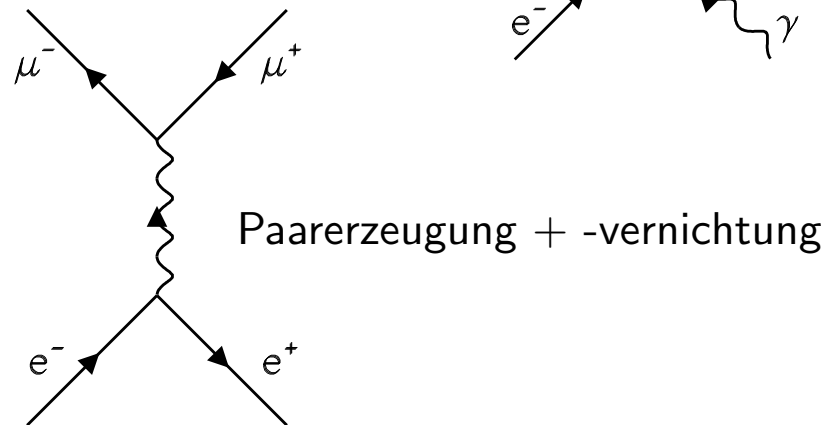
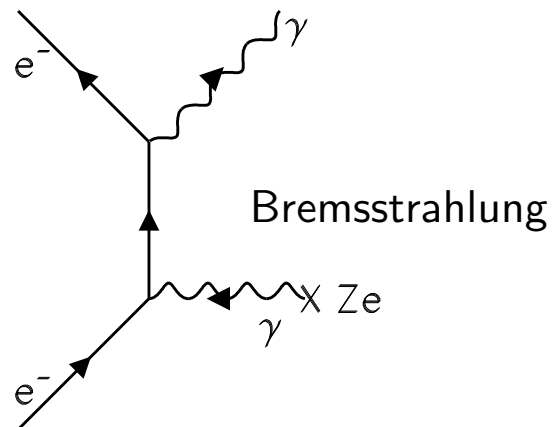
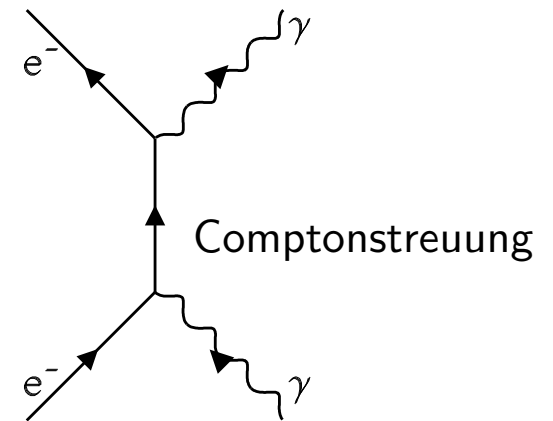
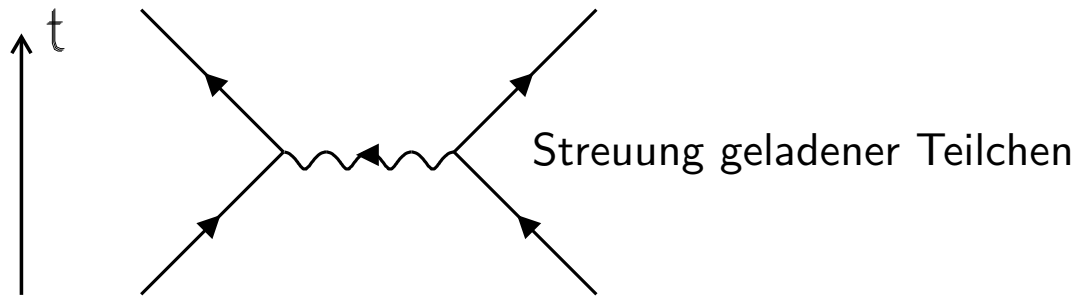
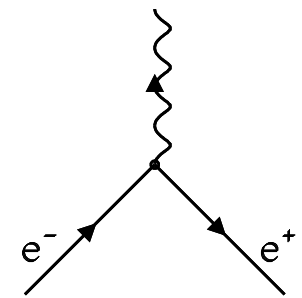
$$S_{fi}^{(1)} = ie^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^4(p_4 - p_2 + q) \underbrace{\bar{u}(p_3) \gamma_\mu u(p_1)}_{J_\mu = \text{Elektronstrom}} \frac{g^{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon} (2\pi)^4 \delta^4(p_3 - p_1 - q) \underbrace{\bar{u}(p_4) \gamma_\nu u(p_2)}_{J_\nu = \text{Muonstrom}}$$

$$S_{fi}^{(1)} = (2\pi)^4 \delta^4(p_3 + p_4 - p_1 - p_2) \underbrace{ie^2 \bar{u}(p_3) \gamma_\mu u(p_1) \frac{1}{q^2} \bar{u}(p_4) \gamma^\mu u(p_2)}_M \quad \text{mit } q = p_1 - p_3$$

Elementarprozesse



Paarvernichtung



Berechnung von Zerfallsraten und Wirkungsquerschnitten aus dem Matrixelement M :

Notationshinweis: wir benutzen kleine p_i für Viererimpulse und grosse P_i für Dreierimpulse

1. Goldene Regel für Zerfälle $1 \longrightarrow 2 + 3 + 4 + \dots n$

(Hier ohne Herleitung, siehe Schmüser S. 51 ff für $d\sigma$)

$$d\Gamma = |M|^2 \frac{S}{2\hbar m_1} \left[\left(\frac{c d^3 P_2}{(2\pi)^3 2E_2} \right) \left(\frac{c d^3 P_3}{(2\pi)^3 2E_3} \right) \cdots \left(\frac{c d^3 P_n}{(2\pi)^3 2E_n} \right) \right] \\ \cdot (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_2 - p_3 - \dots - p_n)$$

S ist statistischer Faktor: $\frac{1}{j!}$ für jede Gruppe von j identischen Teilchen

2. Goldene Regel für Streuprozesse $1 + 2 \rightarrow 3 + 4 + \dots + n$

$$d\sigma = |M|^2 \frac{\hbar^2 S}{4 \sqrt{(p_1 p_2)^2 - (m_1 m_2 c^2)^2}} \underbrace{\left[\left(\frac{c d^3 P_3}{(2\pi)^3 2E_3} \right) \left(\frac{c d^3 P_4}{(2\pi)^3 2E_4} \right) \cdots \left(\frac{c d^3 P_n}{(2\pi)^3 2E_n} \right) \right]}_{dLips, \text{ Lorentz inv. Phasenraum}} \\ \cdot (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4 - \dots - p_n)$$

$$F = 4 \sqrt{(\quad)^2 - (\quad)^2} \quad \text{Lorentz-invarianter Flussfaktor}$$

Im Folgenden:

Ziel ist die komplette Herleitung des Wirkungsquerschnittes für den Streuprozess

$$e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$$

(diese Reaktion ist vom Typ $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$)

Schritte:

- 1. Bestimme Flussfaktor F für einlaufende Teilchen*
- 2. Führe Phasenraumintegration aus über die auslaufenden Impulse, ersetze dabei Integration über Impulse durch Integration über Energie und Raumwinkel*
- 3. Berechne Matrixelementquadrat $|M|^2$ unter Berücksichtigung aller möglichen Spineinstellungen*

Bemerkungen zum Flussfaktor:

$$d\sigma \sim \frac{1}{F}$$

↓ Dichte der Targetteilchen

$$F = |j_{\text{ein}}| \cdot n_{\text{target}} = \frac{|\vec{v}_1|}{V/2 E_1} \cdot \frac{2E_2}{V} = \frac{|\vec{v}_1| 4E_1 E_2}{V^2}$$

↑ Stromdichte der einlaufenden Teilchen

($u^+ u \sim 2E$ Normierung)

zu zeigen $F = \frac{4}{V^2} \sqrt{(p_1 p_2)^2 - (m_1 m_2)^2}$

Beweis im Laborsystem:



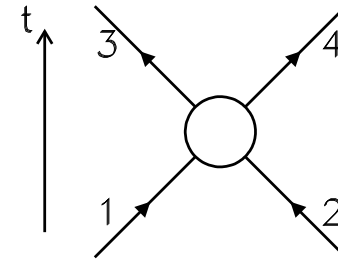
$$p_1 = (E_1, \vec{P}_1), \quad p_2 = (m_2, 0), \quad \Rightarrow p_1 p_2 = E_1 m_2$$

$$F = \frac{4}{V^2} \sqrt{E_1^2 m_2^2 - m_1^2 m_2^2} = \frac{4}{V^2} m_2 |\vec{P}_1| = \frac{4}{V^2} m_2 |\vec{v}_1| E_1 = \frac{4|\vec{v}_1| E_1 E_2}{V^2}$$

Im Schwerpunktsystem (CMS) (*Empfehlung: nachrechnen!*)

$$\boxed{F_{\text{cms}} = \frac{4}{V^2} P_i \sqrt{s}} \quad \begin{aligned} s &= (p_1 + p_2)^2 \\ |\vec{P}_1| &= |\vec{P}_2| = P_i \end{aligned}$$

Im Folgenden: Lasse $\frac{1}{V^2}$ weg, kürzt sich mit entsprechenden Faktoren in $|M|^2$



Ziel: Differenzieller WQ $\rightarrow$ ausintegrieren von $dLips$ im CMS:

$$1 + 2 \rightarrow 3 + 4 \quad d\sigma = |M|^2 \underbrace{\frac{1}{4P_i\sqrt{s}}}_{F} \underbrace{\frac{d^3P_3}{(2\pi)^3 2E_3} \frac{d^3P_4}{(2\pi)^3 2E_4} \cdot 2\pi^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)}_{dLips}$$

$$\int d^3P_4 \text{ kann leicht ausgeführt werden; es gilt } \vec{P}_3 = -\vec{P}_4, \quad |\vec{P}_3| = |\vec{P}_4| = P_f$$

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (E_1 + E_2)^2 = (p_3 + p_4)^2 = (E_3 + E_4)^2$$

$$dLips = \int d^3P_4 \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{d^3P_3}{4E_3E_4} \delta(\sqrt{s} - E_3 - E_4) \delta^3(\vec{P}_3 + \vec{P}_4 - \underbrace{\vec{P}_2 - \vec{P}_1}_{=0}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{d^3P_3}{4E_3E_4} \delta(\sqrt{s} - E_3 - E_4)$$

Ersetze Impuls- durch Energieintegration:

$$\text{mit } E_3 = \sqrt{|P_f|^2 + m_3^2}, \quad E_4 = \sqrt{|P_f|^2 + m_4^2} \Rightarrow dE_3 = \frac{P_f}{E_3} dP_f, \quad dE_4 = \frac{P_f}{E_4} dP_f$$

$$W = E_3 + E_4, \quad dW = dE_3 + dE_4 = dE_3(1 + \frac{E_3}{E_4}) = dE_3 \frac{W}{E_4}$$

$$\Rightarrow \frac{d^3P_3}{E_3E_4} = \frac{P_f^2 dP_f d\Omega}{E_3E_4} = \frac{P_f E_3 dE_3 d\Omega}{E_3E_4} = P_f \frac{dW}{W} d\Omega$$

$$dLips = \int \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{d^3P_3}{4E_3E_4} \delta(\sqrt{s} - W) = \int \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{P_f dW d\Omega}{4W} \delta(\sqrt{s} - W) = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{P_f}{4\sqrt{s}} d\Omega$$

$\frac{d\sigma}{d\Omega} _{cms} = \frac{1}{64\pi^2} \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{P_f}{P_i} M ^2$	$s = (p_1 + p_2)^2$	Hochenergiegrenze: $\frac{P_f}{P_i} \rightarrow 1 \quad \sigma \sim \frac{1}{s}$ $(m \ll \sqrt{s})$
--	---------------------	--

Jetzt: $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ für $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$

Berechnung von $|M|^2 = M \cdot M^*$

$$M = ie^2 \bar{u}(p_3) \gamma_\mu u(p_1) \frac{1}{q^2} \bar{u}(p_4) \gamma^\mu u(p_2)$$

$$\begin{array}{ccc} u_1(p), & u_2(p) & (\text{und } v_1(p), v_2(p)) \\ \text{Spin } \uparrow \uparrow & \downarrow \uparrow & \end{array}$$

unterscheiden sich durch Spinstellung

Streuung von unpolarisierten Teilchen:

- Mittelung über die Spins der Teilchen im Anfangszustand

$$\overline{|M|^2} = \frac{1}{4} \sum_{S_1, S_2} |M|^2$$

- Wenn Polarisation nicht beobachtet:

Summation über alle möglichen Spins im Endzustand

$$\overline{|M|^2} = \frac{1}{4} \sum_{S_1, S_2} \sum_{S_3, S_4} |M|^2 = 2e^4 \frac{s^2 + u^2}{t^4} \text{ nächstes Mal Beweis}$$

Elektron Myonstreuung: Betrachtungen der Dimensionalität

Eine Betrachtung der physikalischen Dimensionen ist hilfreich im Verständnis der QED Streuprozesse. Mit natürlichen Einheiten $\hbar = 1$, $c = 1$ gibt es nur eine unabhängige Dimension die wir als Länge L wählen wollen. Damit: $[x] = [t] = L$, $[E] = [P] = L^{-1}$
 Aufgabe: Tragen Sie für die Streuamplitude $S_{fi}^{(1)}$ unter den Klammern die Dimension der jeweiligen Ausdrücke ein und bestimmen Sie die resultierende Dimension:

$$S_{fi}^{(1)} = (2\pi)^4 \underbrace{\delta^4(p_3 + p_4 - p_1 - p_2)}_{L^4} i e^2 \underbrace{\bar{u}(p_3) \gamma_\mu u(p_1)}_{L^{-1}} \underbrace{\frac{1}{q^2}}_{L^2} \underbrace{\bar{u}(p_4) \gamma^\mu u(p_2)}_{L^{-1}} = M^{(1)} (2\pi)^4 \delta^4(p_3 + p_4 - p_1 - p_2)$$

Wie ändert sich die Situation wenn wir ein Normierungsvolumen für die Spinoren einführen?

$$S_{fi}^{(1)} = \underbrace{\frac{1}{V^2}}_{L^{-6}} (2\pi)^4 \underbrace{\delta^4(p_3 + p_4 - p_1 - p_2)}_{L^4} i e^2 \underbrace{\bar{u}(p_3) \gamma_\mu u(p_1)}_{L^{-1}} \underbrace{\frac{1}{q^2}}_{L^2} \underbrace{\bar{u}(p_4) \gamma^\mu u(p_2)}_{L^{-1}}$$

Wir betrachten die Übergangswahrscheinlichkeit und integrieren über ein- und auslaufende Impulszustände. Was ist die Dimension von W ?

$$W = \underbrace{|S_{fi}|^2}_{L^{-12}} \cdot \underbrace{V \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3 2E_1}}_{L^3} \underbrace{V \int \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3 2E_2}}_{L^3} \underbrace{V \int \frac{d^3 p_3}{(2\pi)^3 2E_3}}_{L^3} \underbrace{V \int \frac{d^3 p_4}{(2\pi)^3 2E_4}}_{L^3} \quad \text{hat korrekte Dimension}$$

Streuung Teilchen 1 an Targetteilchen 2 (beide mit fixem Impuls): Hinweis: S_{fi}^2 enthält $[\delta^4(\omega)]^2$ mit $\omega = p_3 + p_4 - p_1 - p_2$, benutze $(2\pi)^4 [\delta^4(\omega)]^2 = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 x e^{-i\omega x} \int d^4 x' e^{-i\omega x'} = \int d^4 x e^{-i\omega x} \delta(\omega) \approx V T \delta(\omega)$

$$W = \underbrace{|M_{fi}|^2}_{L^{-4}} \underbrace{V \int \frac{d^3 p_3}{(2\pi)^3 2E_3}}_{L^3} \underbrace{V \int \frac{d^3 p_4}{(2\pi)^3 2E_4}}_{L^3} \underbrace{(2\pi)^4 \delta^4(p_3 + p_4 - p_1 - p_2)}_{L^4} \cdot \underbrace{\frac{VT}{2E_2}}_{L^0} \quad \left(\text{Faktor } \frac{1}{2E_2} \text{ für Dichte Targetteilchen} \right)$$

