Übungen E-Teilchen für Fortgeschrittene SS2010, Blatt 7

Ausgabe Freitag 21.5, Abgabe Freitag 4.6.

1. **Photonpolarisation: (3 Punkte)**

   a) Wir betrachten Polarisationsvektoren von Photonen die sich entlang der z-Achse ausbreiten. Bestimmen Sie wie sich die Linearkombinationen

   $$\epsilon_R = \frac{1}{\sqrt{2}}(\epsilon_1 + i\epsilon_2)$$
   $$\epsilon_L = \frac{1}{\sqrt{2}}(\epsilon_1 - i\epsilon_2)$$

   mit $\epsilon_1 = (1, 0, 0)$ und $\epsilon_2 = (0, 1, 0)$ transformieren unter einer Rotation θ um die z-Achse. Zeigen Sie damit, dass ϵ_R und ϵ_L Photonen mit Helizität $+1$ bzw. -1 beschreiben ($\epsilon_{R,L}$ heissen auch zirkulare Polarisationsvektoren).

   Anleitung: Zeigen Sie, dass unter einer Rotation θ um die die z-Achse, welche die Koordinatenachsen transformiert $(x, y) \rightarrow (x', y')$, folgendes gilt:

   $$\epsilon_i \rightarrow \epsilon_i' = e^{-iJ_z\theta}\,\epsilon_i \;=\; e^{-i\lambda_i\theta}\,\epsilon_i, \qquad i = R, L$$

   mit $\lambda_R = +1$ und $\lambda_L = -1$. (in anderen Worten: ϵ_R und ϵ_L sind Eigenzustände des Rotationsoperators $e^{-iJ_z\theta}$ mit Eigenwerten $+1$ und -1).

2. **Massive Vektorbosonen: (5 Punkte)**

   Die Wellengleichung für die Wellenfunktion B^ν eines massives Vektorboson (mit Masse M) ist gegeben durch

   $$(\Box + M^2)B^\nu - \partial^\nu(\partial_\mu B^\mu) = 0.$$

   a) Welchen Extraterm müssen wir zur Lagrangedichte (im Vergleich zum freien masselosen Photonfeld) dazuaddieren damit wir diese Wellengleichung erhalten?

   b) Wenden Sie die Vierer-Divergenz ∂_ν auf die Wellengleichung an und finden Sie damit eine Gleichung, welche die Photonpolarisation einschränkt. Wie lautet Sie? Zeigen Sie dass die freien Teilchen Lösungen

   $$B^\mu = \epsilon^\mu \cdot e^{-ipx},$$

mit Viererimpuls $p = (E, 0, 0, P)$ diese Bedingung gerade für die folgenden drei Polarisationsvektoren

$$\epsilon^{(\lambda=\pm1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, \pm i, 0)$$

$$\epsilon^{(\lambda=0)} = \frac{1}{M}(|P|, 0, 0, E)$$

erfüllt. Begründen Sie warum der letzte Zustand Helizität Null hat (Hinweis: Sie können dafür wie in Aufg. 1a) die Transformation bei Rotation um die z-Achse betrachten)

c) Beweisen Sie die Vollständigkeitsrelation

$$\sum_\lambda \epsilon_\mu^{(\lambda)*}\epsilon_\nu^{(\lambda)} = -g_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{M^2} \ ,$$

wobei die Summe über die obigen drei Polarisationszustände geht. (Hinweis: Man kann dies z.B. komponentenweise verifizieren.) Wozu ist diese Relation nützlich: man kann damit den Zähler des Propagators des massiven Vektorbosons ausdrücken: $\tilde{D}_{\mu\nu} \sim \frac{i(-g_{\mu\nu} + p_\mu p_\nu / M^2)}{p^2 - M^2}$.

3. **Energiedichte aus dem Lagrangian ableiten: (4 Punkte)**
Die Lagrangedichte für das freie elektromagnetische Feld ist gegeben durch

$$\mathcal{L}_{em} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \qquad \text{mit } F_{\mu\nu} = (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu).$$

Bestimmen Sie die Energie des Feldes, die sich ergibt als Hamiltondichte $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\nu)}(\partial_0 A_\nu) - \mathcal{L}$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{H} \sim E^2 + B^2$. Hinweis: Dies können Sie z.B. berechnen wenn sie die explizite Matrixform von $F_{\mu\nu}$ mit den E- und B-Feldern benutzen.