Übungen E-Teilchen für Fortgeschrittene SS2010, Blatt 4

Ausgabe Montag 3.5, Abgabe bis Dienstag 11.5.

1. **Differenzieller und totaler Wirkungsquerschnitt für $e^-e^+ \to \mu^-\mu^+$:** Der Wirkungsquerschnitt $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ für den Streuprozess $e^-e^+ \to \mu^-\mu^+$ ist in Ordnung $o(\alpha^2)$ in der Hochenergienäherung gegeben durch (s. Vorlesung):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4s}(1 + \cos^2\theta)$$

a) Bestimmen Sie daraus $\dfrac{d\sigma}{dQ^2}$ mit $Q^2 = 2p_1p_3 = 2p_{e^-}p_{\mu^-}$.

   – Geben Sie zunächst Q^2 als Funktion von $-\cos(\theta)$ an.

   – Wenden Sie die Kettenregel an um $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ in $\frac{d\sigma}{dQ^2}$ umzutransformieren. Beachten Sie dabei, dass Sie (warum?) schreiben dürfen $d\Omega = 2\pi d(-\cos\theta)$.

b) Der totale Wirkungsquerschnitt nach Integration über $d\Omega$ ist: $\sigma(e^-e^+ \to \mu^-\mu^+) = \dfrac{4\pi\alpha^2}{3s}$. Zeigen Sie, dass dies bei Umrechnung von natürlichen in die üblichen Einheiten gerade folgendes ergibt:

$$\sigma(e^-e^+ \to \mu^-\mu^+) = \frac{87\ nbarn}{s\,[GeV^2]}$$

2. **Paritätsoperator und Verhalten der Diracspinoren, Chiralität**

Die Raumspiegelung P transformiert $x^\mu = (t, \vec{x}) \xrightarrow{P} x'^\mu = (t, -\vec{x})$.

- Zeigen Sie, dass die mit P assoziierte Transformation der Spinoren gegeben ist durch $\Psi'(x') = S\Psi(x)$ mit $S = \gamma^0$. Dafür müssen Sie zeigen, dass

$$S^{-1}\gamma^\nu S = P^\nu_\mu \gamma^\mu \quad \text{mit } P^\nu_\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Zeigen Sie (einfach!) dass die letzte Gleichung komponentenweise gilt d.h. für $\nu = 0$ und $\nu = 1, 2, 3$.

- Allgemeiner Hinweis: Für die folgende Aufgabe benutzen wir wie in der Vorlesung die Dirac-Notation für die γ-Matrizen. Wir wollen uns das Verhalten der vier Basisspinoren (Impulse || z-Achse gewählt)

$$u_1 = \sqrt{E+m}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E+m} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \sqrt{E+m}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{-p_z}{E+m} \end{pmatrix}, \quad v_1 = \sqrt{E+m}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-p_z}{E+m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \sqrt{E+m}\begin{pmatrix} \frac{p_z}{E+m} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

unter der Paritätstransformation γ^0 als auch unter dem mit der Chiralität (Händigkeit) verknüpften Operator γ^5 etwas genauer anschauen. Tragen Sie in die folgenden Tabellen ein wie sich die Spinoren unter γ^0 und γ^5 transformieren.

I. Grenzfall: Teilchen in Ruhe $p_z \to 0$:

	u_1	u_2	v_1	v_2
$Impuls/Spin$ Paritätstrafo γ^0	$\uparrow\Uparrow$ $\gamma^0 u_1 =$	$\uparrow\Downarrow$ $\gamma^0 u_2 =$	$\downarrow\Downarrow$ $\gamma^0 v_1 =$	$\downarrow\Uparrow$ $\gamma^0 v_2 =$
Chiralitätsoperator γ^5	$\gamma^5 u_1 =$	$\gamma^5 u_2 =$	$\gamma^5 v_1 =$	$\gamma^5 v_2 =$

Quizfragen:

- Wie unterscheiden sich die Eigenparitäten von Teilchen und Antiteilchen?

- Entspricht der Chiralitätsoperator γ^5 einer guten (erhaltenen) Quantenzahl, d.h. vertauscht γ^5 mit den Matrizen α_i $(i = 1, 2, 3)$ und β, die in dem Hamiltonian $H = \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta\, m$ vorkommen?