Wirkungsquerschnitt:

$$\underbrace{\sigma}_{L^2} = \frac{W}{T \cdot j_{\text{ein}}} = \underbrace{|M_{fi}|^2}_{L^{-4}} \underbrace{V \int \frac{d^3 p_3}{(2\pi)^3 2E_3}}_{L^3} \underbrace{V \int \frac{d^3 p_4}{(2\pi)^3 2E_4}}_{L^3} \underbrace{(2\pi)^4 \delta^4(p_3 + p_4 - p_1 - p_2)}_{L^4} \cdot \underbrace{\frac{V}{2E_2}}_{L^0} \underbrace{\frac{V}{v_1 2E_1}}_{L^0} \quad \text{hat korrekte Dim.!}$$

beachte: dieser WQ = dem aus Fermis goldener Regel! (s. Vorlesung) Die letzten beiden Terme $\equiv \frac{1}{F}$ (mit F = Flussfaktor).

$$\overline{|M|^2} = \frac{1}{4} \sum_{s_1, s_3} \sum_{s_2, s_4} \left(\frac{e^4}{q^4} \right) [\bar{u}(p_3) \gamma_\mu u(p_1)] [\bar{u}(p_3) \gamma_\nu u(p_1)]^+ [\bar{u}(p_4) \gamma^\mu u(p_2)] [\bar{u}(p_4) \gamma^\nu u(p_2)]^+$$

$$\overline{|M|^2} = \left(\frac{e^4}{q^4} \right) L_{\mu\nu} \cdot M^{\mu\nu}$$

Leptontensor des e^- : $L_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sum_{s_1, s_3} [\bar{u}(p_3) \gamma_\mu u(p_1)] [\bar{u}(p_3) \gamma_\nu u(p_1)]^+$

Leptontensor des μ^- : $M^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sum_{s_2, s_4} [\bar{u}(p_4) \gamma^\mu u(p_2)] [\bar{u}(p_4) \gamma^\nu u(p_2)]^+$

Jetzt Berechnung von $L_{\mu\nu}$ ($M^{\mu\nu}$ analog):

$$[\bar{u}(p_3) \gamma_\nu u(p_1)]^+ = u^+(p_1) \gamma_\nu^+ \bar{u}^+(p_3) \underbrace{=}_{(\gamma_\nu)^+ = \gamma_0 \gamma_\nu \gamma_0} u^+(p_1) \gamma_0 \gamma_\nu \gamma_0 \underbrace{\gamma_0^+}_{=\gamma_0} u(p_3) = \bar{u}(p_1) \gamma_\nu u(p_3)$$

$$L_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sum_{s_1, s_3} \bar{u}(p_3) \gamma_\mu \boxed{u(p_1) \bar{u}(p_1)} \gamma_\nu u(p_3)$$

Behauptung: $\sum u(p_1) \bar{u}(p_1) = u_1(p_1) \bar{u}_1(p_1) + u_2(p_1) \bar{u}_2(p_1) = (\not{p} + m) \cdot \mathbf{1}$

Berechnung von $\sum u(p_1)\bar{u}(p_1)$:

Wir wählen Koordinatensystem so, dass $\vec{p}||z$: $\Rightarrow u_1(p) = \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E+m} \\ 0 \end{pmatrix}$, $u_2(p) = \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{-p_z}{E+m} \end{pmatrix}$

Verifizieren Sie, dass: $u_1\bar{u}_1 + u_2\bar{u}_2 = \not{p} + m = \gamma^0 E - \gamma^3 p_z + m$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot E - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot p_z + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot m$$

Anfang der Rechnung:

$$u_1\bar{u}_1 = \begin{pmatrix} E+m & 0 & -p_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_z & 0 & \frac{-p_z^2}{E+m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, u_2\bar{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E+m & 0 & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p_z & 0 & \frac{-p_z^2}{E+m} \end{pmatrix} \Rightarrow u_1\bar{u}_1 + u_2\bar{u}_2 = \begin{pmatrix} E+m & 0 & -p_z & 0 \\ 0 & E+m & 0 & p_z \\ p_z & 0 & \frac{-p_z^2}{E+m} & 0 \\ 0 & -p_z & 0 & \frac{-p_z^2}{E+m} \end{pmatrix}$$

Anleitung: ersetze in der letzten Matrix $-p_z^2$ als Funktion von E und m :

$$\Rightarrow u_1\bar{u}_1 + u_2\bar{u}_2 =$$

Lösung: $p_z^2 = E^2 - m^2 = (E+m)(E-m)$

$$\rightarrow u_1\bar{u}_1 + u_2\bar{u}_2 = \begin{pmatrix} E+m & 0 & -p_z & 0 \\ 0 & E+m & 0 & p_z \\ p_z & 0 & -E+m & 0 \\ 0 & -p_z & 0 & -E+m \end{pmatrix}$$

Leptontensor $L_{\mu\nu}$

$$L_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sum_{s_3} \bar{u}(p_3) \underbrace{\gamma_\mu (\not{p}_1 + m_1) \gamma_\nu}_{\text{Matrix } A_{jk}} u(p_3)$$

$$L_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^4 \sum_{s_3} \bar{u}(p_3)_j A_{jk} u(p_3)_k = \frac{1}{2} \sum_{jk} A_{jk} \sum_{s_3} u(p_3)_k \bar{u}(p_3)_j$$

↑ komplexe Zahlen, vertausche Reihenfolge

$$\begin{aligned} L_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \sum_{jk} A_{jk} (\not{p}_3 + m_3)_{kj} \\ &= \frac{1}{2} \sum [\gamma_\mu (\not{p}_1 + m_1) \gamma_\nu]_{jk} [\not{p}_3 + m_3]_{kj} \end{aligned}$$

$$\sum_{jk} A_{jk} B_{kj} = \text{Spur}(A \cdot B) \quad \text{Spur} = \text{Summe der Diagonalelemente}$$

$$L_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \text{Spur} [\gamma_\mu (\not{p}_1 + m_1) \gamma_\nu (\not{p}_3 + m_3)]$$

$$M^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \text{Spur} [\gamma^\mu (\not{p}_2 + m_2) \gamma^\nu (\not{p}_4 + m_4)]$$

Einige nützliche Rechenregeln: (Griffith S. 252/253)

- 1.) $Spur(A + B) = Spur(A) + Spur(B)$ A, B Matrizen
- 2.) $Spur(\alpha \cdot A) = \alpha \cdot Spur(A)$ $\alpha = \text{Zahl}$
- 3.) $Spur(AB) = Spur(BA)$
- 4.) $g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = 4$ $g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & -1 & \\ 0 & & -1 \end{pmatrix}$
- 5.) $\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \rightarrow \not{a}\not{b} + \not{b}\not{a} = 2ab$
- 6.) $\gamma_\mu\gamma^\mu = 4$
- 7.) $\gamma_\mu\gamma^\nu\gamma^\mu = -2\gamma^\nu \rightarrow \gamma_\mu\not{a}\gamma^\mu = -2\not{a}$ (Beweis?)
- 8.) ...
- 9.) ...
- 10.) $Spur(\text{Produkt einer } \underline{\text{ungeraden}} \text{ Anzahl von } \gamma\text{'s}) = 0$! [s. interaktive Übungsaufgabe](#)
- 11.) $Spur(\mathbf{1}) = 4$
- 12.) $Spur(\gamma^\mu\gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}$
- 13.) $Spur(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\sigma) = 4(g^{\mu\nu}g^{\lambda\sigma} - g^{\mu\lambda}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\lambda})$

Berechnung des Leptontensors $L_{\mu\nu}$

$$2L_{\mu\nu} = \underbrace{Sp(\gamma_\mu m_1 \gamma_\nu m_3)}_{(1)} + \underbrace{Sp(\gamma_\mu \not{p}_1 \gamma_\nu m_3)}_{(2)} + \underbrace{Sp(\gamma_\mu m_1 \gamma_\nu \not{p}_3)}_{(3)} + \underbrace{Sp(\gamma_\mu \not{p}_1 \gamma_\nu \not{p}_3)}_{(4)}$$

$$(1) \quad Sp(\gamma_\mu m_1 \gamma_\nu m_3) = m_1 m_3 Sp(\gamma_\mu \gamma_\nu) = m_1 m_3 4g_{\mu\nu} \quad \underbrace{=}_{m_1=m_3=m} m^2 4g_{\mu\nu}$$

$$(2) \quad Sp(\gamma_\mu \not{p}_1 \gamma_\nu m_3) = m Sp(\gamma_\mu \gamma_\alpha p_1^\alpha \gamma_\nu) = m p_1^\alpha Sp(\gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu) = 0$$

$$(3) \quad Sp(\gamma_\mu m \gamma_\nu \not{p}_3) = 0 \quad \text{analog zu (2)}$$

$$\begin{aligned} (4) \quad Sp(\gamma_\mu \not{p}_1 \gamma_\nu \not{p}_3) &= Sp(\gamma_\mu \gamma_\alpha p_1^\alpha \gamma_\nu \gamma_\beta p_3^\beta) = p_1^\alpha p_3^\beta Sp(\gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu \gamma_\beta) \\ &= p_1^\alpha p_3^\beta 4 [g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} - g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta} + g_{\mu\beta} g_{\alpha\nu}] \\ &= 4 [p_{1\mu} p_{3\nu} + p_{1\nu} p_{3\mu} - g_{\mu\nu} (p_1 p_3)] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow L_{\mu\nu} = 2p_{1\mu} p_{3\nu} + 2p_{1\nu} p_{3\mu} - 2(p_1 p_3) g_{\mu\nu} + 2m^2 g_{\mu\nu}$$

→ Analog für $M^{\mu\nu}$

Finales Ergebnis für $|M|^2$ der $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$ Streuung

$$\overline{|M|^2} = \frac{e^4}{q^4} L_{\mu\nu} M^{\mu\nu}$$

Def. $m :=$ Elektronmasse, $\mathcal{M} :=$ Myonmasse

$$= \frac{4e^4}{q^4} \left\{ p_{1\mu} p_{3\nu} + p_{1\nu} p_{3\mu} + g_{\mu\nu} [m^2 - (p_1 p_3)] \right\} \left\{ p^{2\mu} p^{4\nu} + p^{2\nu} p^{4\mu} + g^{\mu\nu} [\mathcal{M}^2 - (p_2 p_4)] \right\}$$

mit $g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = 4 \quad \Rightarrow$ *Empfehlung: folgenden Schritt nachrechnen:*

$$\overline{|M|^2} = \frac{8e^4}{q^4} \left[(p_1 p_2)(p_3 p_4) + (p_1 p_4)(p_2 p_3) - m^2(p_2 p_4) - \mathcal{M}^2(p_1 p_3) + 2m^2 \mathcal{M}^2 \right]$$

exaktes Ergebnis! (noch keine Näherung gemacht)

Hochenergiefall: $m, \mathcal{M} \rightarrow 0$

$$\overline{|M|^2} = \frac{8e^4}{q^4} \left[\underbrace{(p_1 p_2)}_{\frac{s}{2}} \underbrace{(p_3 p_4)}_{\frac{s}{2}} + \underbrace{(p_1 p_4)}_{-\frac{u}{2}} \underbrace{(p_2 p_3)}_{-\frac{u}{2}} \right]$$

Beweis für $p_1 p_2$:

$$\begin{aligned} s &= (p_1 + p_2)^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1 p_2 \\ &= m^2 + \mathcal{M}^2 + 2p_1 p_2 \sim 2p_1 p_2 \end{aligned}$$

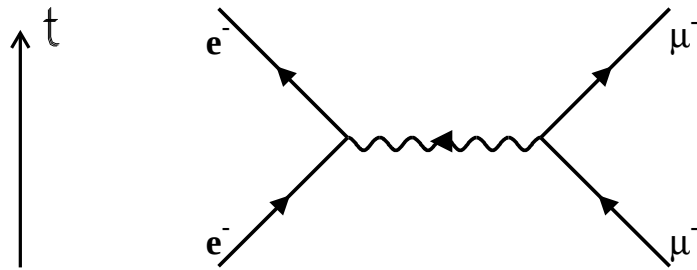
$$\overline{|M|^2} = \frac{2e^4}{t^2} [s^2 + u^2] = 2e^4 \frac{s^2 + u^2}{t^2}$$

mit $t = q^2$

“t-Kanal” Prozess

$e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$ Streuung: $\rightarrow$ Crossing in $e^- e^+ \rightarrow \mu^- \mu^+$

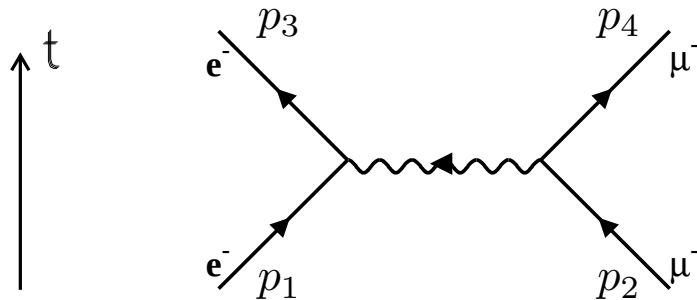
8. Vorlesung, 30.4.2010



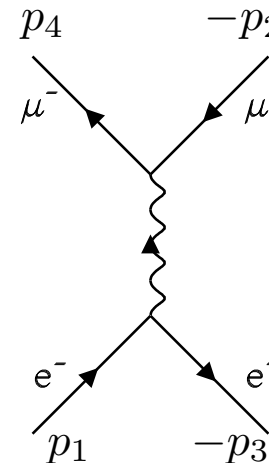
$$\overline{|M|^2} = 2 e^4 \frac{s^2 + u^2}{t^2}$$

mit $t = q^2$

Crossing Symmetrie:



$\equiv$



Muonpaarzeugung an $e^+ e^-$ Collidern,
experimentell wichtiger Prozess!

$$s = (p_1 + p_2)^2 \rightarrow (p_1 - p_3)^2 \quad \Rightarrow \quad s \text{ und } t \text{ vertauschen}$$

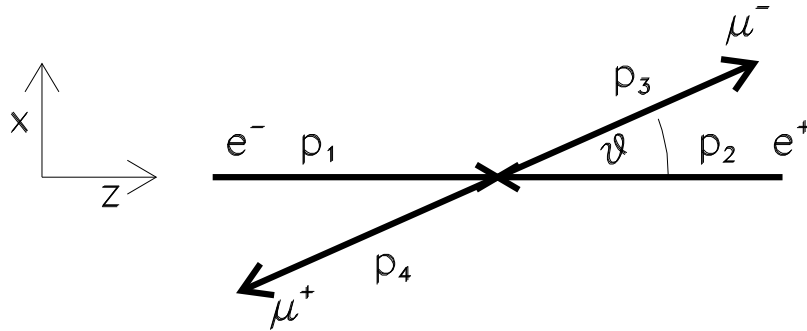
$$t = (p_1 - p_3)^2 \rightarrow (p_1 + p_2)^2$$

$$u = (p_1 - p_4)^2 \rightarrow (p_1 - p_4)^2$$

$$\rightarrow \overline{|M|^2}_{e^- e^+ \rightarrow \mu^- \mu^+} = 2 e^4 \frac{t^2 + u^2}{s^2}$$

Berechnung $e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+$ Wirkungsquerschnitt (Hochenergiefall)

Situation am Collider:



$$p_1 = (E, 0, 0, E)$$

$$p_2 = (E, 0, 0, -E)$$

$$p_3 = (E, E \sin \theta, 0, E \cos \theta)$$

$$p_4 = (E, -E \sin \theta, 0, -E \cos \theta)$$

$$s = (p_1 + p_2)^2 \approx 2p_1 p_2 = 4E^2$$

$$t = (p_1 - p_3)^2 \approx -2p_1 p_3 = -2E^2(1 - \cos \theta) = -\frac{s}{2}(1 - \cos \theta)$$

$$u = (p_1 - p_4)^2 \approx -2p_1 p_4 = -2E^2(1 + \cos \theta) = -\frac{s}{2}(1 + \cos \theta)$$

$$\Rightarrow \overline{|M|^2} = 2e^4 \frac{(1 - \cos \theta)^2 + (1 + \cos \theta)^2}{4} = e^4(1 + \cos^2 \theta)$$

$$\text{mit } \alpha = \frac{e^2}{4\pi\hbar c} \quad \Rightarrow \quad \overline{|M|^2} = (4\pi\alpha)^2(1 + \cos^2 \theta)$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}|_{cms} = \frac{1}{64\pi^2} \frac{1}{s} \overline{|M|^2} = \frac{\alpha^2}{4s}(1 + \cos^2 \theta)$$

$$\sigma(e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+) = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} = \frac{87 \text{ nbarn}}{s [\text{GeV}^2]}$$

