Übungen E-Teilchen für Fortgeschrittene SS2010, Blatt 2

Ausgabe Freitag 16.4, Abgabe Freitag 23.4.

1. **Lorentinvariantes Spinorprodukt**
   Zeigen Sie mit den aus der Vorlesung (oder Schmüserbuch) bekannten Spinoren u_1, u_2, v_1 und v_2 und den adjungierten Spinoren $\bar{u}_1 = u_1^+ \gamma^0$, etc., dass
   $$\bar{u}_i u_i = 2m, \quad \bar{v}_i v_i = -2m$$

2. **Rotationsmatrizen**
   Beweisen Sie durch explizites Ausrechnen des Gleichungssystemes
   $$S^{-1}\gamma^\nu S = a^\nu_\mu \gamma^\mu,$$
   dass die Rotationsmatrizen für Drehungen um die x- und y-Achse gegeben sind durch
   $$S^x_{Rot} = I\, cos(\theta/2) - \gamma^2\gamma^3 sin(\theta/2), \quad S^y_{Rot} = I\, cos(\theta/2) - \gamma^3\gamma^1 sin(\theta/2).$$

3. **Eigenzusände des Spinoperators**
   Wir definieren den Spin-Operator durch $\vec{S} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$ (für $\hbar = 1$)

   - **Erster Fall: Im Ruhesystem des Teilchens $\vec{p} = (p_x, p_y, p_z) = \vec{0}$:**
     Es ist leicht zu sehen, dass u_1, u_2 Eigenzustände von S_3 mit den Eigenwerten $\pm 1/2$ sind. Konstruieren Sie die Eigenzustände von S_1 und S_2 als Linearkombinationen von u_1 und u_2. Alternativ kann man eine Rotation um $\pi/2$ um die $y-$ bzw. $x-$ Achse auf die Spinoren u_1, u_2 anwenden. Zeigen Sie, dass dies (evtl. bis auf einen unwesentlichen Phasenfaktor) zum gleichen Ergebnis führt. Das Vorzeichen des Drehwinkels ist zu beachten; es ist nicht dasselbe, ob man einen Spinor rotiert oder das Koordinatensytem.
   - **Zweiter Fall: bewegte Teilchen mit beliebigem Impuls $\vec{p}$:**
     Zeigen Sie, dass $u_1(\vec{p})$, $u_2(\vec{p})$ Eigenzustände von S_3 sind für den Fall $\vec{p} = (0, 0, p_z)$, d.h. $\vec{p}\,||\,z$. Zeigen Sie, dass ähnliches für die obigen Linearkombinationen von u_1 und u_2 gilt, d.h. dass Sie auch für bewegte Teilchen Eigenzustände von S_1 und S_2 sind, wenn der Impuls gerade parallel zur x- bzw. y-Achse ist.

4. **Lorentztransformationen entlang $x-$ und $y-$ Achsen**
   Zeigen Sie, dass die Matrizen für Lorentz-Transformationen längs der $x-$ bzw. $y-$ Achse folgende Gestalt haben:
   $$S^x_{Lor} = I\, cosh(\omega/2) - \gamma^0\gamma^1 sinh(\omega/2),\ S^y_{Lor} = I\, cosh(\omega/2) - \gamma^0\gamma^2 sinh(\omega/2)$$
   Wenden Sie diese Lorentz-Matrizen auf die Spinoren u_1, u_2 im Ruhesystem an (und vergleichen Sie mit den Formeln für u_1 und u_2 aus der Vorlesung.)