II. Grenzfall: Teilchen hochrelativistisch, $m \sim 0$:

	u_1	u_2	v_1	v_2
$Impuls/Spin$ Paritätstrafo γ^0	$\uparrow\Uparrow$ $\gamma^0 u_1 =$	$\uparrow\Downarrow$ $\gamma^0 u_2 =$	$\downarrow\Downarrow$ $\gamma^0 v_1 =$	$\downarrow\Uparrow$ $\gamma^0 v_2 =$
Chiralitätsoperator γ^5	$\gamma^5 u_1 =$	$\gamma^5 u_2 =$	$\gamma^5 v_1 =$	$\gamma^5 v_2 =$

Quizfragen:

- Was bewirkt die Paritätsoperation für die Impulse und Spins, d.h. wie verändern sich die jeweiligen Richtungen?

- Ist die Chiralität in dem Hochenergielimit eine gute Quantenzahl?

3. **Bhabha Streuung: Berechnung des spingemittelten quadrierten Matrixelementes $\overline{|M|^2|}$:** Auf den folgenden zwei Seiten finden Sie als Auszug aus dem Buch von Peter Schmüser die Berechnung des Matrixelementes für Møllerstreuung und danach skizzenhaft die Berechnung für die Bhabhastreuung. Ihre Aufgabe ist es die fehlenden Schritte für die Bhabhastreuung zu vervollständigen und damit ihre ersten Feynmandiagramme selbst komplett zu berechnen/auszuwerten :-)

   a) rechnen Sie explizit nach (sehr einfach), wie man die Formel für $|M|^2$ aus der Formel für M (s. Seite 65) gewinnt.

   b) führen Sie selbst die Mittelung über die Spineinstellungen im Anfangszustand und die Summation über die Spineinstellungen im Endzustand durch.

   c) Zeigen Sie explizit wie man die drei Terme in $\overline{|M|^2}$ die jeweils von p_1, p_2, p_3 und p_4 abhängen in die finale streuwinkelabhängige Form (wie angegeben) bringt.

   Hinweis: einiges nützliches zu b) finden Sie auf Seite 65 des Schmüserbuchs.

5.5 Elektron-Elektron- und Elektron-Positron-Streuung

5.5.1 Elektron-Elektron-Streuung

Die elastische e^-e^--Streuung (Abb. 5.4) hat eine Besonderheit: die Elektronen sind ununterscheidbar, und sie sind Fermionen. Die Streuamplitude muß antisymmetrisch gegen die Vertauschung der Elektronen im Endzustand sein. Das Elektron mit Viererimpuls p_3 kann identisch mit dem Elektron 1 oder Elektron 2 sein. Demgemäß gibt es zwei Feynman-Diagramme, deren Amplituden wegen der Fermi-Statistik voneinander subtrahiert werden müssen.

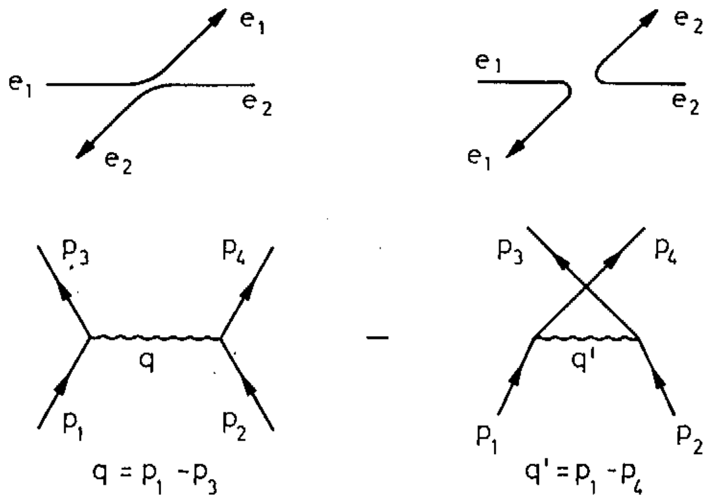

Abb. 5.4. Schema der e^-e^--Streuung und die beiden Feynman-Diagramme.

$$\mathcal{M} = ie^2\left[\frac{1}{q^2}\overline{u}(p_3)\gamma_\mu u(p_1)\overline{u}(p_4)\gamma^\mu u(p_2) - \frac{1}{q'^2}\overline{u}(p_4)\gamma_\mu u(p_1)\overline{u}(p_3)\gamma^\mu u(p_2)\right].$$

Das Matrixelement ist antisymmetrisch gegen die Vertauschung $p_3 \leftrightarrow p_4$.