Helizitätserhaltung bei hohen Energien

Helizität $\lambda = \vec{s} \cdot \vec{P} / |\vec{P}|$

≡ Spinprojektion auf Flugrichtung, up = Rechtsschraube, down = Linksschraube

Im Grenzfall hoher Energien (Massen vernachlässigbar) gilt für beliebigen Spinor Ψ

$$\gamma^5 \Psi = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} \cdot \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \cdot \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \end{pmatrix} \Psi \quad \text{mit} \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \gamma^5 \equiv \text{Helizitätsoperator!}$$

Bei hohen Energien haben unsere vier Basisspinoren folgende Form (wähle $z || \vec{P}$):

$$u_1 = \sqrt{E} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \sqrt{E} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \sqrt{E} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \sqrt{E} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Chiralitäts-Projektionsoperator: $P_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma^5) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

	u_1	u_2	v_1	v_2
<i>Impuls/Spin</i>	$\uparrow\uparrow$	$\uparrow\downarrow$	$\downarrow\downarrow$	$\downarrow\uparrow$
P_L	$P_L u_1 = 0$	$P_L u_2 = u_2$	$P_L v_1 = v_1$	$P_L v_2 = 0$
P_R	$P_R u_1 = u_1$	$P_R u_2 = 0$	$P_R v_1 = 0$	$P_R v_2 = v_2$

Achtung: das linkshändige v_1 mit negativer Energie, Impuls und Spin nach unten
 ≡ **rechtshändiges** Positron mit Impuls und Spin nach oben (und $v_2 \equiv$ **linkshändiges** Positron)

Helizitätserhaltung der elektromagnetischen WW

Elm. Wechselwirkung $\sim j^\mu A_\mu$ mit $j^\mu = \bar{u}\gamma^\mu u$

Behauptung: diese WW ist helizitätserhaltend: Beweis:

Mit $1 = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) + \frac{1}{2}(1 + \gamma^5) = P_L + P_R$

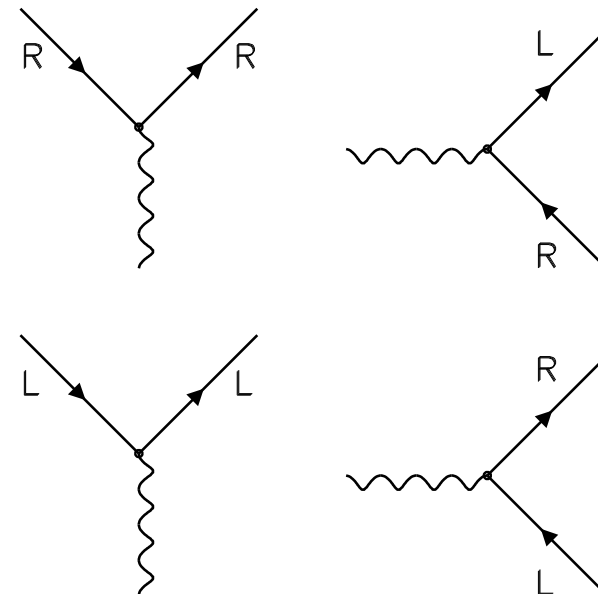
$$\bar{u}\gamma^\mu u = (\bar{u}_L + \bar{u}_R)\gamma^\mu(u_L + u_R) \quad \underbrace{\hspace{1cm}}_{\text{zu zeigen}} \quad (\bar{u}_L\gamma^\mu u_L) + (\bar{u}_R\gamma^\mu u_R)$$

$$\bar{u}_L = u_L^\dagger \gamma^0 = u^\dagger \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)\gamma^0 = \bar{u} \frac{1}{2}(1 + \gamma^5)$$

$$\rightarrow \bar{u}_L\gamma^\mu u_R = \frac{1}{4}\bar{u} [(1 + \gamma^5)\gamma^\mu(1 + \gamma^5)] u$$

$$= \frac{1}{4}\bar{u}\gamma^\mu [(1 - \gamma^5)(1 + \gamma^5)] u = 0$$

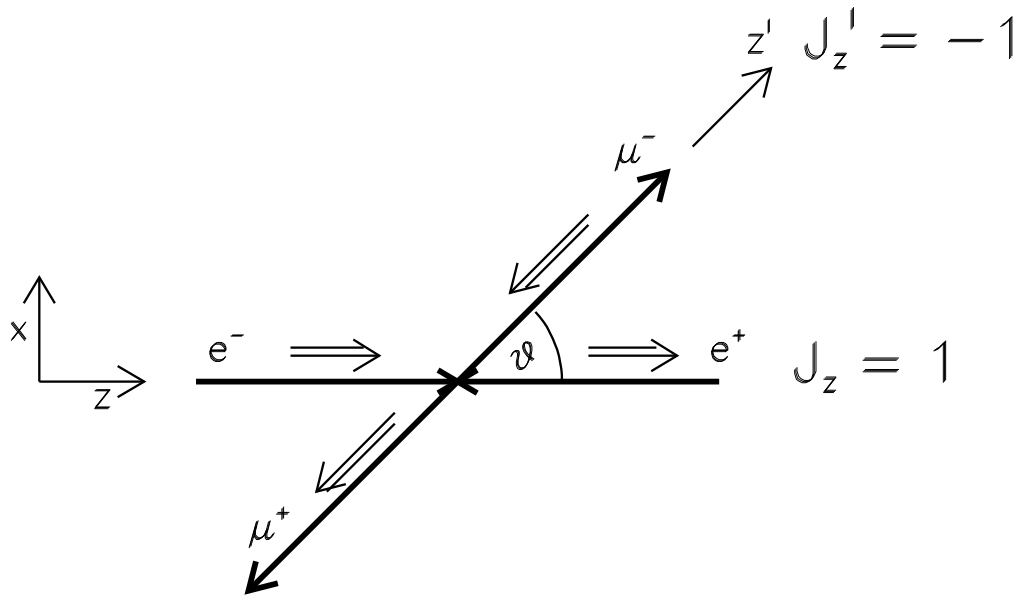
$\Rightarrow$ keine Spinflips erlaubt



Erlaubte Vertices zu $o(m/E)$

Berechnung des Matrixelementes für $e^-e^+ \rightarrow \mu^-u^+$ über LL, RR Amplituden

Amplituden für die Streuung $\sim$ Wahrscheinlichkeitsamplituden dass
wenn im rotierten System $J'_z = \lambda' \rightarrow$ dann im unrotierten System $J_z = \lambda$



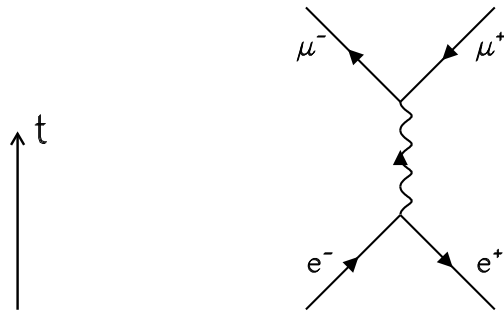
Amplituden $M \sim d_{\lambda'\lambda}^J(\theta) = \langle j\lambda' | e^{-i\theta J_y} | j\lambda \rangle$ $d =$ Rotationsmatrizen^a

$\lambda, \lambda' =$ Nettohelizitäten $\parallel$ zur z und z' Achse

$$\left. \begin{aligned} d_{11}^1(\theta) &= d_{-1-1}^1(\theta) = \frac{1}{2}(1 + \cos \theta) = -\frac{u}{s} \\ d_{1-1}^1(\theta) &= d_{-11}^1(\theta) = \frac{1}{2}(1 - \cos \theta) = -\frac{t}{s} \end{aligned} \right\} \Rightarrow |M|^2 \sim \frac{u^2 + t^2}{s^2}$$

^amehr zu den Rotationsmatrizen und ihrer Bedeutung: siehe D. Perkins: Introduction to HEP, Appendix c

Myon-Paarerzeugung $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ mit Spinoren gerechnet



$$M = +ie^2 \frac{1}{q^2} [\bar{v}(p_2)\gamma_\mu u(p_1)] [\bar{u}(p_4)\gamma^\mu v(p_3)]$$

↓ Unterschied zu u

$$|M|^2 = \left(\frac{e^4}{q^4}\right) \underbrace{L_{\mu\nu}}_{\text{Elektron}} \underbrace{M^{\mu\nu}}_{\text{Myon}}$$

$$\sum_{s_1, s_2} v\bar{v} = (\not{p} - m)$$

$$\sum_{s_1, s_2} u\bar{u} = (\not{p} + m)$$

$$\begin{aligned} L_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \sum_{s_1, s_2} [\bar{v}(p_2)\gamma_\mu u(p_1)] [\bar{u}(p_1)\gamma_\nu v(p_2)] = \frac{1}{2} \text{Spur} [\gamma_\mu (\not{p}_1 + m) \gamma_\nu (\not{p}_2 - m)] \\ &= 2 [p_{1\mu} p_{2\nu} + p_{1\nu} p_{2\mu} - (p_1 p_2) g_{\mu\nu} - m^2 g_{\mu\nu}] \\ &\quad \text{"+" bei } e^-\mu^- \rightarrow e^-\mu^- \end{aligned}$$

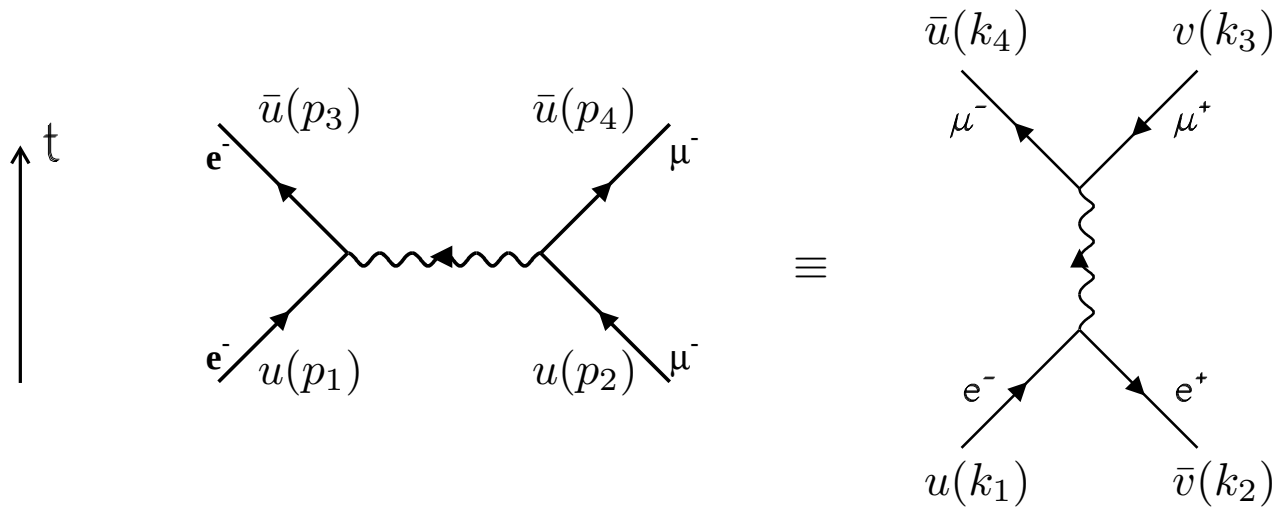
$$\text{Analog } M^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \text{Spur} [\gamma^\mu (\not{p}_4 - m) \gamma^\nu (\not{p}_3 + m)] = \dots$$

$$L_{\mu\nu} M^{\mu\nu}|_{e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+} = 8 [(p_1 p_4)(p_2 p_3) + (p_1 p_3)(p_2 p_4) + m^2(p_3 p_4) + \mathcal{M}^2(p_1 p_2) + 2m^2 \mathcal{M}^2]$$

$$\text{Vergleiche: } L_{\mu\nu} M^{\mu\nu}|_{e^-\mu^- \rightarrow e^-\mu^-} = 8 [(p_1 p_2)(p_3 p_4) + (p_1 p_4)(p_2 p_3) - m^2(p_2 p_4) - \mathcal{M}^2(p_1 p_3) + 2m^2 \mathcal{M}^2]$$

identisch wenn $p_2 \leftrightarrow -p_3 \Rightarrow$ Ergebnisse können durch Crossing gewonnen werden (Resultate s. oben)

Crossingregeln



$$M \sim \frac{1}{q^2} \bar{u}(p_3) \gamma_\mu u(p_1) \bar{u}(p_4) \gamma^\mu u(p_2)$$

$$M' \sim \frac{1}{q'^2} \bar{v}(k_2) \gamma_\mu u(k_1) \bar{u}(k_4) \gamma^\mu v(k_3)$$

Um M in M' zu überführen, substituiere:

$$p_2 \rightarrow -k_3 \quad u(p_2) \rightarrow v(k_3)$$

$$p_3 \rightarrow -k_2 \quad \bar{u}(p_3) \rightarrow \bar{v}(k_2)$$

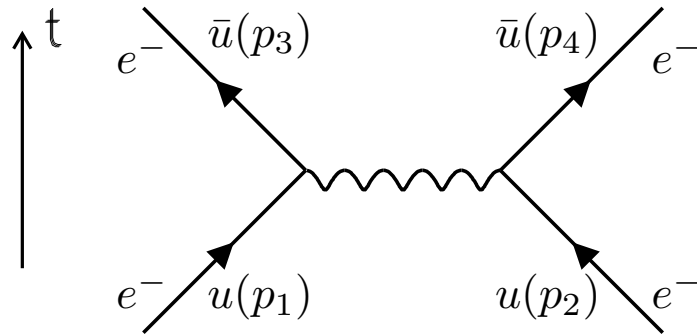
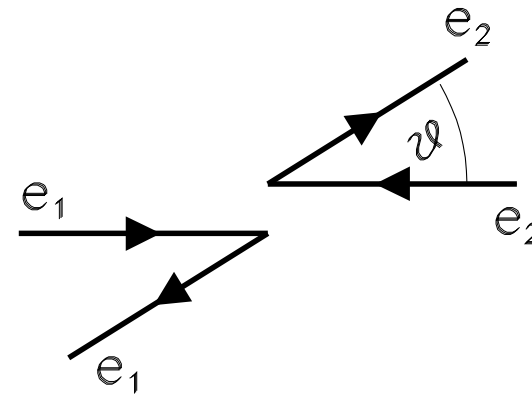
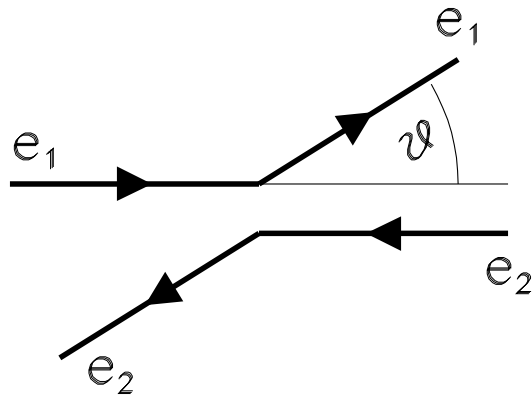
$$p_1 \rightarrow k_1 \quad p_4 \rightarrow k_4$$

$e^-e^- \rightarrow e^-e^-$ Streuung (Møller Streuung)

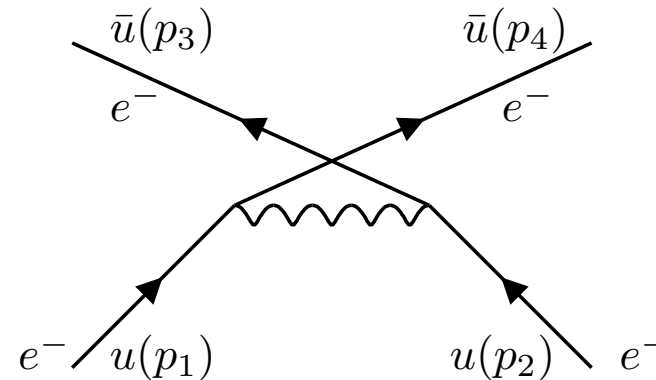
(Praktische Bedeutung: Zur Messung der e^- Polarisation (e^- Streuung an Fe-Folien))

Besonderheit: Elektronen im Endzustand sind **ununterscheidbar**

Fermionen: $\Rightarrow$ Streuamplitude muss antisymmetrisch sein bezüglich Vertauschung der Elektronen!



