E-Teilchen für Fortgeschrittene, Uni Hamburg, SS 10
$\rightarrow$ interaktive Uebungen “Lorentz-Transformation von Spinoren”

Die Forderung nach der Invarianz der Diracgleichung unter Koordinatentransformationen (Drehungen, LT) führt zu der Bedingung für die Spinortransformationsmatrix S:

$$S^{-1}\gamma^\nu S = a^\nu_\mu \gamma^\mu \tag{1}$$

Als Kandidaten für die **Lorentztransformation** || **zur** z**-Achse** betrachten wir die Matrix S:

$$S = \exp -\frac{\omega}{2}\gamma^0\gamma^3 = I cosh\frac{\omega}{2} - \gamma^0\gamma^3 sinh\frac{\omega}{2}$$

$$S^{-1} = \exp +\frac{\omega}{2}\gamma^0\gamma^3 = I cosh\frac{\omega}{2} + \gamma^0\gamma^3 sinh\frac{\omega}{2}$$

Beweis, dass diese Matrix Gl. (1) erfüllt:

$$\begin{aligned}
S^{-1}\gamma^0 S &= \gamma^0 cosh^2\frac{\omega}{2} + \underbrace{\gamma^0(\gamma^3\gamma^0 - \gamma^0\gamma^3)}_{-\gamma^3} sinh\frac{\omega}{2}cosh\frac{\omega}{2} - \gamma^0 \underbrace{\gamma^3\gamma^0\gamma^0\gamma^3}_{-1} sinh^2\frac{\omega}{2} \\
&= \gamma^0 cosh\omega - \gamma^3 sinh\omega \\
S^{-1}\gamma^1 S &= \gamma^1 \\
S^{-2}\gamma^2 S &= \gamma^2 \\
S^{-3}\gamma^3 S &= -\gamma^0 sinh\omega + \gamma^3 cosh\omega
\end{aligned}$$

Anwendung auf Spinor:

$$u(0 = \sqrt{2m}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u(p) = S^{-1}u(0) = \left(I cosh\frac{\omega}{2} + \gamma^0\gamma^3 sinh\frac{\omega}{2}\right) u(0)$$

Es gilt

$$cosh\frac{\omega}{2} = \sqrt{\frac{E+m}{2m}}, \quad sinh\frac{\omega}{2} = \sqrt{\frac{E+m}{2m}}\frac{p_z}{E+m}, \qquad \gamma^0\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie u(p)