$$\begin{aligned}|\mathcal{M}|^2 = e^4\cdot \Big\{ & \frac{1}{q^4}\,\overline{u}_3\gamma_\mu u_1\overline{u}_1\gamma_\nu u_3\overline{u}_4\gamma^\mu u_2\overline{u}_2\gamma^\nu u_4 \\ & + \frac{1}{q'^4}\,\overline{u}_4\gamma_\mu u_1\overline{u}_1\gamma_\nu u_4\overline{u}_3\gamma^\mu u_2\overline{u}_2\gamma^\nu u_3 \\ & - \frac{1}{q^2q'^2}\,[\overline{u}_3\gamma_\mu u_1\overline{u}_1\gamma_\nu u_4\overline{u}_4\gamma^\mu u_2\overline{u}_2\gamma^\nu u_3 \\ & + \overline{u}_4\gamma_\mu u_1\overline{u}_1\gamma_\nu u_3\overline{u}_3\gamma^\mu u_2\overline{u}_2\gamma^\nu u_4]\Big\}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{e^4}{4}\cdot \Big\{ & \frac{1}{q^4}\,\mathrm{Spur}(\gamma_\mu \not{p}_1\gamma_\nu \not{p}_3)\mathrm{Spur}(\gamma^\mu \not{p}_2\gamma^\nu \not{p}_4) \\ & + \frac{1}{q'^4}\,\mathrm{Spur}(\gamma_\mu \not{p}_1\gamma_\nu \not{p}_4)\mathrm{Spur}(\gamma^\mu \not{p}_2\gamma^\nu \not{p}_3) \\ & - \frac{1}{q^2q'^2}\,[\mathrm{Spur}(\gamma_\mu \not{p}_1\gamma_\nu \not{p}_4\gamma^\mu \not{p}_2\gamma^\nu \not{p}_3) \\ & + \mathrm{Spur}(\gamma_\mu \not{p}_1\gamma_\nu \not{p}_3\gamma^\mu \not{p}_2\gamma^\nu \not{p}_4)]\Big\}.\end{aligned}$$

Die Elektronenmasse ist hier vernachlässigt worden. Unter Benutzung der Hilfssätze

$$\begin{aligned}\gamma_\nu \not{p}_4\gamma^\mu \not{p}_2\gamma^\nu &= -2\not{p}_2\gamma^\mu \not{p}_4\,, \\ \gamma_\mu \not{p}_1 \not{p}_2\gamma^\mu &= 4(p_1\cdot p_2)I\end{aligned}$$

vereinfacht sich der Ausdruck

$$\begin{aligned}\overline{|\mathcal{M}|^2} = 8e^4\cdot \Big\{ & \frac{1}{q^4}\,[(p_1\cdot p_2)(p_3\cdot p_4) + (p_1\cdot p_4)(p_2\cdot p_3)] \\ & + \frac{1}{q'^4}\,[(p_1\cdot p_2)(p_3\cdot p_4) + (p_1\cdot p_3)(p_2\cdot p_4)] \\ & + \frac{1}{q^2q'^2}\,[2(p_1\cdot p_2)(p_3\cdot p_4)]\Big\}.\end{aligned}$$

Für die Kinematik gilt

$$\begin{aligned}q^2 \approx -2p_1\cdot p_3 &\approx -W^2\sin^2(\theta/2) \\ q'^2 \approx -2p_1\cdot p_4 &\approx -W^2\cos^2(\theta/2) \\ p_1\cdot p_2 = p_3\cdot p_4 &\approx W^2/2\,.\end{aligned}$$

Damit wird der differentielle Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{2W^2}\left\{\frac{1+\cos^4(\theta/2)}{\sin^4(\theta/2)} + \frac{1+\sin^4(\theta/2)}{\cos^4(\theta/2)} + \frac{2}{\sin^2(\theta/2)\cos^2(\theta/2)}\right\}. \tag{5.36}$$

Er enthält drei Terme. Der erste entspricht dem direkten Graphen, der zweite dem Austauschgraphen und der dritte der Interferenz der beiden Graphen. Der Wirkungsquerschnitt $d\sigma/d\Omega$ für $e^-e^- \to e^-e^-$ ist im CMS invariant gegen die Substitution $\theta \to \pi - \theta$, die einer Vertauschung der beiden Elektronen im Endzustand entspricht.