Asymmetrie



"t-Kanal": $q^2 = (p_1 - p_3)^2 = t$

"u-Kanal": $q'^2 = (p_1 - p_4)^2 = u$

$$\underbrace{ie^2 \left[\frac{1}{q^2} \bar{u}(p_3) \gamma_\mu u(p_1) \bar{u}(p_4) \gamma^\mu u(p_2) \right]}_{M_1}$$

$$- \underbrace{ie^2 \left[\frac{1}{q'^2} \bar{u}(p_4) \gamma_\mu u(p_1) \bar{u}(p_3) \gamma^\mu u(p_2) \right]}_{M_2}$$

Møller Streuung Wirkungsquerschnitt:

Matrixelement:

$$M = M_1 - M_2 \Rightarrow |M|^2 = M \cdot M^* = (M_1 - M_2)(M_1 - M_2)^*$$

$$= |M_1|^2 + |M_2|^2 - \underbrace{2\text{Re}(M_1 M_2^*)}_{\text{Interferenzterm}}$$

Im folgenden Hochenergienäherung:

$$\overline{|M_1|^2} = 2e^4 \frac{s^2 + u^2}{t^2}, \quad \overline{|M_2|^2} = 2e^4 \frac{s^2 + t^2}{u^2}$$

$$\overline{M_1 M_2^*} = \frac{e^4}{tu} \frac{1}{4} \sum_{s_1, s_2} \sum_{s_3, s_4} [\bar{u}(p_3) \gamma_\mu \underbrace{u(p_1)}_{\not{p}_1}] [\bar{u}(p_1) \gamma_\nu \underbrace{u(p_4)}_{\not{p}_4}] [\bar{u}(p_4) \gamma^\mu \underbrace{u(p_2)}_{\not{p}_2}] [\bar{u}(p_2) \gamma^\nu \underbrace{u(p_3)}_{\not{p}_3}]$$

$$\approx \frac{e^4}{4tu} \text{Spur}(\gamma_\mu \not{p}_1 \gamma_\nu \not{p}_4 \gamma^\mu \not{p}_2 \gamma^\nu \not{p}_3) = -\frac{8e^4}{tu} (p_1 p_2)(p_3 p_4) \approx -2e^4 \frac{s^2}{tu}$$

$$\overline{|M|^2} = 2e^4 \left[\frac{s^2 + u^2}{t^2} + \frac{s^2 + t^2}{u^2} - 2 \frac{s^2}{tu} \right]$$

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{cms} = \frac{\alpha^2}{2s} \left\{ \frac{1 + \cos^4 \frac{\theta}{2}}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} + \frac{1 + \sin^4 \frac{\theta}{2}}{\cos^4 \frac{\theta}{2}} + \frac{2}{\sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2}} \right\}$$

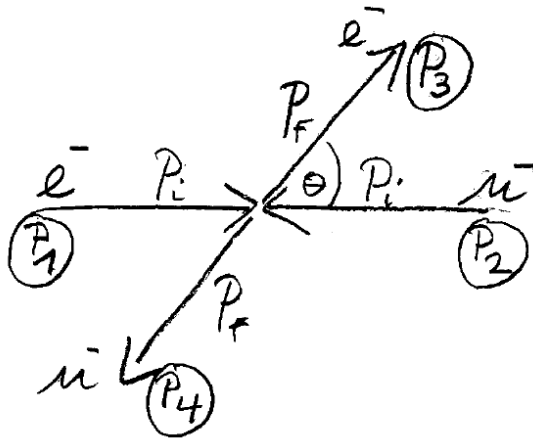
TABLE 6.1
Leading Order Contributions to Representative QED Processes

	Feynman Diagrams		$ \overline{\mathcal{M}} ^2/2e^4$		
	Forward peak	Backward peak	Forward	Interference	Backward
Møller scattering $e^-e^- \rightarrow e^-e^-$ (Crossing $s \leftrightarrow u$)			$\frac{s^2 + u^2}{t^2}$	$+\frac{2s^2}{tu} + \frac{s^2 + t^2}{u^2}$	
			$(u \leftrightarrow t \text{ symmetric})$		
Bhabha scattering $e^-e^+ \rightarrow e^-e^+$			Forward	“Time-like”	Time-like
			$\frac{s^2 + u^2}{t^2}$	$+\frac{2u^2}{ts} + \frac{u^2 + t^2}{s^2}$	
$e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$ (Crossing $s \leftrightarrow t$) $e^-e^+ \rightarrow \mu^- \mu^+$			$\frac{s^2 + u^2}{t^2}$		$\frac{u^2 + t^2}{s^2}$

Von der $e^- \mu^-$ zur e^- Quark Streuung

9. Vorlesung, 7.5.2010

Vorbemerkung: Wir vernachlässigen in dieser Vorlesung durchgehend die Elektronmasse, d.h. $m_e = 0$



$$\frac{d\sigma}{d\Omega}_{|cms} = \frac{1}{(8\pi)^2 s} \frac{P_f}{P_i} \overline{|M|^2}$$

Herleitung s. Vorlesung 6

$$Q^2 \approx 2p_1 p_3 = E_1 E_3 - 2P_i P_f \cos \theta \Rightarrow dQ^2 = 2P_f P_i d(-\cos \theta) = \frac{P_i P_f}{\pi} d\Omega$$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma}{dQ^2} = \frac{1}{64\pi s P_i^2} \overline{|M|^2} \quad \text{lorentzinvariant!}$$

Es gilt:

$$P_i = \frac{s - \mathcal{M}^2}{2\sqrt{s}} \Rightarrow 4s P_i^2 = \bar{s}^2 \quad \text{mit } \bar{s} := s - \mathcal{M}^2 = 2p_1 p_2$$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma}{dQ^2} = \frac{1}{16\pi \bar{s}^2} \overline{|M|^2}$$

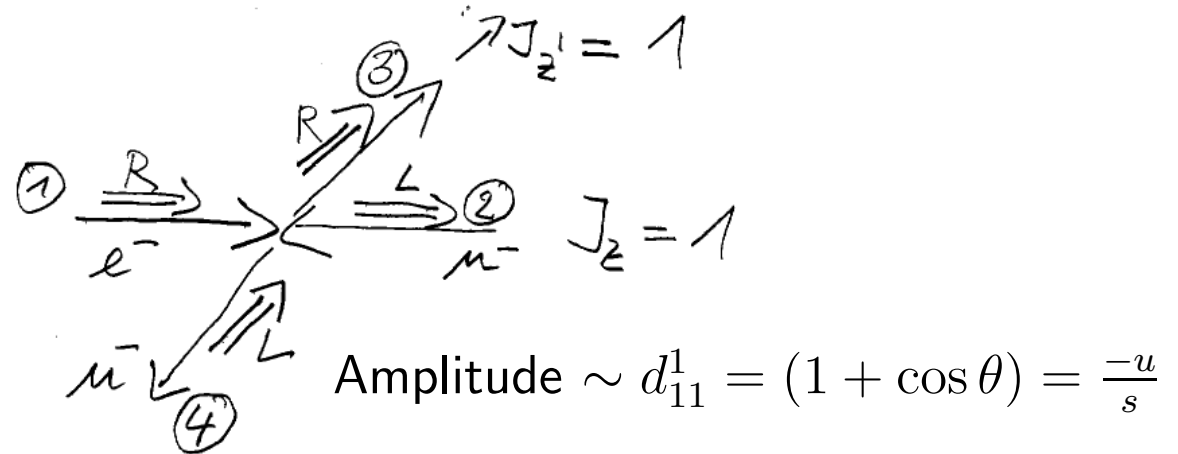
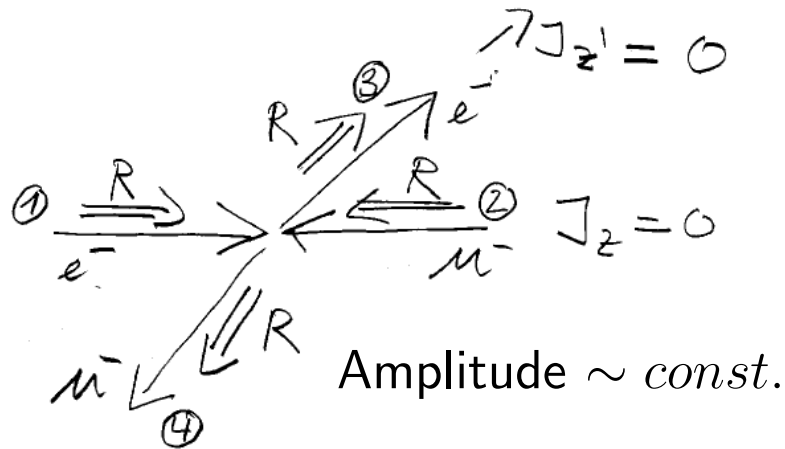
Beweis für P_i :

$$\begin{aligned} E_1 &\approx P_i, \quad E_2 = \sqrt{\mathcal{M}^2 + P_i^2} \\ \sqrt{s} &= P_i + \sqrt{\mathcal{M}^2 + P_i^2} \\ \Rightarrow s + P_i^2 - 2\sqrt{s}P_i &= P_i^2 + \mathcal{M}^2 \\ \Rightarrow P_i &= \frac{s - \mathcal{M}^2}{2\sqrt{s}} \end{aligned}$$

$e^- \mu^-$ Streuung in der Hochenergienäherung (Wiederholung)

$$\overline{|M|}^2 = \frac{e^4}{q^4} L_{\mu\nu} M^{\mu\nu} = \frac{8e^4}{q^4} \left[\underbrace{(p_1 p_2)}_{\bar{s}/2} \underbrace{(p_3 p_4)}_{\bar{s}/2} + \underbrace{(p_1 p_4)}_{\bar{u}/2} \underbrace{(p_2 p_3)}_{\bar{u}/2} - \mathcal{M}^2 \underbrace{(p_1 p_3)}_{-q^2/2} \right] \quad \text{mit } \bar{u} = u - \mathcal{M}^2$$

$$I := \frac{L_{\mu\nu} M^{\mu\nu}}{4\bar{s}^2} = \left[\frac{1}{2} + \frac{\bar{u}^2}{2\bar{s}^2} + \mathcal{M}^2 \frac{q^2}{\bar{s}^2} \right] \xrightarrow{\text{Hochenergienäherung } \mathcal{M} \approx 0} \left[\frac{1}{2} + \frac{\bar{u}^2}{2\bar{s}^2} \right]$$



Nützliche Umformungen:

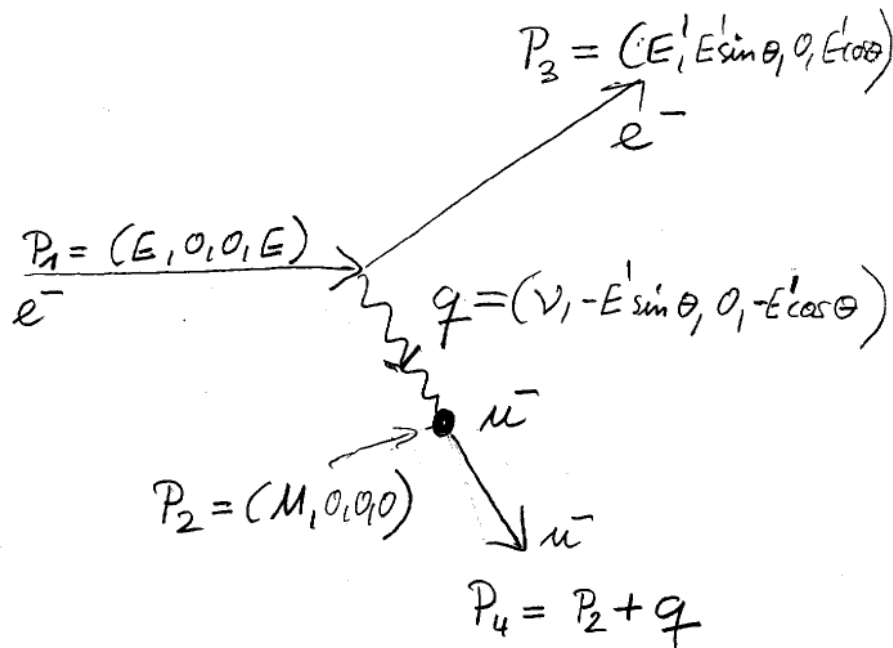
$$t + s + u \approx 2\mathcal{M}^2 \Rightarrow t = -\bar{s} - \bar{u} \quad \Rightarrow \quad \frac{t^2}{2\bar{s}^2} = \frac{(-\bar{s} - \bar{u})^2}{2\bar{s}^2} = \frac{1}{2} + \frac{\bar{u}^2}{2\bar{s}^2} + \frac{\bar{u}}{\bar{s}}$$

$$\Rightarrow I = \left[\frac{t^2}{2\bar{s}^2} - \frac{\bar{u}}{\bar{s}} + \mathcal{M}^2 \frac{q^2}{\bar{s}^2} \right]$$

$e^- \mu^-$ Streuung im Muonruhesystem

Auszurechnen:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dQ^2} &= \frac{1}{16\pi \bar{s}^2} |\overline{M}|^2 = \frac{4\pi\alpha^2}{q^4} I \\ &= \frac{4\pi\alpha^2}{q^4} \left[\frac{t^2}{2\bar{s}^2} - \frac{\bar{u}}{\bar{s}} + \mathcal{M}^2 \frac{q^2}{\bar{s}^2} \right] \end{aligned}$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{s} = 2p_1 p_2 = 2ME \\ \bar{u} = -2p_2 p_3 = -2ME' \\ q^2 = -2p_1 p_3 = -4EE' \sin^2 \frac{\theta}{2} \\ q^2 = -2M \underbrace{(E - E')}_{=\nu} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \frac{t^2}{2\bar{s}^2} = q^2 \frac{q^2}{2\bar{s}^2} = -\frac{E'}{E} \frac{q^2}{2M^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \\ -\frac{\bar{u}}{\bar{s}} = \frac{E'}{E} \\ \mathcal{M}^2 \frac{q^2}{\bar{s}^2} = -\frac{E'}{E} \sin^2 \frac{\theta}{2} \end{array}$$

Beweis für zweite q^2 Formel: $\mathcal{M}^2 = (p_2 + q)^2 = \mathcal{M}^2 + 2p_2 q + q^2 \Rightarrow q^2 = -2M(E - E')$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\sigma}{dQ^2} = \frac{4\pi\alpha^2}{Q^4} \frac{E'}{E} \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} + \frac{Q^2}{2M^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)}$$

E' ausrechnen:

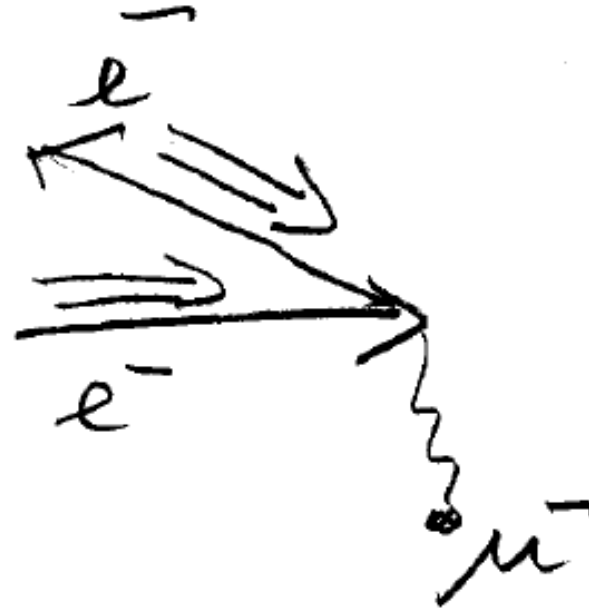
$$\begin{aligned} -4EE' \sin^2 \frac{\theta}{2} &= -2M(E - E') \\ E'(E \sin^2 \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2}M) &= \frac{1}{2}ME \\ E' &= \frac{E}{1 + \frac{2E}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2}} \end{aligned}$$

$e^- \mu^-$ Streuung im Muonruhesystem



Mottstreuung:

$$\text{Amplitude} \sim d_{1/2\ 1/2}^{1/2} = \cos \frac{\theta}{2}$$

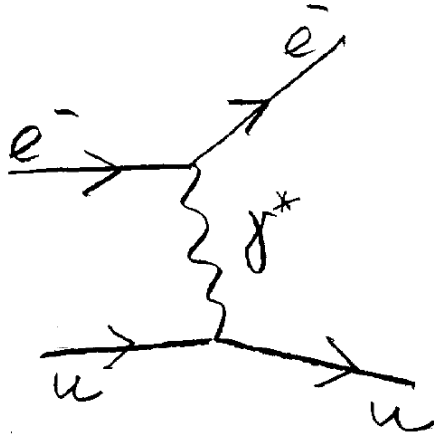


Modifikation durch Wechselwirkung mit magnetischem Moment des Muons $\rightarrow$ Helizität des Elektrons wechselt!

$$\text{Amplitude: } \sim d_{1/2\ -1/2}^{1/2} = \sin \frac{\theta}{2}$$

e^-u Quark Streuung

Wenn es freie Quarks gäbe...

