

Übungen E-Teilchen für Fortgeschrittene SS2010, Blatt 3

Ausgabe Freitag 23.4, Abgabe Freitag 30.4.

1. Drehimpulserhaltung und Spin in der Diracgleichung:

Zeigen Sie, dass für ein freies Diraceteilchen der Gesamtdrehimpuls $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$, nicht aber der Bahndrehimpuls \vec{L} erhalten ist. Gehen Sie dabei folgendermassen vor:

a) Zeigen Sie $[H, \vec{L}] = -i(\vec{\alpha} \times \vec{p})$, (Hinweis: Verwenden Sie $[x_i, p_j] = i\delta_{ij}$).

b) Zeigen Sie $[H, \vec{\Sigma}] = +2i(\vec{\alpha} \times \vec{p})$, mit $\vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$.

2. Gamma Matrizen, adjungierter Spinor: Der zum Spinor $\Psi(x)$ adjungierte Spinor $\bar{\Psi}(x)$ ist definiert durch $\bar{\Psi}(x) = \psi^+(x)\gamma^0$.

a) Leiten Sie die Dirac Gleichung (in γ Matrizen Notation) für den adjungierten Spinor $\bar{\Psi}$ her.

b) Aus der Dirac Gleichung resultiert die Gleichung $(\not{p} - m)u(p) = 0$ für die Spinoren u_1, u_2 . Zeigen Sie, dass für v_1, v_2 gilt $(\not{p} + m)v(p) = 0$, sowie für die adjungierten Spinoren $\bar{u}(p)(\not{p} - m) = 0$ und $\bar{v}(p)(\not{p} + m) = 0$. Hinweis: Wenden Sie die Diracgleichung auf die entsprechenden Lösungen $v(p)e^{+iEt - i\vec{p}\cdot\vec{x}}$ etc. an.

3. Invarianten für Streureaktionen:

a) Betrachten Sie die Streuung $e^-e^+ \rightarrow e^-e^+$ im s-Kanal. Verifizieren Sie, dass

$$s = 4(k^2 + m^2),$$

$$t = -2k^2(1 - \cos\theta),$$

$$u = -2k^2(1 + \cos\theta),$$

wobei θ der Streuwinkel im Elektron-Positron Schwerpunktsystem ist und $k = |\vec{k}_i| = |\vec{k}_f|$ (wobei \vec{k}_i und \vec{k}_f die Impulse des ein- und auslaufenden Elektrons im Schwerpunktsystem darstellen).

b) Zeigen Sie dass der Prozess physikalisch möglich ist wenn $s \geq 4m_e^2$, $t \leq 0$ und $u \leq 0$.

4. Spuren von γ Matrizen: Benutzen Sie die Relationen:

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}\mathbf{1}$$

$$\text{Spur}(\gamma^\mu) = 0$$

$$\text{Spur}(AB) = \text{Spur}(BA)$$

um zu beweisen:

a) $\text{Spur}(\gamma^\mu\gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}$

b) $\text{Spur}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\sigma) = 4(g^{\mu\nu}g^{\lambda\sigma} - g^{\mu\lambda}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\lambda})$