E-Teilchen für Fortgeschrittene, Uni Hamburg, SS 10
$\rightarrow$ interaktive Uebungen "Rotation von Spinoren"

Die Forderung nach der Invarianz der Diracgleichung unter Koordinatentransformationen (Drehungen, LT) führt zu der Bedingung für die Spinortransformationsmatrix S:
$\Rightarrow S^{-1}\gamma^\nu S = a^\nu_\mu \gamma^\mu$. Wir betrachten folgende Matrix S

$$S = \exp i\frac{\theta}{2}R_3 = Icos\frac{\theta}{2}+iR_3 sin\frac{\theta}{2} \qquad \text{mit } R_3 = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe: Zeigen Sie, dass $S^{-1}\begin{pmatrix} \gamma^0 \\ \gamma^1 \\ \gamma^2 \\ \gamma^3 \end{pmatrix} S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos\theta & sin\theta & 0 \\ 0 & -sin\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma^0 \\ \gamma^1 \\ \gamma^2 \\ \gamma^3 \end{pmatrix}$

und damit dass dieses S die gesuchte Transformationssmatrix für eine Drehung um die z-Achse ist. Die γ Matrizen sind gegeben durch:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & +i & 0 \\ 0 & +i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hinweis: Rechnen Sie explizit aus
$(Icos\frac{\theta}{2} - iR_3 sin\frac{\theta}{2})\gamma^\mu(Icos\frac{\theta}{2} + iR_3 sin\frac{\theta}{2})$,
getrennt für jedes $\mu = 0, 1, 2, 3$ und berücksichtigen Sie dabei:
R_3R_3= 1, $R_3\gamma^0 = \gamma^0 R_3$, $\quad R_3\gamma^3 = \gamma^3 R_3$
$R_3\gamma^1 = -\gamma^1 R_3$, $\; R_3\gamma^2 = -\gamma^2 R_3$
$i\gamma^1 R_3 = \gamma^2$, $\; i\gamma^2 R_3 =$ -γ^1
Additionstheoreme:
$cos\theta = cos^2\frac{\theta}{2} - sin^2\frac{\theta}{2}, \qquad sin\theta = 2sin\frac{\theta}{2}cos\frac{\theta}{2}$

Lösung:

$$
\begin{aligned}
S^{-1}\gamma^0 S &= (Icos\frac{\theta}{2} - iR_3 sin\frac{\theta}{2})\gamma^0(Icos\frac{\theta}{2} + iR_3 sin\frac{\theta}{2}) \\
&= (Icos\frac{\theta}{2} - iR_3 sin\frac{\theta}{2})(Icos\frac{\theta}{2} + iR_3 sin\frac{\theta}{2})\gamma^0 \\
&= I\left[cos^2\frac{\theta}{2} + sin^2\frac{\theta}{2}\right]\gamma^0 = \gamma^0 \\
S^{-1}\gamma^1 S &= (Icos\frac{\theta}{2} - iR_3 sin\frac{\theta}{2})\gamma^1(Icos\frac{\theta}{2} + iR_3 sin\frac{\theta}{2}) \\
&= (Icos\frac{\theta}{2} + iR_3 sin\frac{\theta}{2})(Icos\frac{\theta}{2} + iR_3 sin\frac{\theta}{2})\gamma^1 \\
&= \left[cos^2\frac{\theta}{2} - sin^2\frac{\theta}{2}\right]\gamma^1 + 2sin\frac{\theta}{2}\,cos\frac{\theta}{2}\,iR_3\gamma^1 \\
&= cos\theta\,\gamma^1 + sin\theta\,\gamma^2 \\
S^{-1}\gamma^2 S &= (Icos\frac{\theta}{2} + iR_3 sin\frac{\theta}{2})(Icos\frac{\theta}{2} + iR_3 sin\frac{\theta}{2})\gamma^2 \\
&= cos\theta\,\gamma^2 - sin\theta\,\gamma^1 \\
S^{-1}\gamma^3 S &= \gamma^3 \quad \text{(Beweis analog } S^{-1}\gamma^0 S\text{)}
\end{aligned}
$$

Wir können die Rotation um die z-Achse auch beschreiben (wie im Schmüserbuch) unter direkter Benutzung der γ Matrizen: es gilt $iR_3 = -\gamma^1\gamma^2$

$$
\Rightarrow S = \exp -\frac{\theta}{2}\gamma^1\gamma^2 = Icos\frac{\theta}{2} - \gamma^1\gamma^2 sin\frac{\theta}{2}
$$

$$
S^{-1} = \exp +\frac{\theta}{2}\gamma^1\gamma^2 = Icos\frac{\theta}{2} + \gamma^1\gamma^2 sin\frac{\theta}{2}
$$

Damit finden wir

$$
\begin{aligned}
S^{-1}\gamma^0 S &= \gamma^0 cos^2\frac{\theta}{2} - \underbrace{\gamma^1\gamma^2\gamma^0\gamma^1\gamma^2}_{-\gamma^0} sin^2\frac{\theta}{2} = \gamma^0 \\
S^{-1}\gamma^1 S &= \gamma^1 cos^2\frac{\theta}{2} + \underbrace{\gamma^1(\gamma^2\gamma^1 - \gamma^1\gamma^2)}_{+2\gamma^2} cos\frac{\theta}{2} sin\frac{\theta}{2} - \underbrace{\gamma^1\gamma^2\gamma^1\gamma^1\gamma^2}_{\gamma^1} sin^2\frac{\theta}{2} \\
&= \gamma^1 cos\theta + \gamma^2 sin\theta \\
S^{-1}\gamma^2 S &= -\gamma^1 sin\theta + \gamma^2 cos\theta \\
S^{-1}\gamma^3 S &= \gamma^3
\end{aligned}
$$