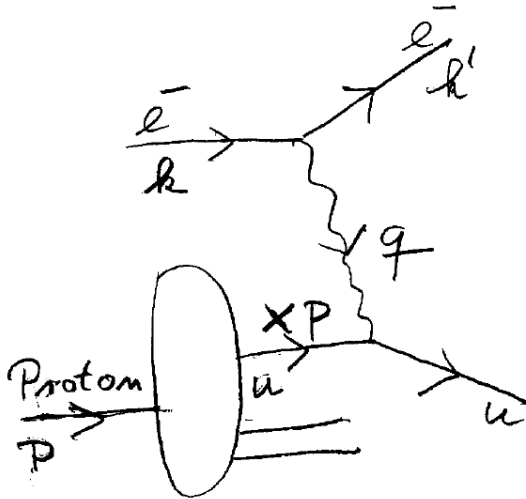


Mit $s_q = (p_e + p_u)^2$, Quarkmasse m_u und Ladung $Q_u = 2/3$:

$$\frac{d\sigma}{dQ^2} = \frac{4\pi\alpha^2 Q_u^2}{q^4} I = \frac{4\pi\alpha^2 Q_u^2}{q^4} \left[\frac{t^2}{2\bar{s}_q^2} - \frac{\bar{u}}{\bar{s}_q} + \frac{m_u^2 q^2}{\bar{s}_q^2} \right]$$

$$\underbrace{\approx}_{m_u \sim 0} \frac{4\pi\alpha^2 Q_u^2}{q^4} \left[\frac{t^2}{2s_q^2} - \frac{u}{s_q} \right] = \frac{4\pi\alpha^2}{q^4} \left[\frac{t^2}{2s_q^2} + 1 + \frac{t}{s_q} \right]$$

Inelastische Elektronprotonstreuung bei HERA im Quark Parton Modell:



$$s = (p + k)^2 \approx 2pk$$

$x p$ = Viererimpuls des einlaufenden u Quarks, ($x \equiv$ Impulsbruchteil)

$$s_q = (xp + k)^2 \approx 2xpk = xs$$

$q = (k - k')$ Photonviererimpuls

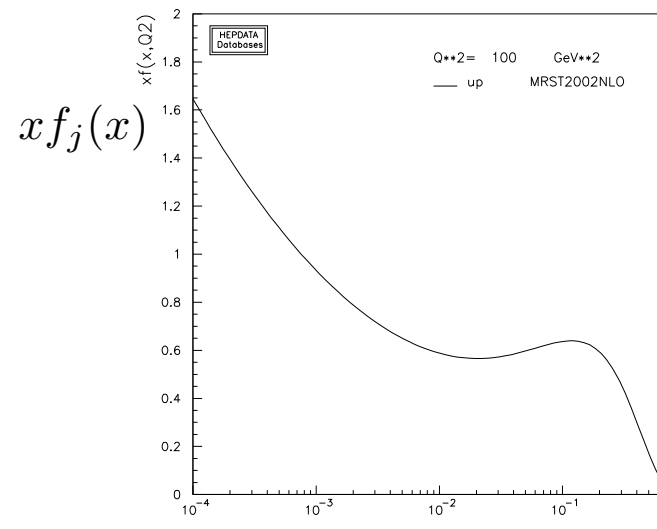
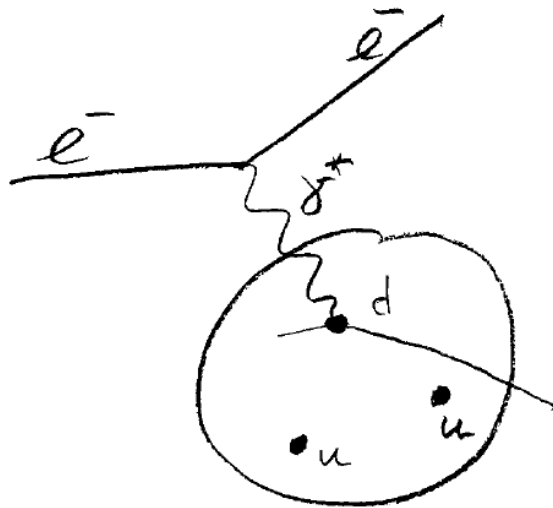
$$Q^2 = -q^2 \approx -2kk' \quad (\equiv \text{Auflösung des Photons})$$

$$y = \frac{pq}{pk} \quad (\equiv \text{Energie des Photons})$$

$$(xp + q)^2 = 2xpq + q^2 \approx 0 \Rightarrow x = \frac{Q^2}{2pq}$$

$$Q^2 = 2kp \frac{pq}{pk} \frac{Q^2}{2pq} = syx \Rightarrow y = \frac{Q^2}{sx} = \frac{Q^2}{s_q} = \frac{-t}{s_q}$$

Inelastische Elektronprotonstreuung und Formfaktoren



Annahme: inkohärente Streuung an verschiedenen Partonen

f_j : Wahrscheinlichkeit Parton j mit Impulsanteil zwischen x und $x+dx$ zu finden

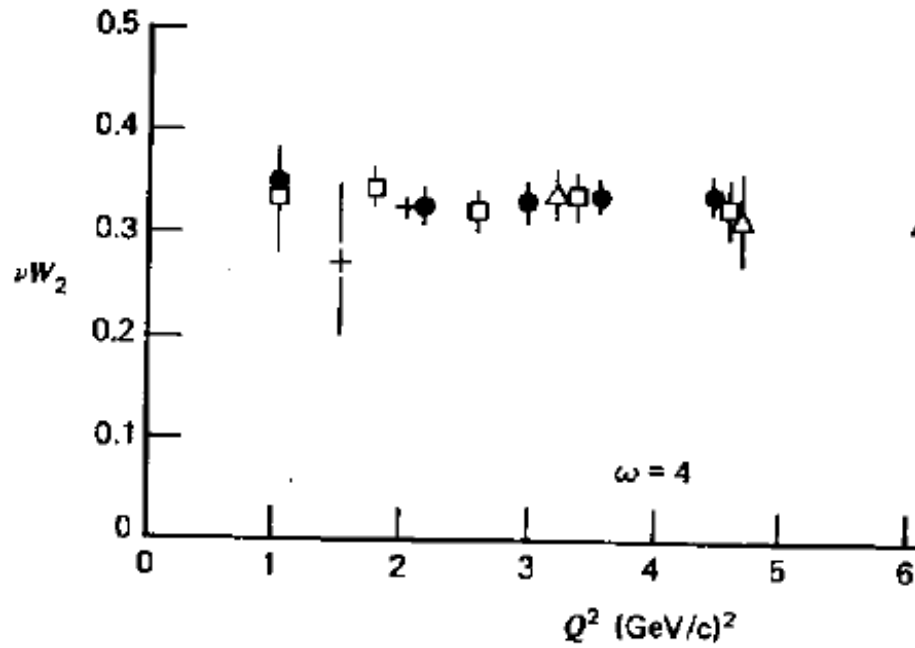
$$\frac{d^2\sigma}{dQ^2 dx} = \frac{4\pi\alpha^2}{q^4} \left(1 - y + \frac{1}{2}y^2\right) \sum_j Q_j^2 f_j(x)$$

Definiere Strukturfunktion: $F_2 := x \sum_j Q_j^2 f_j(x) \Rightarrow \frac{d\sigma}{dQ^2 dx} = \frac{4\pi\alpha^2}{Q^4 x} (1 - y + \frac{1}{2}y^2) F_2(x)$

Allgemeinerer Ansatz:
$$\frac{d^2\sigma}{dQ^2 dx} = \frac{4\pi\alpha^2}{Q^4 x} \left[\underbrace{(1-y)}_{\sim \cos^2 \frac{\theta}{2}} \overbrace{F_2(x)}^{\text{elektr. Formfaktor}} + \underbrace{xy^2}_{\sim \sin^2 \frac{\theta}{2}} \overbrace{F_1(x)}^{\text{magn. Formfaktor}} \right]$$

Wären Quarks Bosonen: $F_1 = 0$, Spin 1/2: $2xF_1 = F_2$ (Callan Gross Relation, experimentell bestätigt!)

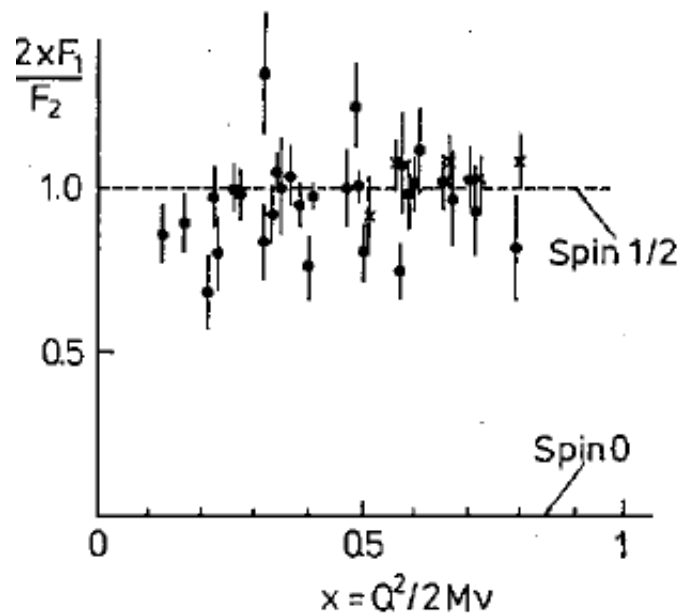
Bjorken Scaling und Callan Gross Relation



SLAC Daten

$$\nu\omega_2 = F_2, \quad \omega = \frac{1}{x}$$

Die Partondichten hängen bei dem getesteten $x = 0.25$ im Bereich $1 < Q^2 < 6$ GeV² kaum von der Auflösungsskala Q^2 ab, was man als "Bjorken Scaling" bezeichnet. (Dies ist bei den viel kleineren x Werten und höheren Auflösungsskalen Q^2 bei HERA ganz anders! → durch Effekte der QCD (Gluonabstrahlungen))



SLAC Daten

3.1 Eichinvarianz

10. Vorlesung, 11.5.2010

Eichinvarianz und Maxwellgleichungen:

($\epsilon_0 = \mu_0 = 1$, Heaviside-Lorentz-Einheiten)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Einführung von Potentialen: $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = -\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\rightarrow \vec{\nabla} \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad \rightarrow \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \Phi$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{E} = -\vec{\nabla} \Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \end{array} \right\} \quad \text{statt } E, \vec{B} \longrightarrow \Phi, \vec{A}$$

$\vec{A}, \Phi$ sind nicht eindeutig festgelegt

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \chi(\vec{r}, t) \Rightarrow \vec{B}' = \vec{B}$$

$$\Phi' = \Phi - \frac{\partial}{\partial t} \chi(\vec{r}, t) \Rightarrow \vec{E}' = \vec{E}$$

$\vec{A}, \Phi$ zu Vierervektor

$$A^\mu = (\Phi, \vec{A})$$

$$A^\mu \xrightarrow{\text{Eichtrafo}} A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu \chi$$

lässt $\vec{E}, \vec{B}$ und Maxwellgl. invariant

$$\partial^\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla} \right)$$

Bemerkungen und Schreibweisen:

Viererstromdichte: $j^\mu = (\rho, \vec{j})$

Feldstärketensor: $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}$

Damit lauten die Maxwellgleichungen:

1.) $\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0 \quad \mu, \nu, \lambda = 0, 1, 2, 3$
(4 Gleichungen) $\rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} = \dots, \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \dots$

2.) $\partial^\mu F_{\mu\nu} = j_\nu$
(4 Gleichungen) $\rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \dots, \vec{\nabla} \times \vec{B} = \dots$

- Kontinuitätsgleichung: Differenzieren von ② und Einsetzen von $F_{\mu\nu}$
 $\partial^\nu j_\nu = 0 \rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$
- Wellengleichung: Einsetzen von $F_{\mu\nu}$ in ②
 $\square A^\nu - \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) = j^\nu$
- Lorenzbedingung: Man kann geeignetes χ finden, so dass
 $\partial_\mu A^\mu = 0 \rightarrow \square A^\nu = j^\nu$

Eichinvarianz in der Quantenmechanik:

1.) Schrödingergleichung mit elm. Feld

$$\left\{ \frac{1}{2m} \left(-i\vec{\nabla} - q\vec{A} \right)^2 + q\Phi \right\} \Psi(x) = i\frac{\partial}{\partial t} \psi(x)$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{andere Schreibweise: } \vec{D} = -\vec{\nabla} + iq\vec{A}, \quad D^0 = \frac{\partial}{\partial t} + iq\Phi \\ \Rightarrow \frac{1}{2m} (i\vec{D})^2 \psi = iD^0 \psi \end{array} \right)$$

Eichtrafo:

$$\begin{aligned} \vec{A} &\rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\chi \\ \Phi &\rightarrow \Phi' = \Phi - \frac{\partial}{\partial t}\chi \end{aligned}$$

Damit SGL forminvariant ist, muss sich ψ wie folgt transformieren:

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = \psi(x) \underbrace{e^{+iq\chi(x)}}_{\text{lokale Phasenänderung}}$$

Eichinvarianz in der Quantenmechanik:

2. Relativistische Wellengleichungen

$$(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi = 0$$

$$D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu \quad \text{kovariante Ableitung}$$

ist identisch mit

$$(i\cancel{\partial} - m)\psi = q\cancel{A}\psi$$

Ist diese Gleichung invariant unter der Eichtrafo:?

$$A^\mu \rightarrow A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu \chi$$

Ja, wenn

$$\psi \rightarrow \psi' = \psi \cdot e^{+iq\chi(t, \vec{x})}$$

Hier: Eichtrafo der Felder erfordert lokale Phasentransformation der Wellenfunktion damit Forminvarianz der Gleichungen gegeben.