5.5.2 Elektron-Positron-Streuung

Bei der *Bhabha-Streuung* $e^-e^+ \to e^-e^+$ gibt es auch zwei Graphen: einen Streugraphen und einen Annihilationsgraphen (Abb. 5.5).

$$\mathcal{M} = -ie^2\left[\frac{1}{q^2}\overline{u}(p_3)\gamma_\mu u(p_1)\overline{v}(p_2)\gamma^\mu v(p_4) - \frac{1}{q'^2}\overline{v}(p_2)\gamma_\mu u(p_1)\overline{u}(p_3)\gamma^\mu v(p_4)\right].$$

Das Matrixelement $\mathcal{M}$ ist antisymmetrisch gegen die Vertauschung der beiden „auslaufenden Elektronen“:

Aufg. 4.3

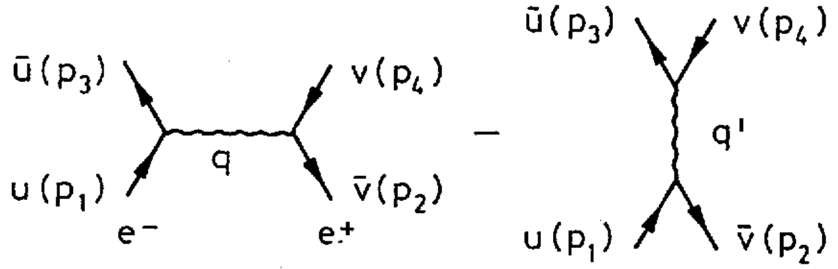

Abb. 5.5. Streu- und Annihilationsgraph der Reaktion $e^-e^+ \to e^-e^+$.

Aufgaben:

a) zu zeigen (einfach)

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{M}|^2 = e^4 \Big\{ & \frac{1}{q^4}\overline{u}(p_3)\gamma_\mu u(p_1)\overline{u}(p_1)\gamma_\nu u(p_3)\overline{v}(p_2)\gamma^\mu v(p_4)\overline{v}(p_4)\gamma^\nu v(p_2) \\
& + \frac{1}{q'^4}\overline{v}(p_2)\gamma_\mu u(p_1)\overline{u}(p_1)\gamma_\nu v(p_2)\overline{u}(p_3)\gamma^\mu v(p_4)\overline{v}(p_4)\gamma^\nu u(p_3) \\
& - \frac{1}{q^2q'^2}\left[\overline{u}(p_3)\gamma_\mu u(p_1)\overline{u}(p_1)\gamma_\nu v(p_2)\overline{v}(p_2)\gamma^\mu v(p_4)\overline{v}(p_4)\gamma^\nu u(p_3)\right. \\
& \left. + \overline{v}(p_2)\gamma_\mu u(p_1)\overline{u}(p_1)\gamma_\nu u(p_3)\overline{u}(p_3)\gamma^\mu v(p_4)\overline{v}(p_4)\gamma^\nu v(p_2)\right] \Big\}.
\end{aligned}
$$

Nach der Mittelung über die Spineinstellungen im Anfangszustand und Summation über die Spineinstellungen im Endzustand ergibt sich

b) zu zeigen (d.h. Mittelung u. Summation durchführen)

$$
\begin{aligned}
\overline{|\mathcal{M}|^2} &= 8e^4 \left\{ \frac{1}{q^4}\left[(p_1\cdot p_2)(p_3\cdot p_4) + (p_1\cdot p_4)(p_2\cdot p_3)\right] \right. \\
&\quad + \frac{1}{q'^4}\left[(p_1\cdot p_4)(p_2\cdot p_3) + (p_1\cdot p_3)(p_2\cdot p_4)\right] \\
&\quad \left. + \frac{1}{q^2q'^2}\left[2(p_1\cdot p_4)(p_2\cdot p_3)\right] \right\} \\
&= 2e^4 \left\{ \frac{1+\cos^4(\theta/2)}{\sin^4(\theta/2)} + \frac{1+\cos^2\theta}{2} - \frac{2\cos^4(\theta/2)}{\sin^2(\theta/2)} \right\}
\end{aligned}
$$

c) zu zeigen, (p_1, p_2, p_3, p_4 dazu wie üblich wählen im CMS)

Der Wirkungsquerschnitt für $e^-e^+ \to e^-e^+$ lautet im Schwerpunktsystem

$$
\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{2W^2}\left\{ \frac{1+\cos^4(\theta/2)}{\sin^4(\theta/2)} + \frac{1+\cos^2\theta}{2} - \frac{2\cos^4(\theta/2)}{\sin^2(\theta/2)} \right\}. \tag{5.37}
$$

Auch in diesem Fall enthält der Wirkungsquerschnitt drei Terme, die vom Streugraphen, vom Annihilationsgraphen und der Interferenz der beiden kommen.

5.6 Teilchen-Antiteilchen-Symmetrie

Die Matrixelemente haben eine Symmetrie gegen eine Teilchen-Antiteilchen-Vertauschung, die man auch oft „Crossing"-Symmetrie nennt. Um dies zu zeigen, vergleichen wir eine Streuung mit einer Vernichtungsreaktion (siehe Abb. 5.6). Die zugehörigen Matrixelemente sind