Elektron Myonstreuung: Betrachtungen der Dimensionalität

Eine Betrachtung der physikalischen Dimensionen ist hilfreich im Verständis der QED Streuprozesse. Mit natürlichen Einheiten $\hbar = 1$, $c = 1$ gibt es nur eine unabhängige Dimension die wir als Länge L wählen wollen. Damit: $[x] = [t] = L$, $[E] = [P] = L^{-1}$
Aufgabe: Tragen Sie für die Streuamplitude $S_{fi}^{(1)}$ unter den Klammern die Dimension der jeweiligen Ausdrücke ein und bestimmen Sie die resultierende Dimension:

$$S_{fi}^{(1)} = (2\pi)^4 \underbrace{\delta^4(p_3 + p_4 - p_1 - p_2)}_{} ie^2 \underbrace{\bar{u}(p_3)\gamma_\mu u(p_1)}_{L^{-1}} \underbrace{\frac{1}{q^2}}_{} \underbrace{\bar{u}(p_4)\gamma^\mu u(p_2)}_{} = M^{(1)} (2\pi)^4 \delta^4(p_3 + p_4 - p_1 - p_2) M_{if}$$

Wie ändert sich die Situation wenn wir ein Normierungsvolumen für die Spinoren einführen?

$$S_{fi}^{(1)} = \underbrace{\frac{1}{V^2}}_{} (2\pi)^4 \underbrace{\delta^4(p_3 + p_4 - p_1 - p_2)}_{} ie^2 \underbrace{\bar{u}(p_3)\gamma_\mu u(p_1)}_{L^{-1}} \underbrace{\frac{1}{q^2}}_{} \underbrace{\bar{u}(p_4)\gamma^\mu u(p_2)}_{}$$

Wir betrachten die Übergangswahrscheinlichkeit und integrieren über ein- und auslaufende Impulszustände. Was ist die Dimension von W?

$$W = \underbrace{|S_{fi}|^2}_{} \cdot \underbrace{V \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3\, 2E_1}}_{} \underbrace{V \int \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3\, 2E_2}}_{} \underbrace{V \int \frac{d^3 p_3}{(2\pi)^3\, 2E_3}}_{} \underbrace{V \int \frac{d^3 p_4}{(2\pi)^3\, 2E_4}}_{}$$

Streuung Teilchen 1 an Targetteilchen 2 (beide mit fixem Impuls): Hinweis: S_{fi}^2 enthält $[\delta^4(\omega)]^2$ mit $\omega = p_3 + p_4 - p_1 - p_2$, benutze $(2\pi)^4 [\delta^4(\omega]^2 = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 x e^{-i\omega x} \int d^4 x' e^{-i\omega x'} = \int d^4 x e^{-i\omega x} \delta(\omega) \approx V\,T \delta(\omega)$

$$W = \underbrace{|M_{fi}|^2}_{} \underbrace{V \int \frac{d^3 p_3}{(2\pi)^3\, 2E_3}}_{} \underbrace{V \int \frac{d^3 p_4}{(2\pi)^3\, 2E_4}}_{} \underbrace{(2\pi)^4 \delta^4(p_3 + p_4 - p_1 - p_2)}_{} \cdot \underbrace{\frac{V\,T}{2E_2}}_{}$$ (Faktor $\frac{1}{2E_2}$ für Dichte Targetteilchen)

Wirkungsquerschnitt:

$$\underbrace{\sigma}_{} = \frac{W}{T \cdot j_{ein}} = \underbrace{|M_{fi}|^2}_{} \underbrace{V \int \frac{d^3 p_3}{(2\pi)^3\, 2E_3}}_{} \underbrace{V \int \frac{d^3 p_4}{(2\pi)^3\, 2E_4}}_{} \underbrace{(2\pi)^4 \delta^4(p_3 + p_4 - p_1 - p_2)}_{} \cdot \underbrace{\frac{V}{2E_2}}_{} \underbrace{\frac{V}{v_1\, 2E_1}}_{}$$

beachte: dieser WQ = dem aus Fermis goldener Regel! (s. Vorlesung) Die letzen beiden Terme $\equiv \frac{1}{F}$ (mit F = Flussfaktor).