Lokale und globale Phasentransformation

a) Globale PT:

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{i\alpha} \psi \quad \alpha \text{ unabh. von } \vec{x} \text{ und } t$$

ist nicht messbar

Denn Observablen bleiben gleich:

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \int d^3x \psi'^* \mathcal{O} \psi' = \int d^3x \psi^* e^{-i\alpha} \mathcal{O} e^{+i\alpha} \psi = \int d^3x \psi^* \mathcal{O} \psi$$

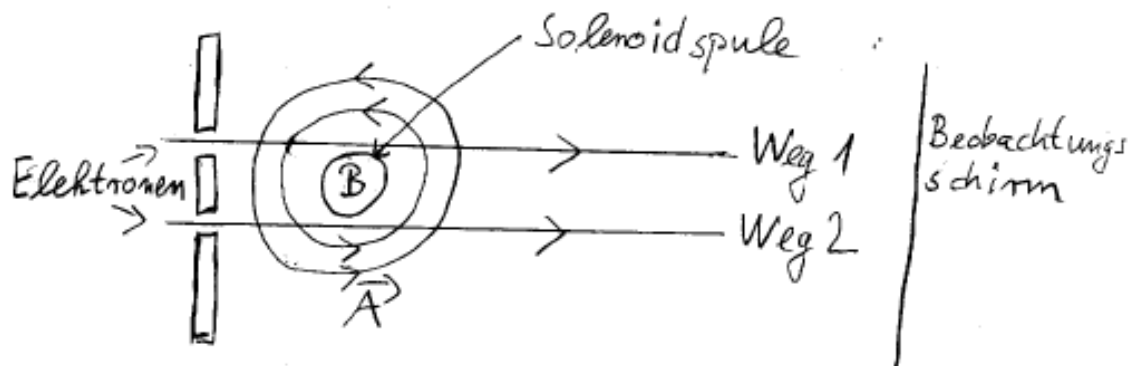
Bedeutung der globalen PT: Aus der Invarianz der Lagrangedichte gegenüber globaler PT folgt ein Erhaltungssatz (Noether-Theorem)

b) lokale Phasentransformationen

$$\psi \rightarrow \psi'(x) = e^{iq\chi(x)} \psi(x)$$

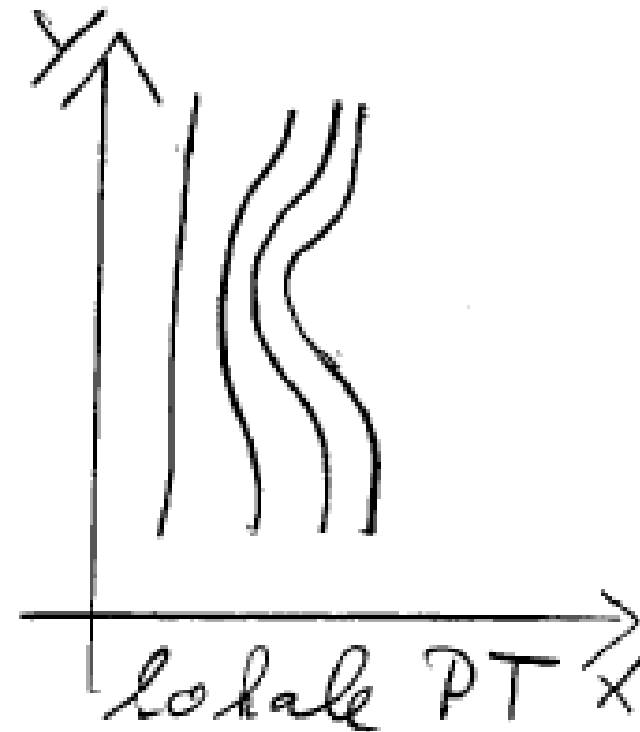
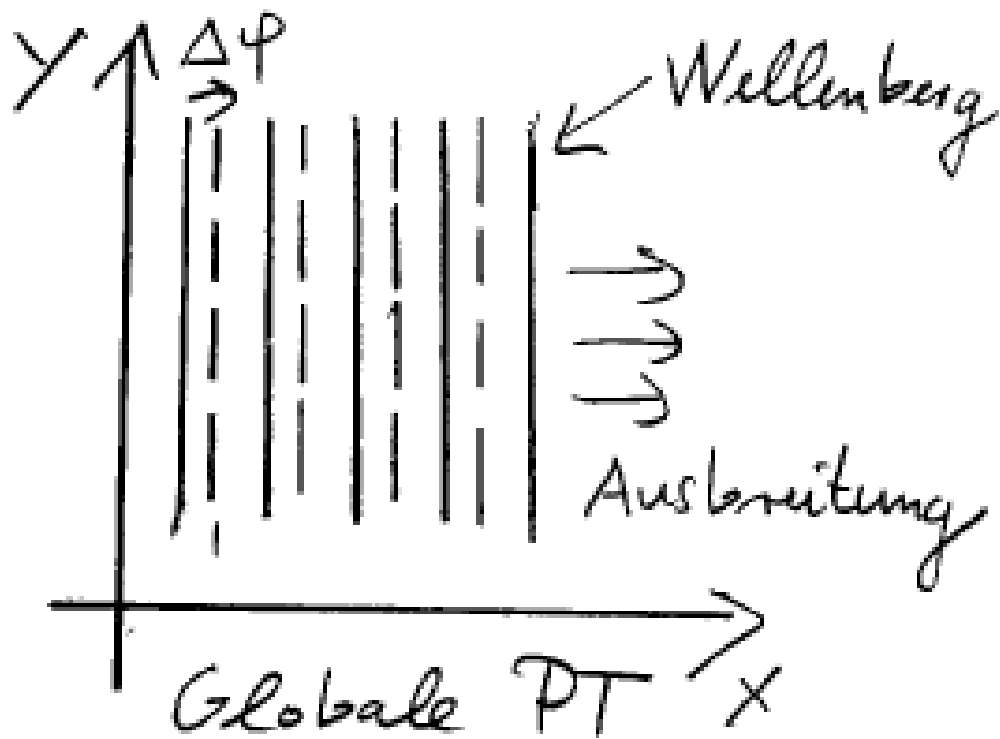
Ändern die Observablen! (z.B. Interferenzmuster)

Aharonov Bohm Effekt



$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{2\pi}{|\vec{P}|} = \frac{2\pi\hbar}{|m\vec{v} - e\vec{A}|} \\ \rightarrow \Delta\varphi &= \frac{2\pi}{\lambda} \Delta x \\ \underbrace{\Delta\varphi'}_{\text{mit } \vec{A}} &= -\frac{e}{\hbar} \vec{A} \Delta \vec{x} \end{aligned}$$

Veranschaulichung mit Wasserwellen



Existenz eines Hindernisses



erfordert äussere Kräfte → Felder

Lokale Phasentransformation $\leftrightarrow$ Eichinvarianz

DGL im Vakuum

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0$$

Jetzt lokale PT: $\psi' = e^{iq\chi(x)}\psi(x)$

$$\begin{aligned}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi' &= e^{iq\chi} \underbrace{(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi}_{=0} - q\gamma^\mu \partial_\mu \chi \underbrace{e^{iq\chi}\psi}_{\psi'} \\ &= -q\gamma^\mu \partial_\mu \chi \cdot \psi'\end{aligned}$$

DG mit Feld

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi' = q\gamma^\mu A'_\mu \psi' \quad \text{wobei hier} \quad A'_\mu = -\partial_\mu \chi$$

Invarianz bei lokaler Phasentrafo geht nur mit Feld

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = q\gamma^\mu A_\mu(x)\psi(x)$$

$\psi'(x) = e^{iq\chi(x)}\psi(x)$ ist Lösung einer formgleichen Gleichung mit $A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu \chi$.

Eichprinzip:

Postulat/Forderung: Die Diracgleichung muss invariant sein gegenüber beliebiger lokaler Phasentransformation



Dies ist im feldfreien Raum unmöglich



Existenz eines Vektorfeldes (A^μ)
das gleichzeitig eichtransformiert wird

$$\Psi'(x) = e^{iq\chi(x)}\psi(x)$$

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu\chi(x)$$

Einführung der kovarianten Ableitung (minimale Kopplung):

$$D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu$$

Verallgemeinerung (Ausblick)

schwache WW: SU(2)

↓ 2 × 2 Matrizen

$$\Psi'(x) = \exp\left(i\frac{g}{2} \vec{\tau} \cdot \vec{\beta}(x)\right) \psi(x) \quad (\text{Drehung im Isospinraum})$$

↑

Pauli-Matrizen

$D^\mu = \partial^\mu + i\frac{g}{2}\vec{\tau}\vec{W}^\mu \rightarrow 3 \text{ Felder, da 3 Winkel im Isospinraum}$

starke WW: Farb SU(3)

↓ 3 × 3 Matrizen Gell-Mann Matrizen

$$\psi'(x) = \exp\left(i\frac{g_s}{2} \lambda_j \beta_j(x)\right) \psi(x)$$

↑

$j = 1, \dots, 8 \Rightarrow \text{Existenz der 8 Gluonen Felder}$

Der Lagrange-Formalismus

11. Vorlesung, 11.5.2010

Literatur: Anhang A,B Schmüser, Kapitel 1 Griffith

① LF in klassischer Mechanik:

$L(\underbrace{q, \dot{q}}_{\text{verallgemeinerte Koordinaten}})$ Lagrange Funktion

verallgemeinerte Koordinaten

} Aus $\delta S = 0$ mit $S = \underbrace{\int dt L(q, \dot{q})}_{\text{Wirkung}}$

$$\delta S = \int dt \left[\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta(\dot{q}) \right] = \int dt \left[\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d}{dt} \delta(q) \right] =$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = 0} \quad \text{Euler-Lagrange Gleichungen}$$

Beispiel Punktteilchen: $L = T - V = \frac{p^2}{2m} - V = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V$

$$\frac{\partial L}{\partial q} = \frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial x} = F, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} = P \quad \Rightarrow F - \frac{d}{dt} P = 0 \quad \Rightarrow F = \frac{dP}{dt}$$

② Ausweitung auf Felder, allgemein $\phi(x)$: $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x))$

Lagrangedichte $\mathcal{L}$, $S = \int dt \int d^3x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$

$$\text{Aus } \delta S = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi(x)} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi(x))} = 0}$$

Beispiele für Lagrangedichten:

1. Skalares Feld:

$$\mathcal{L}_{Skalar} = \frac{1}{2} [(\partial_\mu \phi) (\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^2]$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -m^2 \phi; \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial_\mu \phi} = \partial^\mu \phi$$

$$\Rightarrow \text{Lagrangegleichungen: } -m^2 \phi - \partial_\mu \partial^\mu \phi = 0$$

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi = 0 \quad \text{Klein-Gordon-Gleichung}$$

2. Dirac-Feld:

$$\mathcal{L}_{Dirac} = \bar{\psi}(x) (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(x) = i\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\bar{\psi} \psi$$

$\bar{\psi}, \psi$ als unabhängige Koordinaten

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} = -m\psi; \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} = \bar{\psi} i \gamma^\mu$$

$$\Rightarrow \text{Lagrangegl.: } -m\bar{\psi} - \partial_\mu \bar{\psi} i \gamma^\mu = 0 \Rightarrow \bar{\psi} \left(i \overleftarrow{\partial}_\mu \gamma^\mu + m \right) = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} = (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{\psi})} = 0 \quad \Rightarrow \text{Lagrangegl.: } (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = 0$$

QED Lagrangedichte

3. Elektromagnetisches Feld (Vakuum)

$$\mathcal{L}_{em} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)$$

$\uparrow$ nötig um richtige Energiedichte zu erhalten

$$(*) \quad \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \Rightarrow \text{Wellengleichung im Vakuum} \quad \square A^\nu - \partial^\nu(\partial_\mu A^\mu) = 0$$

4. Lagrangedichte der QED:

$$\mathcal{L}_{Dirac} + \mathcal{L}_{em} \quad \text{mit } D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{QED} &= \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\ &= \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi - \underbrace{q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi}_{j^\mu} A_\mu - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \end{aligned}$$

Tests:

Euler-Lagrange-gl.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} &= (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi - q\gamma^\mu \psi A_\mu \Rightarrow (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = q\gamma^\mu \psi A_\mu \Rightarrow \text{Diracgl. mit Feld} \\ -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} &= q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi = j^\mu \stackrel{+(*)}{\Rightarrow} \square A^\nu - \partial^\nu(\partial_\mu A^\mu) = j^\mu \Rightarrow \text{Wellengl. mit Quelle}_\infty \end{aligned}$$

Noether Theorem ($\mathcal{L}$ und globale PT)

Lagrangedichte ist invariant unter infinitesimaler globaler Phasentransformation

$\Rightarrow$ Es gibt einen erhaltenen Strom $j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \cdot \phi$

$$\phi \rightarrow \phi' = e^{i\alpha} \phi \approx (1 + i\alpha)\phi, \quad \delta\phi = i\alpha\phi$$

$$\delta\mathcal{L} = 0, \quad \delta\mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta(\partial_\mu \phi)$$

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta\phi \right\} \quad \text{warum?} \quad \begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} &= \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \\ \delta(\partial_\mu \phi) &= \partial_\mu(\delta\phi) \quad + \text{ Kettenregel!} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{i\alpha} \delta\mathcal{L} = \partial_\mu \left\{ \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \phi}_{j^\mu \text{ ist erhalten}} \right\} = 0$$

Beispiel: Diracteilchen $\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi$ ist inv. unter $\psi \rightarrow \psi' = e^{i\theta}\psi$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} = \bar{\psi} i \gamma^\mu \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{\psi})} = 0 \quad j^\mu = \bar{\psi} i \gamma^\mu \psi = i \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$$

ist erhalten $\rightarrow$ Ladungserhaltung

Lagrange-Formalismus und lokale Phasentransformation

Ist $\mathcal{L}_{Dirac}$ auch invariant unter lokaler Eichtrafo? $\psi \rightarrow \psi' = e^{iq\chi(x)}\psi$

$$\mathcal{L}_{Test} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi \rightarrow \mathcal{L}' = \bar{\psi}'(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi' = \mathcal{L} - q(\partial_\mu\chi)\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$$

Lösung: muss das Feld dazunehmen A_μ mit

$$A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu\chi \quad \text{wenn } \psi' = \psi(x)e^{iq\chi(x)}, \text{ bzw.:}$$

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi$$

$$\hookrightarrow D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu$$

$\mathcal{L}$ noch nicht komplett, tue "freies Vektorfeld" $\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ dazu

$$\text{Wellengl. des Photons: } \partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu; \quad \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \underbrace{\partial^\nu (\partial_\mu A^\mu)}_{=0 \text{ in Lorenzeichung}} = j^\nu$$

ist invariant unter $A^\mu \rightarrow A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu\chi$

Wellengleichung eines massiven Vektorbosons (Feld W mit Masse M_W):

$$(\partial_\mu\partial^\mu + M_W^2)W^\nu - \partial^\nu(\partial_\mu W^\mu) = j^\nu$$

Unter $W^\mu \rightarrow W'^\mu = W^\mu - \partial^\mu\chi \rightarrow$ Extraterm in Wellengl.: $-M_W^2\partial^\mu\chi$

$\Rightarrow$ Problem bei Vektorfeldern mit Masse!

Eichfreiheit und Photonpolarisation

Betrachte im Folgenden freies Photon mit 3-er Impuls || z-Achse

Wellengleichung: $\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = 0$, Polarisation: $A^\mu = N \underbrace{\epsilon^\mu}_{\text{Polarisation (Vierervektor)}} e^{-ikx}$

Lorenz-Bedingung (LB) $\Rightarrow \partial_\mu A^\mu = 0 \Rightarrow k_\mu \epsilon^\mu = 0$

Beispiel: Photon mit $k^\mu = E(1, 0, 0, 1)$, $\epsilon^\mu = (1, 1, 0, 1)$ erfüllt LB

$\Rightarrow \text{LB} \leftrightarrow |\epsilon^0| = |\epsilon^3|$

Eichtrafo mit $\chi = \frac{e^{-ikx}}{-iE}$

$\Rightarrow A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu \chi =$ interaktive Aufgabe $(0, 1, 0, 0)e^{-ikx}$

$\Rightarrow$ kann Feld so umeichen, dass $\vec{k} \cdot \vec{\epsilon} = 0$ (Coulombeichung)

Feld A hat 4 Freiheitsgrade (DoF):

- 1 DoF durch Lorenzeichung festgelegt
- Masselosigkeit $\rightarrow$ 1 DoF

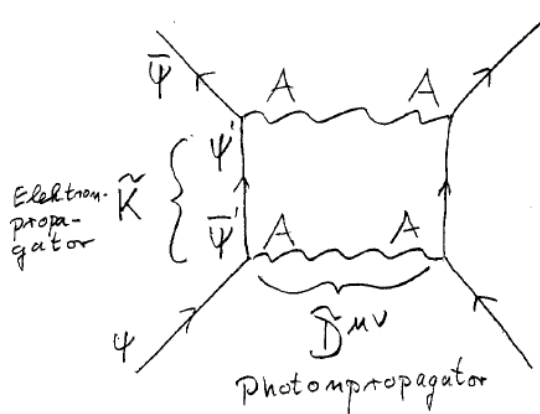
$\Rightarrow$ es bleiben 2 DoF: mit $\vec{k} = (0, 0, k)$:

transversal polarisiert	$\vec{\epsilon}_1 = (1, 0, 0)$	$\vec{\epsilon}_2 = (0, 1, 0)$
zirkular polarisiert	$\vec{\epsilon}_{\lambda=+\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1, i, 0)$	$\vec{\epsilon}_{\lambda=-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -i, 0)$

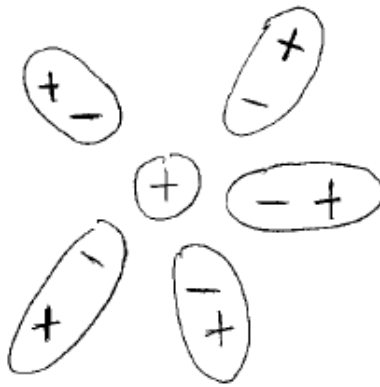
Bemerkungen zum Lagrange-Formalismus

- Klassische Mechanik: $L = T - V$
QFT: L wird axiomatisch festgelegt
- Aus Lagrangedichte lassen sich Feynman-Regeln der Theorie ableiten
(Verallgemeinerte Koordinaten oder Pfadintegral)

Lagrangedichte, Bewegungsgleichungen und Feynmanregeln

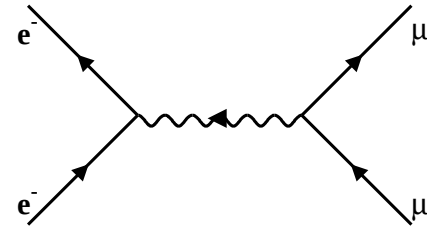
	Freies Elektron	Wechselwirkung mit Photonfeld	Freies Photon
Lagrangian	$L_{Frei} = \bar{\psi}(\not{p} - m)\psi$	$L_{Int} = -q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$	$L_{frei} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$
Euler-Lagr.gl.	$(\not{p} - m)\psi = 0$	$\rightarrow = q\gamma^\mu\Psi A_\mu \mid q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi = j^\mu = \leftarrow$	$\underbrace{\square A^\mu = 0}_{\text{(Lor. Eichung)}}$
Propagatoren: ~ quadratische Terme in L_{frei}	$\begin{aligned}\tilde{K} &= \frac{1}{-i(\not{p} - m)} \\ &= -\frac{(\not{p} + m)}{p^2 - m^2} \\ &= \frac{i \sum u \bar{u}}{p^2 - m^2} \\ &\equiv i \frac{\psi \bar{\psi}}{p^2 - m^2}\end{aligned}$		$\begin{aligned}g^{\mu\nu}\square A_\nu &= 0 \\ \tilde{D}^{\mu\nu} &= \frac{i \cdot -g^{\mu\nu}}{q^2} \\ &= \frac{i \sum_{\lambda=1}^4 \epsilon_\mu^{(\lambda)*} \epsilon_\nu^{(\lambda)}}{q^2} \\ &\equiv \frac{-i A A}{q^2}\end{aligned}$
Vertices ~ iL_{WW}			

$\sum$ Photonpolarisationen: $\rightarrow i \sum_{\lambda=1}^4 \epsilon_\mu^{(\lambda)*} \epsilon_\nu^{(\lambda)} = \sum_T \underbrace{\epsilon_\mu^{T*} \epsilon_\nu^T}_{\text{transversal}} + \underbrace{\epsilon_\mu^L * \epsilon_\nu^L}_{\text{longitudinal}} + \underbrace{\epsilon_\mu^{S*} \epsilon_\nu^S}_{\text{skalar}} \quad (\text{s. Halzen \& Martin Seite 139 ff})$



Bei kleinen Abständen sieht man mehr von der zentralen Ladung $\rightarrow$ quantifizieren

Beispiel: $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$



1. Ordnung

Jetzt zusätzlich:



Loop

$$\mathbf{M}^{(1)} = -e^2 [\bar{u}(p_3) \gamma^\mu u(p_1)] \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} [\bar{u}(p_4) \gamma^\nu u(p_2)]$$

Folgendes: Herleitung siehe z.B. Halzen-Martin

$$\mathbf{M}^{Loop} = -\frac{ie^4}{q^4} [\bar{u}(p_3) \gamma^\mu u(p_1)] \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{Sp(\gamma_\mu (\not{k} + m) \gamma_\nu (\not{q} - \not{k} + m))}{(k^2 - m^2)((q - k)^2 - m^2)} [\bar{u}(p_4) \gamma^\nu u(p_2)]$$

Berücksichtigung zusätzliche Ordnung (Loop):

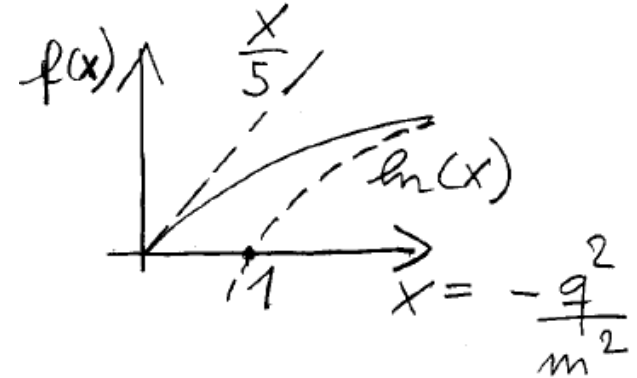
$$\frac{g_{\mu\nu}}{q^2} \rightarrow \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} - \frac{i}{q^4} I_{\mu\nu} \quad \text{wobei} \quad I_{\mu\nu} = -e^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{Sp(\quad)}{(\quad)(\quad)}$$

Loopdiagramm-Integral

Man kann zeigen: $I_{\mu\nu} = -ig_{\mu\nu}I(q^2)q^2$

$$I(q^2) = \frac{e^2}{12\pi^2} \left[\underbrace{\int_{m^2}^{\infty} \frac{dx}{x}}_{\text{log. divergent}} - \underbrace{6 \int_0^1 dz \, z(1-z) \ln \left(1 - \frac{q^2}{m^2} z(1-z) \right)}_{f(q^2) > 0 \text{ und endlich}} \right]$$

$$\int_{m^2}^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{M^2 \rightarrow \infty} \int_{m^2}^{M^2} \frac{dx}{x} = \lim_{M^2 \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{M^2}{m^2} \right)$$



Abschneideparameter M^2 , am Ende $M^2 \rightarrow \infty$

$$I(q^2) = \frac{e^2}{12\pi^2} \left[\ln \left(\frac{M^2}{m^2} \right) - f(q^2) \right] = \begin{cases} \frac{e^2}{12\pi^2} \ln \left(\frac{M^2}{m^2} \right) + \frac{e^2}{60\pi^2} \frac{q^2}{m^2} & \frac{-q^2}{m^2} \ll 1 \\ \frac{e^2}{12\pi^2} \ln \left(\frac{M^2}{-q^2} \right) & \frac{-q^2}{m^2} \gg 1 \end{cases}$$

Nebenbei: $q^2 < 0$, $q^2 = -4|\vec{p}|^2 \sin^2 \theta/2$ im CMS

$$\mathbf{M} = -e^2 [\bar{u}(p_3) \gamma^\mu u(p_1)] \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} \left[1 - \frac{e^2}{12\pi^2} \left(\ln \left(\frac{M^2}{m^2} \right) - f(q^2) \right) \right] [\bar{u}(p_4) \gamma^\nu u(p_2)]$$

Renormierung der Ladung:

Jetzt: Wir stecken $\ln\left(\frac{M^2}{m^2}\right)$ in "renormierte" Ladung e_R :

$$e_R \equiv e \sqrt{1 - \frac{e^2}{12\pi^2} \ln\left(\frac{M^2}{m^2}\right)}$$

Damit wird die Amplitude zu:

$$M = -e_R^2 \left[\bar{u} \dots u \right]_{31} \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} \left[1 + \frac{e_R^2}{12\pi^2} f(q^2) \right] \left[\bar{u} \dots u \right]_{24} + \mathcal{O}(e^6)$$

- M taucht nicht mehr explizit auf, e_R ist die gemessene Ladung
- absorbiere endlichen Term $f(q^2)$ in Kopplungsstärke

$$e_R(q^2) \equiv e_R(0) \sqrt{1 + \frac{e_R^2(0)}{12\pi^2} f(q^2)}$$

$$\text{mit } \alpha = \frac{e^2}{4\pi} \Rightarrow \alpha(q^2) = \alpha(0) \left(1 + \frac{\alpha(0)}{3\pi} f(q^2) \right) \quad \text{"laufende" Kopplungskonstante}$$

$$\text{Effekt sehr klein: } \alpha(0) = \frac{1}{137}, \quad \alpha(100 \text{ GeV}) = \frac{1}{128}$$

Aufsummieren der Loopdiagramme

Loopdiagramme in allen Ordnungen:

$$\text{Tree} + \text{1-loop} + \text{2-loop} + \dots$$

$$\text{Tree} = \text{Tree} \left[1 - \text{1-loop} + \left(\text{1-loop} \right)^2 - \dots \right]$$

$$e_R(q^2) \equiv e \left[\underbrace{1 - I(q^2) + I^2(q^2) - I^3(q^2) + \dots}_{\text{geometrische Reihe}} \right] = e \frac{1}{1 + I(q^2)}$$

Im Grenzfall hoher $|q^2|$: $I(q) = \frac{\alpha}{3\pi} \ln \left(\frac{-q^2}{M^2} \right) \Rightarrow \alpha(q^2) = \frac{\alpha(0)}{1 - \frac{\alpha(0)}{3\pi} \ln \left(\frac{-q^2}{M^2} \right)}$

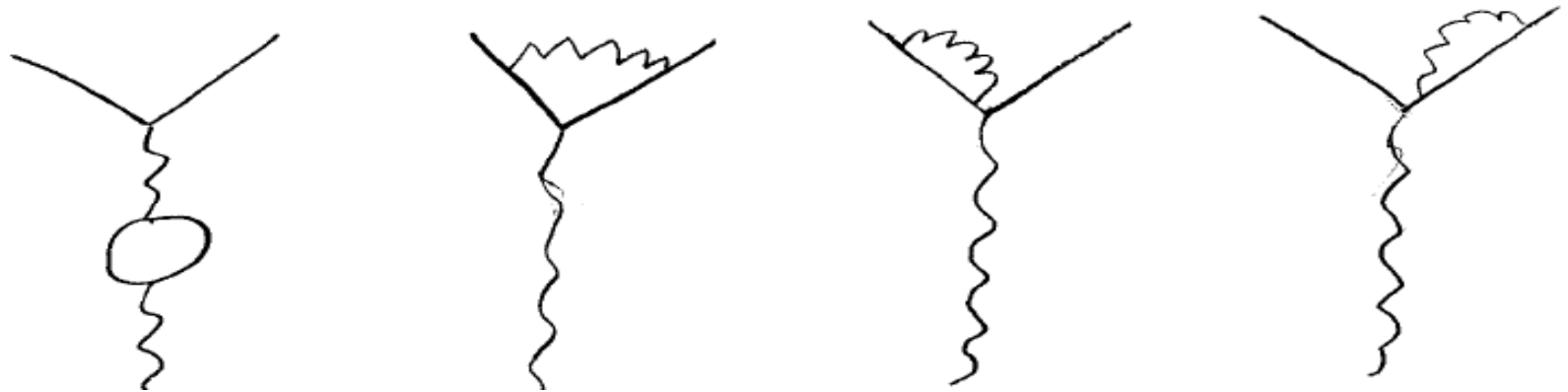
Renormierungsprozedur: Wähle Renormalisierungsskala μ (=Referenzskala) und subtrahiere $\alpha(\mu^2)$ von $\alpha(Q^2)$, nun schicke $M^2 \rightarrow \infty$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha(q^2) = \frac{\alpha(\mu^2)}{1 - \frac{\alpha(\mu^2)}{3\pi} \ln \left(\frac{-q^2}{\mu^2} \right)}}$$

$\Rightarrow$ Verlauf der Kopplung mit $q^2 \rightarrow$ fixiert Renormierungsgruppengl.

$\Rightarrow$ Absoluter Wert von $\alpha(q^2)$ muss experimentell bestimmt werden!

Komplettes Set von $\mathcal{O}(\alpha^2)$ Diagrammen



Modifiziert:

Photon-Propagator

Strom $j_{fi}^\mu = -e\bar{u}\gamma^\mu u$

Renormierung:

Ladung:

$$-I(q^2) \stackrel{\text{Hochener.}}{=} \frac{\alpha}{3\pi} \ln\left(\frac{Q^2}{\mu^2}\right) \quad \text{---} = 0, \text{ Ward-Identitäten} \quad \text{---}$$

Magn. Moment:

x

$$g = 2 + \frac{\alpha}{\pi}$$

x

x

e^- -Selbstenergie
= Masse

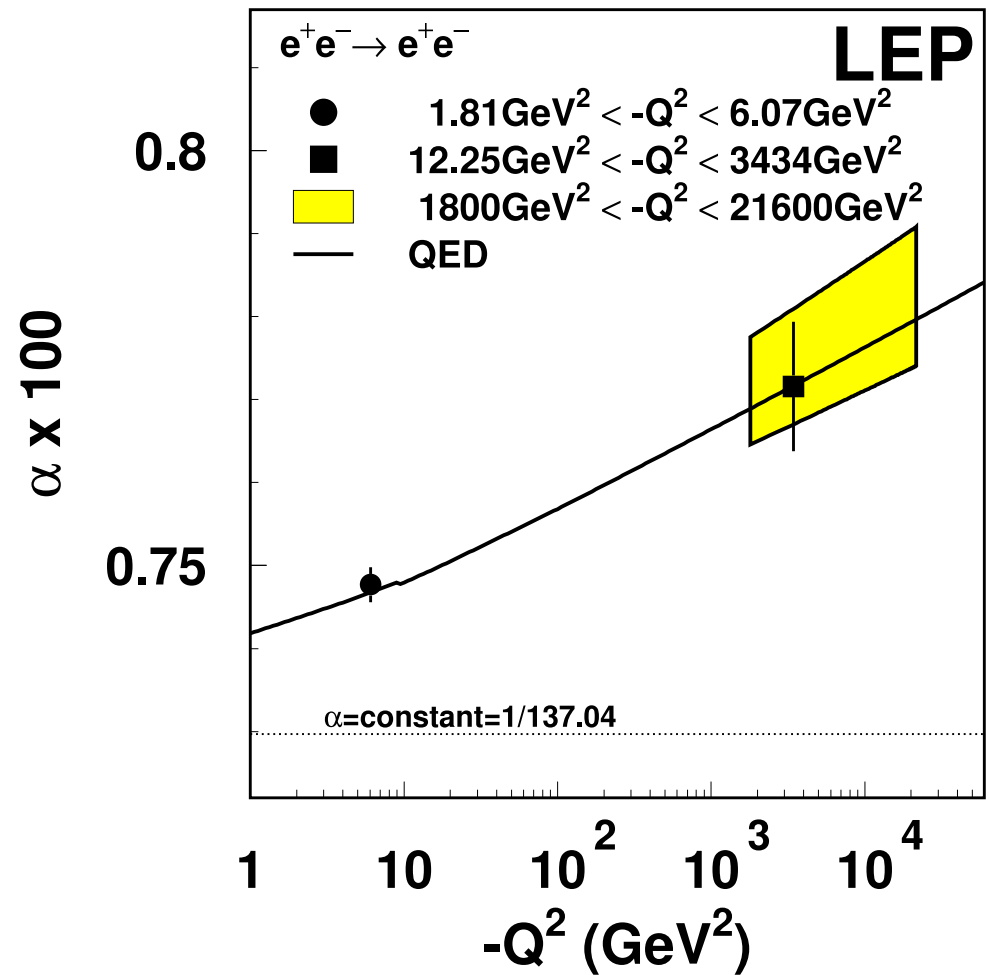
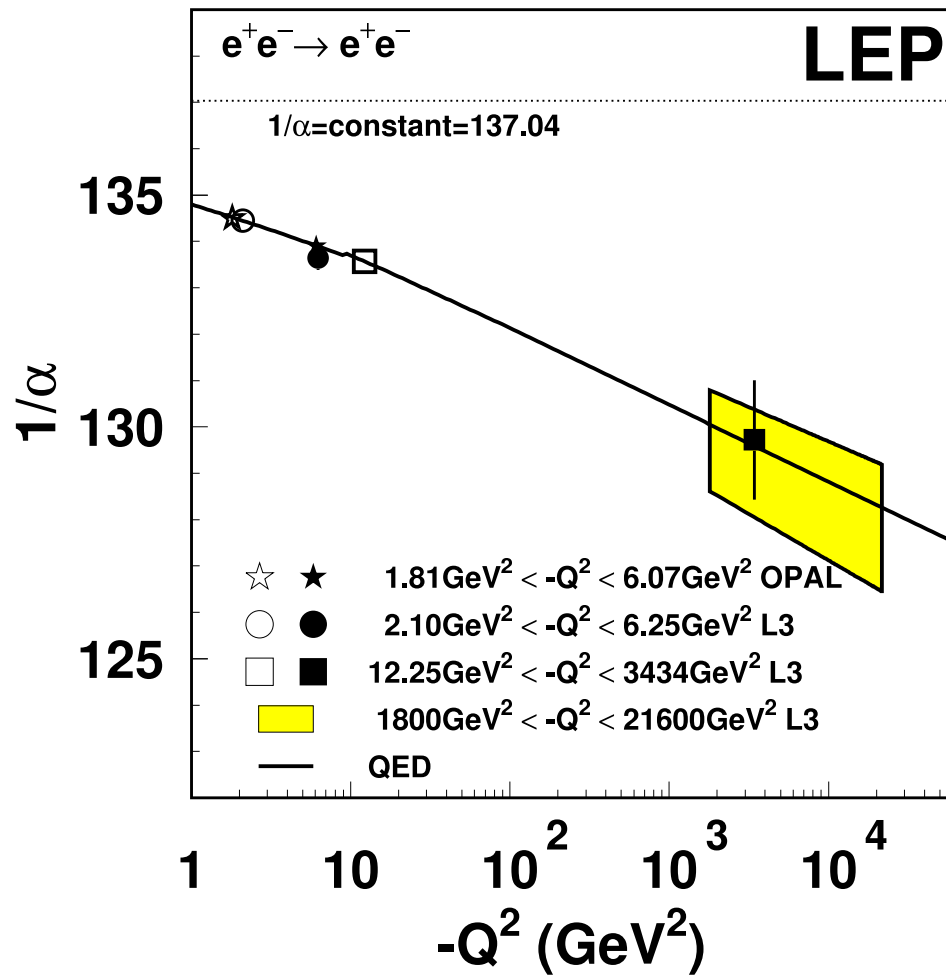
x

x

ja

ja

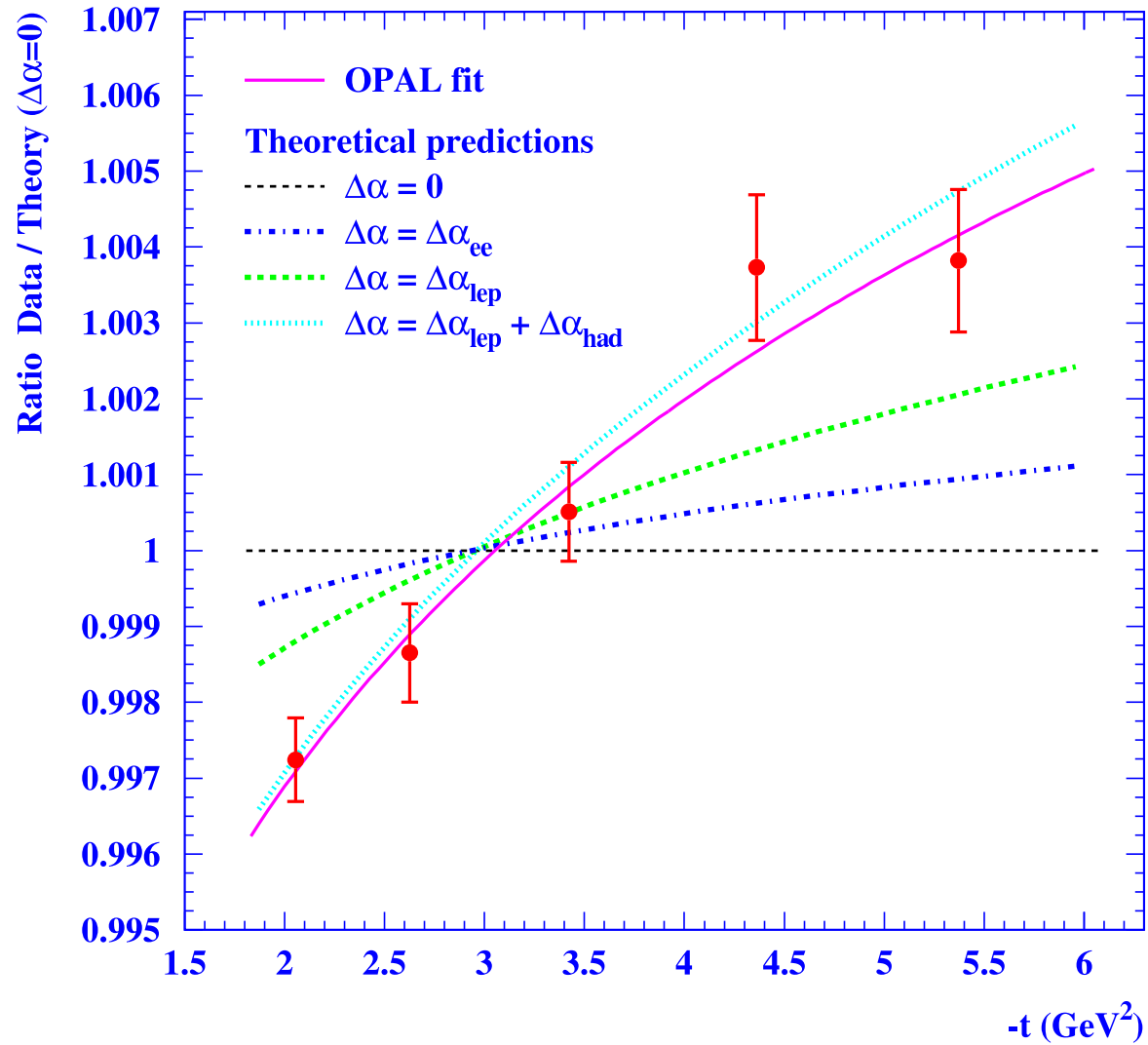
Messung der laufenden Kopplung in Bhabha Streuung bei LEP



<http://arxiv4.library.cornell.edu/abs/hep-ex/0505072v3>

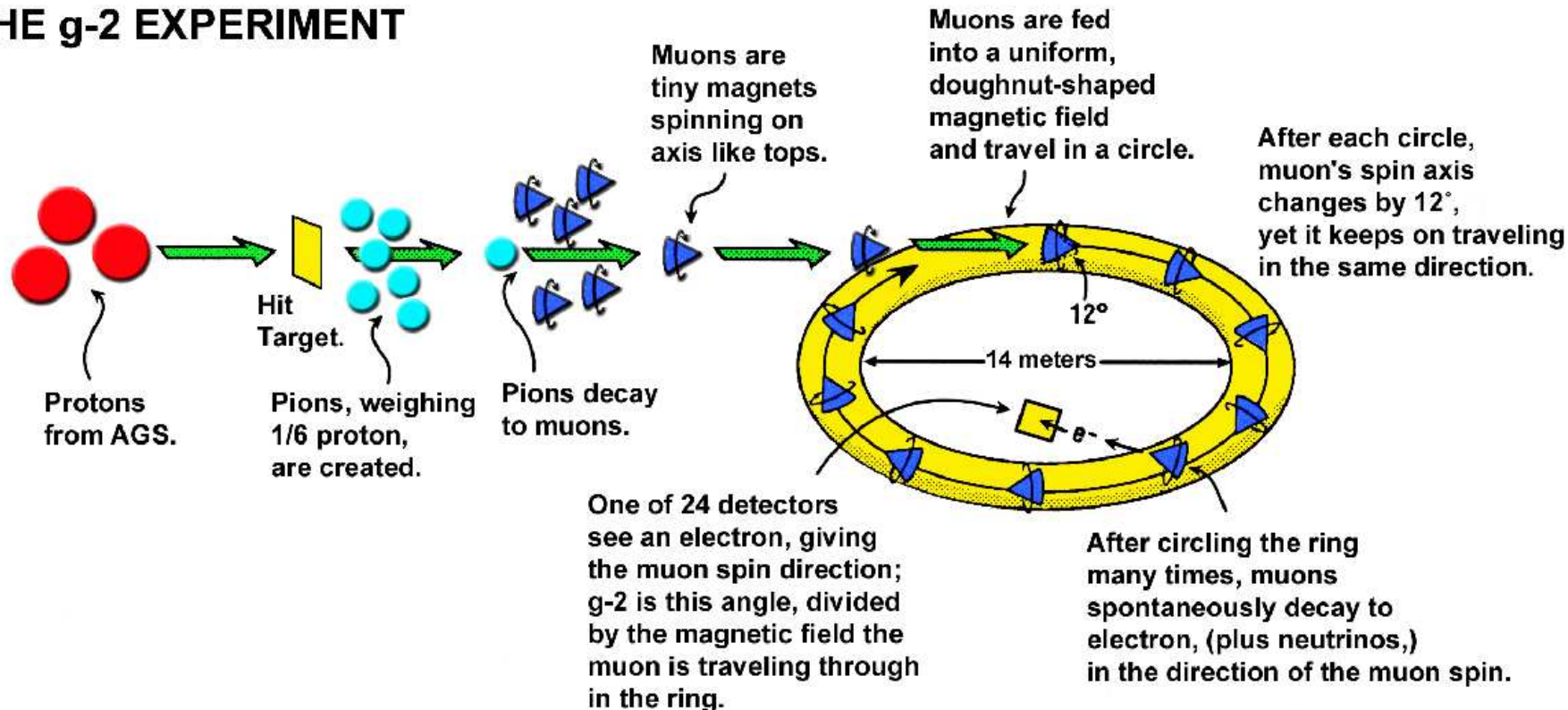
Running α : Beiträge verschiedener Teilchensorten im Loop

OPAL

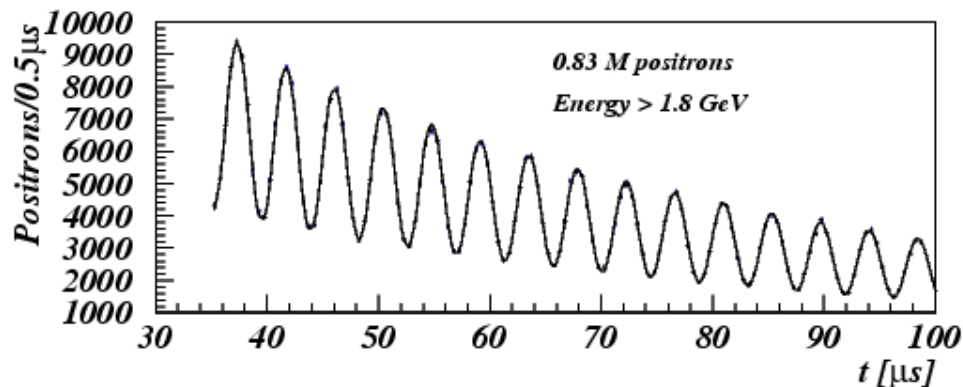


<http://www.slac.stanford.edu/econf/C060706/pdf/0610037.pdf>

LIFE OF A MUON: THE g-2 EXPERIMENT

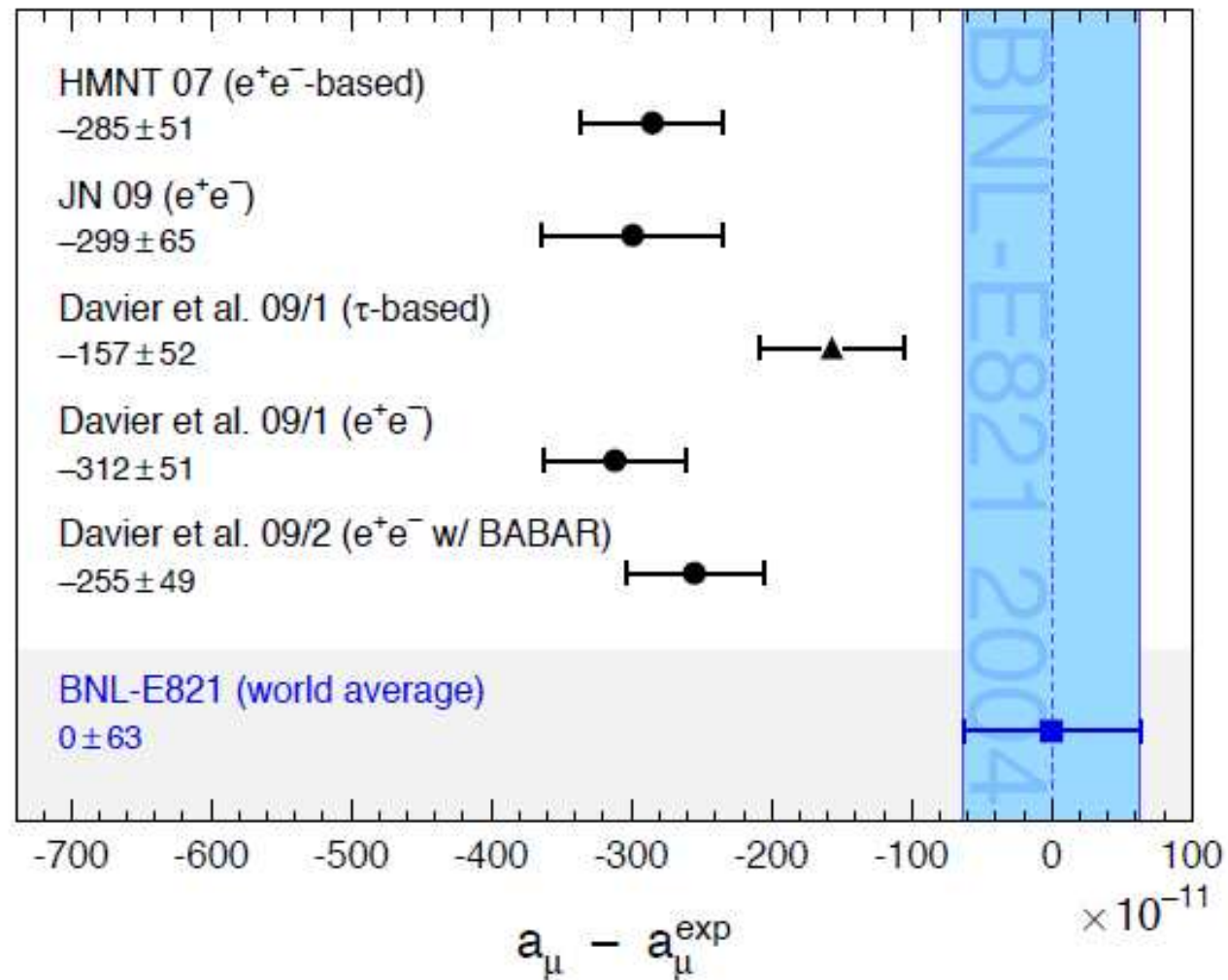


Zahl der e^+ hängt von $\phi(t)$ ab
Oszillationsperiode $\Rightarrow a_\mu = \frac{g-2}{2}$



Zyklotronfrequenz eines Teilchen im B -Feld: $\omega_c = \frac{eB}{\gamma m}$
Larmorfrequenz der Spin Präzession $\omega_L = \frac{eB}{\gamma m} \left[1 + \frac{g-2}{2} \gamma \right]$
 $\phi(t) = (\omega_L - \omega_c) \cdot t = \frac{g-2}{2} \frac{eB}{m} t$
Winkel zwischen Spin und Impuls

$g - 2$ Vergleich Experiment (BNL E821) vs Rechnungen



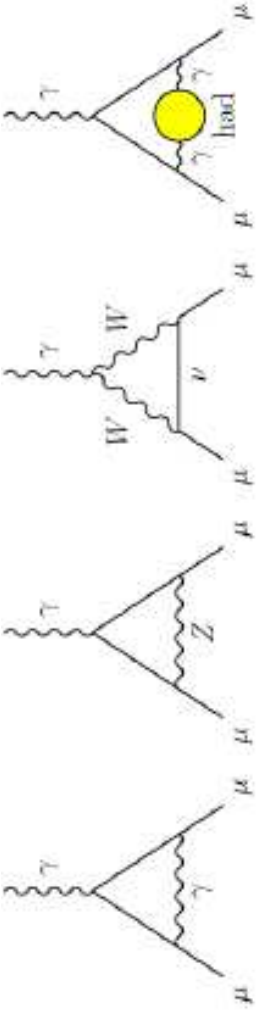


Figure 1: Representative diagrams contributing to a_μ^{SM} . From left to right: first order QED (Schwinger term), lowest-order weak, lowest-order hadronic.

$$a_\mu^{\text{QED}} = 116\,584\,718.10(0.16) \times 10^{-11}$$

$$a_\mu^{\text{EW}} = 154(1)(2) \times 10^{-11}$$

$$a_\mu^{\text{Had}}[\text{LO}] = 6\,894(42)(18) \times 10^{-11} \quad \text{aus } \sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons})$$

$$a_\mu^{\text{Had}}[\text{LO}] = 7\,103(50)(7)(28) \times 10^{-11} \quad (\tau) \quad \text{aus } \tau \rightarrow \nu_\tau + \text{hadrons}$$

$$a_\mu^{\text{Had}}[\text{NLO}] = 22(35) \times 10^{-11}$$

$$a_\mu^{\text{SM}} = 116\,591\,788(2)(46)(35) \times 10^{-11} \quad \Delta a_\mu = a_\mu^{\text{exp}} - a_\mu^{\text{SM}} = 292(63)(58) \times 10^{-11}$$

$$a_\mu^{\text{SUSY}} \simeq \pm 130 \times 10^{-11} \cdot \left(\frac{100 \text{ GeV}}{m_{\text{SUSY}}} \right)^2 \tan\beta,$$